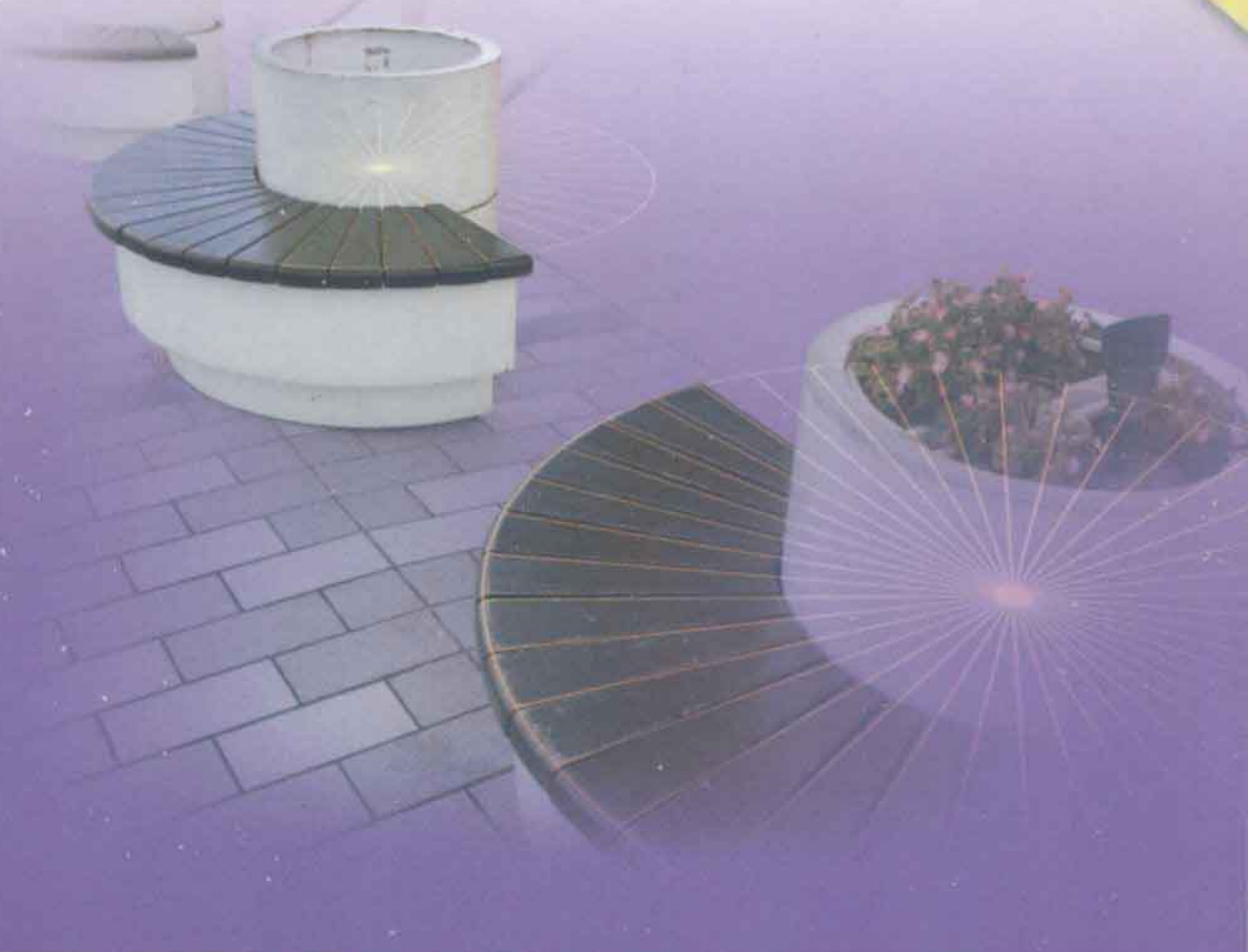
學生手冊

6A



高中數學新探索

(必修部分)

編著　管俊傑　張美華　莊書榮　蔡銘哲

包括：
- 精簡的複習筆記
- 簡單例題及其解題步驟
- 計算機程式

香港教育圖書公司

新高中適用

學生手冊

6A

高中數學新探索

（必修部分）

編著　管俊傑　張美華　莊書榮　蔡銘哲

香港教育圖書公司

新高中適用

高中數學新探索 6A
必修部分

學生手冊

編　著　管俊傑　張美華　莊書榮　蔡銘哲
出版者　香港教育圖書公司
〔商務印書館（香港）有限公司全資附屬機構〕
香港筲箕灣耀興道 3 號東匯廣場 8 樓
電話：2565 1371
網址：http://www.hkep.com
印刷者　盈豐國際印刷有限公司
香港柴灣康民街 2 號康民工業中心 14 樓 1414 室
發行者　香港聯合書刊物流有限公司
新界大埔汀麗路 36 號中華商務印刷大廈 3 字樓
電話：2150 2100

2010 年初版
2011 年重印

ISBN 978-988-200-918-9

學校查詢　香港教育圖書公司市場部
電話：2887 8018
電郵：sales@hkep.com
網址：http://www.hkep.com

目錄

第五階段

第六階段

附錄

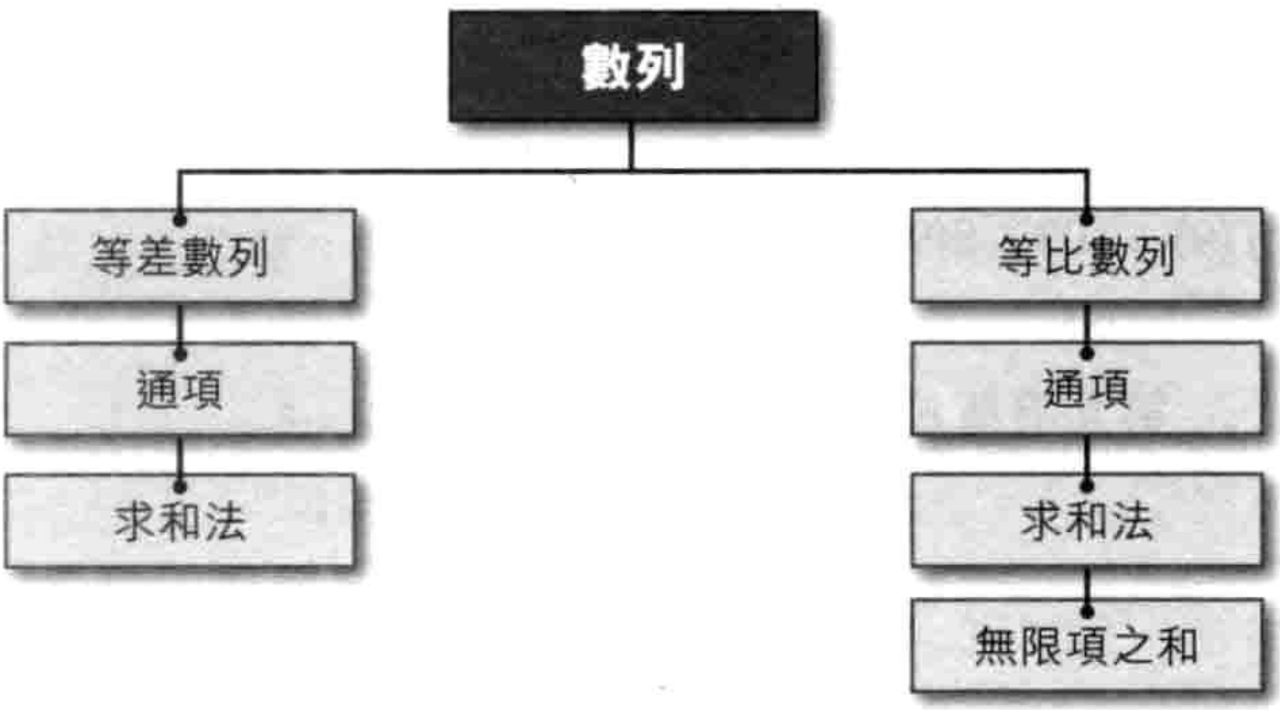
第 18 章

等差與等比數列

學習重點

- 理解數列的概念及其通項
- 理解等差數列及等比數列的概念和性質
- 理解等差數列及等比數列的通項
- 理解等差數列及等比數列的有限項求和公式
- 探究某些等比數列的無限項求和公式
- 解有關數列的現實生活問題

知識表解



A 數列簡介

（請參閱6A冊 第18章 頁2 – 5。）

數列是一組按次序排列的數。我們常用 $T(n)$ 來表示一數列的第 n 項，它稱為數列的通項。

例 1

已知一數列的通項為 $T(n) = 108 - 5n$ 。

(a) 求數列的第九項。

(b) 求當 $T(n) = -2$ 時 n 的值。

(c) 55 是不是數列中的其中一項？

解：

(a)

第一步

把 $n = 9$ 代入通項中。

$$T(9) = 108 - 5(9)$$
$$= 63$$

$\therefore$ 第九項為 63 。

(b)

第二步

建立一未知數為 n 的方程，並解該方程。

當 $T(n) = -2$ 時，可得

$$\begin{aligned} 108 - 5n &= -2 \\ -5n &= -110 \\ n &= \underline{\underline{22}} \end{aligned}$$

(c)

第三步

假設 55 為數列中的一項。

假設 $T(n) = 55$，則

$$108 - 5n = 55$$

第四步

對以上方程，求 n 的值。

$$\begin{aligned} -5n &= -53 \\ n &= 10.6 \end{aligned}$$

第五步

判定 n 是否為一正整數，並得出結論。

由於 n 不是正整數，因此 55 不是數列中的其中一項。

非基礎部分

B 等差數列

（請參閱6A冊 第18章 頁8 – 14。）

1. 等差數列是按以下形式排列的數：

   a，$a+d$，$a+2d$，…，

   其中 a 為首項及 d 為公差。

2. 等差數列的通項為

   $T(n) = a + (n-1)d$。

3. 等差數列的性質包括：

   (a) $T(n) = \frac{1}{2}[T(n-1) + T(n+1)]$

   (b) 若 $T(1)$，$T(2)$，$T(3)$，…為等差數列，則 $kT(1)+a$，$kT(2)+a$，$kT(3)+a$，…，亦為等差數列，其中 k 及 a 為常數。

例 2

考慮等差數列 5，11，17，…。

(a) 求數列的通項。

(b) 求第 80 項。

(c) 數列中共有多少項的值較 100 為小？

解：

(a)

第一步

求數列的首項及公差。

對等差數列 5，11，17，…，

$$a = 5$$
$$d = 11 - 5 = 6$$

第二步

寫出數列的通項。

$$\begin{aligned} T(n) &= 5 + (n-1) \times 6 \\ &= 5 + 6n - 6 \\ &= \underline{\underline{6n - 1}} \end{aligned}$$

(b)

第三步

把 $n = 80$ 代入通項中。

$$T(80) = 6(80) - 1$$
$$= 479$$

∴ 第 80 項為 479。

(c)

第四步

對 $T(n)$ 建立一不等式。

$$T(n) < 100$$
$$6n - 1 < 100$$
$$6n < 101$$
$$n < 16.833...$$

第五步

求滿足於以上不等式的 n 的最大整數值，並得出結論。

由於 16 為最大的整數值，因此該數列有 16 項的值較 100 為小。

非基礎部分

C 等比數列

（請參閱6A冊 第18章 頁18 – 23。）

1. 等比數列是按以下形式排列的數：

   a，ar，ar^2，…，

   其中 a 為首項及 r 為公比。

2. 等比數列的通項為 $T(n) = ar^{n-1}$。

3. 等比數列的性質包括：

   (a) $T(n)^2 = T(n-1) \times T(n+1)$

   (b) 若 $T(1)$，$T(2)$，$T(3)$，… 為等比數列，則 $kT(1)$，$kT(2)$，$kT(3)$，… 亦為等比數列，其中 k 為常數。

例 3

考慮等比數列 2048，512，128，…，$\frac{1}{32}$。求該數列的項數。

解：

第一步

求數列的首項及公比。

$a = 2048$

$$r = \frac{512}{2048} = \frac{1}{4}$$

第二步

寫出數列的通項。

$$T(n) = 2048 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

第三步

建立一未知數為 n 的方程。

當 $T(n) = \dfrac{1}{32}$ 時，可得

$$2048 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{65\,536}$$

第四步

對方程兩邊同時取對數，並解該方程。

$$(n-1)\log\left(\frac{1}{4}\right) = \log\left(\frac{1}{65\ 536}\right)$$
$$n-1 = 8$$
$$n = 9$$

$\therefore$ 該等比數列共有 9 項。

非基礎部分

D 等差數列的求和法

(請參閱6A冊 第18章 頁27 – 31。)

等差數列首 n 項之和為

$$S(n) = \frac{n}{2}(a+l) \qquad 或$$

$$S(n) = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]，$$

其中 a 為首項、l 為尾項及 d 為公差。

備註：

若 $T(1)$，$T(2)$，$T(3)$，…，$T(n)$ 為一等差數列，
則 $T(1)+T(2)+T(3)+\ldots+T(n)$ 為一等差級數。
$S(n)$ 被稱為該級數之和，即 $S(n)=T(1)+T(2)+T(3)+\ldots+T(n)$。

例 4

對一等差數列，已知 $T(5) = 57$ 及 $T(30) = -218$。求該數列首 40 項之和。

解：

第一步

根據題設，建立一組聯立方程。

由於 $T(5) = 57$ 及 $T(30) = -218$，可得

$$\begin{cases} a + (5-1)d = 57 \\ a + (30-1)d = -218 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 4d = 57 \text{.........(1)} \\ a + 29d = -218 \text{......(2)} \end{cases}$$

第二步

解該方程組，以求得數列的首項及公差。

(2) – (1)：

$$\begin{aligned} (a + 29d) - (a + 4d) &= -218 - 57 \\ 25d &= -275 \\ d &= -11 \end{aligned}$$

把 $d=-11$ 代入 (1) 中，可得

$$a+4(-11)=57$$
$$a=101$$

第三步

利用公式 $S(n)=\dfrac{n}{2}[2a+(n-1)d]$，以求該數列之和。

$$S(40)=\frac{40}{2}\times[2(101)+(40-1)\times(-11)]$$
$$=20\times(-227)$$
$$=\underline{\underline{-4540}}$$

非基礎部分

E 等比數列的求和法

(請參閱6A冊 第18章 頁34 – 39。)

1. 等比級數首 n 項之和為

$$S(n)=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\text{ (其中 }r>1\text{)} \quad 或$$

$$S(n)=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\text{ (其中 }r<1\text{)}，$$

其中 a 為首項及 r 為公比且 $r\neq 1$。

例 5

求以下等比級數之和：

$$-1+3-9+\ldots+2187$$

解：

第一步

求級數的首項及公比。

$a=-1$

$r=\dfrac{3}{-1}=-3$

第二步

判別該級數的項數。

當 $T(n)=2187$ 時，可得

$$\begin{aligned}-1\times(-3)^{n-1}&=2187\\(-3)^{n-1}&=-2187\\(-3)^{n-1}&=(-3)^7\\n-1&=7\\n&=8\end{aligned}$$

第三步

利用公式 $S(n) = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，以求該級數之和。

$$S(8) = \frac{-1[1-(-3)^8]}{1-(-3)}$$

$$= \frac{-1[1-6561]}{4}$$

$$= \underline{\underline{1640}}$$

注意：

在第二步中，由於方程兩邊之底數為負數，不可於兩邊取對數。

（請參閱6A冊 第18章 頁39 – 43。）

2. 等比級數無限項之和為

$$S(\infty) = \frac{a}{1-r}\text{，其中 } -1 < r < 1\text{，}$$

其中 a 為首項及 r 為公比。