新编全国成人高考辅导丛书

广西师范大学出版社　光明日报出版社

数学

（上）

黄绪励　主编

·新编全国成人高考辅导丛书·

数　学（上）

主　编　黄绪励
撰稿人　黄绪励　王俊邦　黄绪勉
秦宗培　王英惠

光明日报出版社
广西师范大学出版社

新编全国成人高考辅导丛书

丛书总　编　张德政
副总编　马　衲
杨惠娟

前　言

依据国家教委1990年颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》的要求，我们编写了《新编全国成人高考辅导丛书·数学》. 全书分上、下两册. 上册包括代数、三角两个部分；下册包括立体几何、平面解析几何两个部分. 各部分分若干章节，其中包括考纲要求、内容提要、例题及解题指导、练习等项. 各章练习题详解及指导分析附各册书后.

考虑到读者多为成人，年龄偏高、文化基础参差不齐、工作性质差异大、业余自学时间有限等情况，本书注意发挥成人理解力强这一优势. 着重基本概念的阐明和基本技能的训练，并在此基础上进行综合运用能力的培养. 为此，本书尽量做到：例题量大，类型全面，指导详细，练习覆盖面大，解题步骤详细，以便于成人读者在时间紧、工作任务重、学习内容多的情况下，主要通过自学来掌握考试大纲所要求的基础知识和基本技能.

本书例题分为三个基本层次：1. 基本概念的理解；2. 基本技能的训练；3. 综合运用能力的培养. 读者可据此由浅入深、由简单到复杂、循序渐进地学习，收到事半功倍的效果. 书中凡适合理科考生而不适合文科考生的内容、例题和练习，均标上 * 号，或作文字说明.

本书编者多年从事成人教育，经常为成人高考辅导班讲课. 本书在辅导班讲义的基础上，参考多种现行成人高考辅

导材料，兼收各家之长而编成．参加编写工作的有北京教育学院宣武分院高级教师黄绪励（负责代数、三角部分）、高级教师王俊邦（负责立体几何部分）、湖北襄樊财贸学校高级讲师黄绪勉（负责平面解析几何部分）以及秦宗培、王英惠等同志．全书由黄绪励主编、统稿．

由于编者水平有限，错漏之处在所难免，恳切希望得到专家和读者的批评指正．

编　者

1990年12月31日

目　　录

第一编 代 数

第一章 数、式、方程和方程组

〔考纲要求〕

1. 理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、算术平方根的概念，会熟练地进行有关计算.

2. 理解有关整式、分式的概念，会对整式和分式进行加、减、乘、除、乘方的运算.

3. 理解二次根式的有关概念和二次根式的性质，会进行二次根式的化简和运算.

4. 会解一元一次方程、一元二次方程，能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题.

5. 会解有唯一解的二元一次方程组、三元一次方程组；会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解简单的由两个二元二次方程组成的方程组（主要指以下几种类型：用加减消元法可消去某个未知数的，可消去二次项的，以及至少有一个方程可分解成一次方程的）.

〔内容提要〕

一、实数

1. 实数的概念

实数是由有理数和无理数构成的．有理数就是有限小数或无限循环小数，无理数则是无限不循环小数．实数又可详

细分类如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(或自然数)}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

(1) 整数：0，±1，±2，±3，…叫做整数. 自然数就是1，2，3，4，…. 注意自然数中不包括0. 另外自然数有最小的一个是1，没有最大数.

(2) 分数：可以表示成二个整数之商的数中，不是整数的那些数.

(3) 有理数都可表示为$\frac{p}{q}$的形式，其中p、q为整数，$q\neq 0$.

(4) 无理数：不可表示为整数之商的数，例如$\sqrt{2}$、π等.

2. 数轴

数轴就是一条规定了原点、正方向和单位长度的直线（图1-1）.

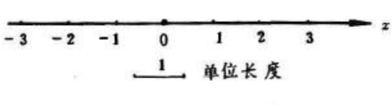

图 1-1

实数与数轴上的点是一一对应的，即数轴上每一个点表示唯一的一个实数，反过来，每一个实数可用数轴上唯一的一个点来表示. 因此，可以把实数和数轴上的点看成是同样的事物.

3. 实数的运算

在实数的范围内可以施行加、减、乘、除（除数不为

零）和乘方五种运算．非负数可施行开偶次方运算，任何实数都可施行开奇次方的运算．

在实数的运算中，在同一式中应先乘方、开方，然后乘、除，最后加、减；有括号时，由最里层括号算起，逐层去掉括号．

由于减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，乘方是乘法的特殊形式，开方是乘方的逆运算，因此，实数的运算本质上就是加法与乘法，它们满足：

（1）交换律：$a+b=b+a$，$a\cdot b=b\cdot a$；

（2）结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

（3）分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$．

4．相反数

二个数只是符号不同就叫做互为相反数．例如，$\frac{1}{2}$与$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$叫$-\frac{1}{2}$的相反数，$-\frac{1}{2}$也叫$\frac{1}{2}$的相反数．

零的相反数规定为零．如果用数轴表示，除零外，两个互为相反的数在数轴上是关于原点对称的两点．

5．绝对值

规定正数的绝对值是其本身，负数的绝对值是其相反数，零的绝对值是零．

实数 a 的绝对值记为$|a|$，所以

$$|a|=\begin{cases}a,\text{当 } a>0 \text{ 时},\\0,\text{当 } a=0 \text{ 时},\\-a,\text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

注意　绝对值$|a|$永远是一个大于或等于零的数，即$|a|$

$\geqslant 0$.

6. 二次方根

(1) 平方根：如果一个数的平方等于 a ($a\geqslant 0$)，那么把此数叫做 a 的平方根，或二次方根．如果 $x^2=a$，那么 x 就是 a 的平方根；但此时，也有 $(-x)^2=a$，因此 $-x$ 也是 a 的平方根．由此可知：

任何一个正数都有二个平方根．

(2) 算术根：正数 a 的正的平方根，叫 a 的算术平方根，记为 $\sqrt{a}$．规定 0 的算术平方根就是 0．所以，任何正数 a，除 $\sqrt{a}$ 外，另一个平方根就是 $-\sqrt{a}$．根据平方根的定义可得到下列重要公式：

$$(\pm\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0).$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a,\text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时},\\ -a,\text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

注意 平方根的概念，只是对正数 a 和零作了规定；对于负数 a 则没有定义，即 $a<0$ 时，没有平方根．应牢牢记住 $\sqrt{a}$ 永远是一个非负数．

二、式

1. 代数式及其分类

用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数字或表示数的字母连结而成的式子叫做代数式．其分类如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

(1) 单项式和多项式：由数字或数字与字母的乘积形成的式子叫做单项式. 例如，3，$-3x$，$\frac{1}{4}x^2a$. 几个单项式的和叫做多项式. 例如，$3x-\frac{1}{5}y+4a^2$.

(2) 整式：单项式和多项式统称为整式.

(3) 分式：设 A、B 是两个整式，且 B 中含有字母，则 $\frac{A}{B}$ 叫做分式（分母的值假定不是 0).

整式和分式统称为有理式.

2. 代数式的运算

(1) 整式的运算：整式可进行加、减、乘运算，结果仍为整式；整式可作带余除法运算.

在多项式里，所含字母相同，且各字母的指数也分别相同的项叫做同类项. 例如，$-5x^2y$ 与 $\frac{1}{2}x^2y$.

整式的加、减法就是合并同类项.

整式的乘法，可按下列公式进行：

$$(a+b)(m+n+s)$$

$$=am+an+as+bm+bn+bs.$$

在整式的乘法与乘方运算中，常用的公式有：

乘法公式

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$，

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

幂的运算公式

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0,\ m > n)$,

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $(ab)^m = a^m b^m$.

整式的除法见例题.

(2) 分式的运算：分式也有与分数类似的性质，如通分、约分、四则运算等. 其法则如下：

① 约分：$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$ $(m \neq 0)$.

② 分式的加减：

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c},\ \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}.$$

③ 分式的乘除：

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},\ \frac{a}{b} \div \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

④ 分式的乘方：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ (n \text{ 为正整数}).$$

3. 多项式的因式分解

把一个多项式化成几个整式的乘积形式，叫做因式分解.

常用的因式分解的方法有提取公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法、求根公式法.

4. 二次根式

式子$\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$ 叫做二次根式.

由此定义知道，二次根式$\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$ 就是 a 的算术平方根的表达式. 因此，$a < 0$ 时$\sqrt{a}$无意义.

(1) 二次根式的性质

① $(\sqrt{a})^2 = a$;

② $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ ($a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$)；

③ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a\geqslant 0$，$b>0$).

(2) 最简二次根式、同类根式

① 满足下列条件的二次根式叫**最简二次根式**：

(i) 被开方数不含分母；

(ii) 被开方数的每一个因式的指数都小于 2.

② 被开方数都相同的最简二次根式叫同类二次根式.

(3) 二次根式的运算

① 加、减法：先把各二次根式化为最简二次根式，然后分别合并同类二次根式.

② 乘、除法：应用下列公式：

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab},\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

(4) 分母有理化：把分母中含有根式的代数式的分子、分母同乘适当的根式，使分母不含根式，叫做分母有理化.

三、方程和方程组

1. 方程的基本概念

含有未知数的等式叫做方程. 能使方程左右两边相等的未知数的值叫做方程的解.

求方程的全部解，或确定方程无解的过程叫做解方程.

如果两个方程的解完全相同，这两个方程就叫做同解方程.

同解原理：

(1) 方程的两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，所得方程与原方程是同解方程.

(2) 方程的两边都乘以（或除以）不等于零的同一个数，所得方程与原方程是同解方程.

2. 一元一次方程及其解法

只含有一个未知数，并且未知数的次数是一次的方程，叫做一元一次方程. 它的一般形式为 $ax+b=0$ $(a\neq 0)$.

一元一次方程的解法是经过同解变形，如去分母、去括号、移项、合并同类项等，把方程化为 $ax+b=0$ 的形式，然后得到解 $x=-\frac{b}{a}$.

3. 一元二次方程及其解法

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的方程，叫做一元二次方程. 它的一般形式为

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0) \tag{1}$$

解法

(1) 因式分解法

若方程 (1) 可分解因式成为

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0,$$

则它的解为 $x=\alpha$, $x=\beta$.

(2) 配方法

若方程 (1) 可配方成为

$$a(x+p)^2+q=0\ (a\cdot q\leqslant 0, a\neq 0)$$

的形式，则它的解为 $x=-p\pm\sqrt{\frac{-q}{a}}$.

(3) 公式法

利用求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 求解.

$\Delta=b^2-4ac$ 称为方程 (1) 的**判别式**.

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实根；

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实根；

当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根.

一元二次方程的根与系数的关系

如果 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 的两个根是 α 和 β，则有（韦达定理）

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}.$$

特别地，如果方程为 $x^2+px+q=0$，则

$\alpha+\beta=-P$，$\alpha\cdot\beta=q$.

4. 方程组及其解法

(1) 二元一次方程组和三元一次方程组

$$\text{形如}\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}\text{和}\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3,\end{cases}$$

的方程组，分别叫做二元一次方程组和三元一次方程组. 它们可用下面方法求解：

① 代入消元法；② 加减消元法.

(解法见例题)

(2) 简单的二元二次方程组

形如 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的方程，叫做二元二次方程，其中 a，b，c 不全为 0.

由一个二元二次方程和一个二元一次方程，或由两个二元二次方程组成的方程组，叫做二元二次方程组.

由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的二元二次方程组，可用代入法求解.

由两个二元二次方程组成的方程组，只要求掌握几种特

殊类型的解法（解法见例题）.

〔例题与解题指导〕

一、基本概念的理解

例 1 下列哪些数是无理数、有理数、整数和自然数？

2.5，$-\sqrt{64}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\frac{1}{7}$，$\sqrt{(-3)^2}$，π，2，$\sqrt{-1}$.

答 无理数是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，π.

有理数是 2.5，$-\sqrt{64}$，$-\frac{1}{7}$，$\sqrt{(-3)^2}$，2.

整数是$-\sqrt{64}=-8$，$\sqrt{(-3)^2}=3$，2.

自然数是 2，$\sqrt{(-3)^2}=3$.

注意 在分析数的种类时，不能只看形式，带根号的数不一定是无理数，$\sqrt{-1}$不属于题中任何一类数.

例 2 填空

(1) 一个数的相反数等于它自己，这个数是（　　）；

(2) $x-y$ 的相反数是（　　）；

(3) 若 $x^2=625$，则 $x=$（　　），$\sqrt{625}=$（　　）；

(4) $(-3)^2$ 的平方根是（　　），$\sqrt{(-3)^2}=$（　　）；

(5) $|x+a|=0$，则 $x=$（　　）；

(6) $\sqrt{(x-1)^2}=$（　　）.

解 (1) 0；(2) $-(x-y)$ 或 $y-x$；(3) ± 25，25；

(4) ± 3，3；(5) $-a$；(6) $|x-1|$或$\begin{cases} x-1, & \text{当 } x>1 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x=1 \text{ 时}, \\ 1-x, & \text{当 } x<1 \text{ 时}. \end{cases}$