多元统计分析讲义

（研究生教材）

（下册）

山西大学数学系概率统计教研室

一九八〇年七月

多元统计分析讲义

（[illegible]）

（[illegible]）

[illegible]

[illegible]

第五章 基本多元抽样分布

§5·0 引言

这一章讨论一些与多元正态分布有关的基本分布。检验多元正态总体参数的假设所需的其它的多元统计量的分布将在有关的地方导出。为了加深理解和今后参考，我们也将简要介绍非中心 χ^2－分布，非中心学生氏 t－分布和非中心 F－分布。这些分布的推导读者可参看 Giri(1974)。

§5·1 非中心 χ^2－，非中心学生氏 t－和非中心 F－分布

5·1·1 非中心 χ^2－分布

设 X_1，…，X_N 是独立正态随机变量，$E(X_i)=\mu_i$，$Var(X_i)=\sigma_i^2$，$i=1,\ldots,N$。则随机变量

$$Z=\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i^2}{\sigma_i^2}$$

有下述概率密度函数

$$f_Z(z\,|\,\delta^2)=\begin{cases}\dfrac{\exp\{-\frac{1}{2}(\delta^2+z)\}z^{(N/2-1)}}{\sqrt{\pi}\,2^{N/2}}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\delta^2)^j z^j\Gamma(j+\frac{1}{2})}{(2j)!\,\Gamma(N/2+j)} & z\geq 0,\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad\cdots\cdots(5\cdot 1)$$

其中 $\delta^2=\sum_{i=1}^{N}(\mu_i^2/\sigma_i^2)$。它称为具有N个自由度和非中心参数

δ^2 的非中心 x^2－分布。这样的随机变量 Z 常常记为 $x^2_N(\delta^2)$。Z的特征函数是（t是实数）

$$\Phi_Z(t)=E(e^{itz})=(1-2it)^{N/2}\exp\{it\delta^2/(1-2it)\}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot 2)$$

其中 $i=(-1)^{1/2}$。由此得到，$y_1 \cdots y_R$ 是独立非中心 x^2 随机变量 $x^2_{N_i}(\delta^2_i)$，$i=1, \cdots, R$，则 $\sum_{i=1}^{R} y_i$ 是一个

$x^2_{\sum_{i=1}^{R} N_i}(\sum_{i=1}^{R}\delta^2_i)$ 变量。此外

$$E(x^2_N(\delta^2))=N+\delta^2, \quad Var(x^2_N(\delta^2))=2N+4\delta^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot 3)$$

由于对任意整数K

$$\Gamma(2R+1)\sqrt{\pi}=2^{2R}\Gamma(R+\tfrac{1}{2})\Gamma(R+1), \quad \cdots\cdots\cdots(5\cdot 4)$$

我们可将 $f_Z(z|\delta^2)$ 写为

$$f_Z(z|\delta^2)=\sum_{R=0}^{\infty}p_K(R)f_{x^2_{N+2R}}(Z), \quad \cdots\cdots\cdots(5\cdot 5)$$

其中 $p_K(R)$ 是以 $\frac{1}{2}\delta^2$ 为参数的poisson随机变量K的概率分布，$f_{x^2_{N+2R}}(Z)$ 是具有 $N+2R$ 个自由度的中心 x^2－随机变量的概率密度函数。

5·1·2 非中心学生氏t－分布

设X是有均值 μ 方差 σ^2 的正态随机变量，y/σ^2 为具有n个自由度的 x^2－变量，X与y互相独立，令 $t=\sqrt{n}X/\sqrt{y}$，则t的概

率密度函数为

$$f_t(t|\lambda)=\begin{cases}\dfrac{n^{n/2}\exp\{-\frac{1}{2}\lambda^2\}}{(n+t^2)^{(n+1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \\ 0 & \text{其它,}\end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(((n+j+1)/2)\lambda^j}{j!}\left(\frac{2t^2}{n+t^2}\right)^{j/2},\ -\infty<t<\infty,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot6)$$

其中$\lambda=\mu/\sigma$，这个t的分布便是具有n个自由度和非中心参数λ的非中心t－分布。

5·1·3 非中心F－分布

设随机变量X是一个$x^2_m(\delta^2)$变量，随机变量y是一个x^2_n变量，而且互相独立，令

$$F=\frac{n}{m}\frac{x^2{}_m(\delta^2)}{x^2_n}$$

F便是服从非中心F－分布，它的概率密度函数为

$$f_F(z)=\begin{cases}\dfrac{m}{n}\exp(-\frac{1}{2}\delta^2)\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\delta^2/2)^j\Gamma((m+n)/2+j)}{\Gamma(m/2+j)\Gamma(n/2)} \\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

$$\frac{((m/n)Z)^{m/2+j-1}}{(1+(m/n)Z)^{(m+n)/2+j}}$$

$$Z\geq0;\ \cdots\cdots\cdots(5\cdot7)$$

§5·2 二次型的分布，Cochran定理

定理5·2·1 设$X=(X_1\cdots\cdots X_p)'$是具有均值向量μ和对称正定协方差阵Σ的正态随机向量，设

$$X'\Sigma^{-1}X = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_R \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 8)$$

其中$Q_i=X'A_iX$，A_i的秩为P_i。$i=1,\cdots R$。则Q_i互相独立且遵从具有P_i个自由度和非中心参数为$\mu'A_i\mu$的非中心$x^2_{p_i}(\mu'A_i\mu)$分布，当且仅当$\sum_{i=1}^{R}P_i=P$，这时$\mu'\Sigma^{-1}\mu=\sum_{i=1}^{R}\mu'A_i\mu$

证明，由于Σ是对称正定的，因此存在非奇异阵C使得$\Sigma=CC'$。令$y=C^{-1}X$，显然y遵从以$V=C^{-1}\mu$为均值以I（单位阵）为协方差阵的P－元正态分布。从（5·8）我们得

$$y'y = y'B_1y + \cdots\cdots y'B_Ry \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 9)$$

其中$B_i=C'A_iC$。因为C非奇异，所以$rk(A_i)=rk(B_i)$，$i=1\cdots R$。

显然，如果我们能证明$y'B_iy$ $i=1,\cdots R$互相独立且遵从非中心的x^2－分布$x^2_{p_i}(V'B_iV)$的充要条件是$\sum_{i=1}^{R}P_i=P$而且这时$V'V=\sum_{i=1}^{R}V'B_iV$那么定理也就证明了。

为此，我们假设$Y'B_iY$ $i=1,\cdots R$是互相独立的，分别遵从$x^2_{p_i}(V'B_iV)$分布，则$\sum_{i=1}^{R}Y'B_iY$的分布为非中心的

$x^2_{\sum_{i=1}^{R}p_i}(\sum_{i=1}^{R}V'B_iV)$分布。由于$Y'Y$的分布为$x^2_p(V'V)$而且

五·二

（5·9）成立。从特征函数的唯一性便得到 $\sum_{i=1}^{R} P_i = P$，而且 $V'V = \sum_{i=1}^{R} V'B_iV$。这就证明了定理的必要性部分。

现证充分性。设 $\sum_{i=1}^{R} P_i = P$ 由于 Q_i 是秩为 P_i（B_i 的秩）的 Y 的二次型，由定理1。5。8。Q_i 能表为

$$Q_i = \sum_{j=1}^{p_i} \pm z_{ij}^2 \quad \cdots\cdots (5\cdot 10)$$

其中 z_{ij} 是 $Y_1 \cdots Y_p$ 的线性函数。设

$$z = (z_{11} \cdots z_{1p_1} \cdots z_{R1} \cdots z_{Rp_R})'$$

是一个向量，维数为 $\sum_{i=1}^{R} p_i = P$。则

$$Y'Y = \sum_{i=1}^{R} Q_i = z'\Delta z, \quad \cdots\cdots (5\cdot 11)$$

其中Δ是一个对角线元素为＋1或－1的p×p维对角矩阵。设 $z = AY$ 是把正定二次型 $Y'Y$ 变到 $Z'\Delta' Z$ 的线性变换。由于

$$Y'Y = Z'\Delta Z = Y'A'\Delta AY \quad \cdots\cdots (5\cdot 12)$$

对Y的一切值成立。所以有 $A'\Delta A = I$。也就是说，A是非奇异的，因此 $Z'\Delta Z$ 是正定的。所以 $\Delta = I$，$A'A = I$。由于A是正交阵以及Y服从均值为V协方差阵为I的P维正态分布。Z的分量是相互独立的且服从方差为1的正态分布。所以 Q_i（$i = 1 \cdots R$）是相互独立的 x^2 变量，遵从自由度为 P_i，非中心参数为 $V'B_iV$（$i = 1, \cdots, R$）。但 $Y'Y$ 服从 $x^2_p(V'V)$ 分布。因此

$$V'V = \sum_{i=1}^{R} V'B_iV$$

证完

定理5·2·2（Cochran定理），设$X^{\alpha}=(X_{\alpha 1}\cdots X_{\alpha p})'$ $\alpha=1,\cdots,N$，是来自有均值0和正定协方差阵Σ的P维正态总体的大小为N的随机样本。设

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(X^{\alpha})X^{\alpha'}=Q_1+\cdots+Q_R, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot13)$$

其中$Q_i=\sum_{\alpha\beta=1}^{N}(X^{\alpha})' a^{i}_{\alpha\beta}X^{\beta'}$，$a^{i}_{\alpha\beta}$是秩为$N_i=(i=2\cdots R)$的矩阵$A_i=(a^{i}_{\alpha\beta})$的元素。令$Z^{\alpha}=(Z_{\alpha 1}\cdots Z_{\alpha p})'$，

$\alpha=1\cdots\sum_{i=1}^{R}N_i$是一组有均值0和协方差阵$\Sigma$的P维正态向量，且相互独立。则$Q_i$独立且与

$$\sum_{\alpha=N_1+\cdots+N_{i-1}+1}^{N_1+\cdots+N_i}(Z^{\alpha})(Z^{\alpha})'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot14)$$

有相同分布的充要条件是 $\sum_{i=1}^{R}N_i=N$

证：假设Q_i独立且与（5·14）分布相同，因此$\sum_{i=1}^{R}Q_i$与

$$\sum_{\alpha=1}^{N_1+\cdots+N_k}(Z^{\alpha})(Z^{\alpha})'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot15)$$

同分布。从（5·13），（5·15）和特征函数的唯一性，我们得到 $\sum_{i=1}^{R}N_i=N$。这就证明了必要性。

五〇三

下面证明充分性，我们设 $\sum_{i=1}^{R}N_i=N$，用和定理5·2·1中

相同的方法，我们可断言必存在一个正交矩阵B

$$B=\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_R \end{pmatrix} \text{且} A_i = B_i{}' B_i\text{。}$$

由于$B=(b_{\alpha\beta})$是正交阵，

$$Z^{\alpha}=\sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta} X^{\beta}, \quad \alpha=1, \cdots, N$$

具有均值0协方差阵Σ的相互独立的p维正态变量。容易看出，对$i=1, \cdots, R$，

$$Q_i=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}(X^{\alpha})a^{i}_{\alpha\beta}(X^{\beta})'=\sum_{\alpha=N_1+\cdots+N_{i-1}+1}^{N_1+\cdots N_i}(Z^{\alpha})(Z^{\alpha})'\text{。}$$

证完。

这个定理在把一元方差分析推广到多元方差分析时是有用的。

§5·3 张量积及其性质

定义 若$A=(a_{ij})$是$n\times p$阶（或维）矩阵，$B=(b_{ks})$是$m\times g$阶矩阵，则

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B, & a_{12}B, & \cdots, & a_{1p}B \\ a_{21}B, & a_{22}B, & \cdots, & a_{2p}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}B, & a_{n2}B, & \cdots, & a_{np}B \end{pmatrix} \triangleq (a_{ij}B) \quad (5\cdot3\cdot1)$$

称为A与B的直乘积，简称直积（或义乘），用记号⊗表示。

易见，$A\otimes B$是一个$nm\times pg$阶矩阵。如果将$A\otimes B$视为分块矩阵，那么第(i, j)块为$a_{ij}B$。另外，由

$$\underset{n\times p}{A}=\begin{pmatrix} a'_{(1)} \\ a'_{(2)} \\ \vdots \\ a'_{(n)} \end{pmatrix}=(a_1, a_2, \cdots a_p),$$

于是A$\otimes$B也可写成

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a'_{(1)} & \otimes B \\ a'_{(2)} & \otimes B \\ & \vdots \\ a'_{(n)} & \otimes B \end{pmatrix}=(a_1\otimes B, a_2\otimes B, \cdots, a_p\otimes B)$$

由直积的定义，可导出下面的推论：

推论1。 $0\otimes A=0$ (5·3·2)

其中0表示数零，零向量或矩阵。

推论2。 $(A_1+A_2)\otimes B=(A_1\otimes B)+(A_2\otimes B)$ (5·3·3)

推论3。 $A\otimes(B_1+B_2)=(A\otimes B_1)+(A\otimes B_2)$ (5·3·4)

推论4。 $(a, A)\otimes(bB)=ab(A\otimes B)$ (5·3·5)

推论5。 $(A_1A_2)\otimes(B_1B_2)=(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)$ (5·3·6)

其中A_1A_2，B_1B_2的乘法是可行的。

以上推论直接用定义验证，可得到证明。

推论6。如果A，B两矩阵有逆存在，则$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$

证：

$$\because (A^{-1}\otimes B^{-1})(A\otimes B)=(A^{-1}A)\otimes(B^{-1}B)$$

$$=I_m\otimes I_n=I_{mn}.$$

而 $(A\otimes B)^{-1}(A\otimes B)=I_{mn}$，

$\therefore (A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$。 证毕

推论7。 $(A\otimes B)'=A'\otimes B'$ (5·3·8)

证： 令 $A\otimes B=(a_{ij}B)$

于是 $(A\otimes B)'=(a_{ji}B')$，

而 $A'\otimes B'=(a_{ji}B')$

$\therefore (A\otimes B)'=A'\otimes B'$， 证毕。

下边给出几个有关定理：

定理5·3·1 $tr(\underset{n\times n}{A}\otimes\underset{m\times m}{B})=trA\cdot trB$ (5·3·9)

证：

$$tr\ A\otimes B=tr\begin{pmatrix} a_{11}B, a_{12}B, \cdots, a_{1n}B \\ a_{21}B, a_{22}B, \cdots, a_{2n}B, \\ \\ a_{n1}B, a_{n2}B, \cdots, a_{nn}B \end{pmatrix}$$

$$=tr(a_{11}B+a_{22}B+\cdots+a_{nn}B)$$

$$=a_{11}trB+a_{22}trB+\cdots+a_{nn}trB$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}a_{ii})trB=trA\cdot trB,$$ 证毕。

定理5·3·2 $rk(A\otimes B)=rkA\cdot rk\ B$ (5·3·10)

其中 rk 表示A的秩。

证：设 $rkA=r$，$rkB=s$

于是对矩阵A存在满秩阵 P_1，Q_1，使得

$$A = p_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_r & \\ 0 & & & & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} Q_1 , \quad \lambda_i \neq 0 , \ i = 1, \ 2, \cdots r.$$

对矩阵 B 存在满秩阵 p_2、Q_2，使得

$$B = p_2 \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & 0 \\ & \mu_2 & & & \\ & & \mu_5 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} Q, \quad \mu_i \neq 0 \ \ j = 1, \ 2, \cdots, \ s,$$

$$rk(A \otimes B) = rk\left\{ \left[p_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots \lambda_r & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots 0 \end{pmatrix} Q_1 \right] \otimes \left[p_2 \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \ddots \mu_s & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots 0 \end{pmatrix} Q_2 \right] \right\}$$

$$= rk\left\{ (p_1 \otimes p_2) \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots \lambda_r & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \ddots \mu_s & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots 0 \end{pmatrix} \right] (Q_1 \otimes Q_2) \right\}$$

$$= rk \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots \lambda_r & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \ddots \mu_s & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$
=rk\begin{pmatrix}
\lambda_1\begin{pmatrix}\mu_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & \mu_s & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots\ 0\end{pmatrix} & & & & 0\\
& \lambda_2\begin{pmatrix}\mu_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & \mu_s & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots\ 0\end{pmatrix} & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & \lambda_r\begin{pmatrix}\mu_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & \mu_s & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots\ 0\end{pmatrix} & \\
& & & & 0 \\
0 & & & & & \ddots\ 0
\end{pmatrix}
$$

$=r\cdot s=rkA\cdot rkB$,　　　　　　　　证毕。

定理5·3·3　设Γ_1、Γ_2分别为正交阵，则$\Gamma_1'\otimes\Gamma_2'$仍为正交阵。

证：$(\Gamma_1\otimes\Gamma_2)(\Gamma_1\otimes\Gamma_2)'=(\Gamma_1\otimes\Gamma_2)(\Gamma_1\otimes\Gamma_2)'$

$=(\Gamma_1\Gamma_1')\otimes(\Gamma_2\Gamma_2')=I_1\otimes I_2=I$,　证毕。(5·3·11)

定理5。3。4设A、B为正定阵。可推广为A, B均为实对称

且 $\lambda(A)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $\mu(B)=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & 0\\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_m\end{pmatrix}$

其中λ_i, μ_j分别为A与B的特征根，则$A\otimes B$的特征根为$\lambda_i\mu_j$,

$i=1, 2, \cdots, n$。$j=1, 2, \cdots, m$。若记

$$
\eta(A\otimes B)=\begin{pmatrix}
\lambda_1\mu_1 & & & & & & & 0\\
& \lambda_1\mu_2 & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & \lambda_1\mu_m & & & & \\
& & & & \lambda_2\mu_1 & & & \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & & \lambda_2\mu_m \ddots & \\
0 & & & & & & & \lambda_n\mu_m
\end{pmatrix},
$$

且有　$\eta(A\otimes B)=\lambda(A)\otimes\mu(B)$。

证：∵ A与B正定　　　∴存在正交阵Γ_1、Γ_2

使得

$$A=\Gamma_1'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}\Gamma_1,\quad B=\Gamma_2'\begin{pmatrix}\mu_1 & & & 0\\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_m\end{pmatrix}\Gamma_2,$$

于是　$A\otimes B=(\Gamma_1'\lambda(A)\Gamma_1)\otimes(\Gamma_2'\mu(B)\Gamma_2)$

$=(\Gamma_1'\otimes\Gamma_2')[\lambda(A)\otimes\mu(B)](\Gamma_1\otimes\Gamma_2)$

$$=(\Gamma_1\otimes\Gamma_2)'\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & & & & & & & 0\\ & \lambda_1\mu_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_1\mu_m & & & & \\ & & & & \lambda_2\mu & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda_2\mu_m & \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & \lambda_n\mu_m\end{pmatrix}(\Gamma_1\otimes\Gamma_2),$$

根据定理5·3·3 $\Gamma_1\otimes\Gamma_2$是正交阵，因此$A\otimes B$的特征根为$\lambda_1\mu_1$、$\lambda_1\mu_2\cdots\lambda_1\mu_m$, $\lambda_2\mu_1$, $\cdots\lambda_2\mu_m\cdots\lambda_n\mu_m$。显然有

$\eta(A\otimes B)=\lambda(A)\otimes\mu(B)$　　　证毕。

定理5。3。5　$|\underset{m\times m}{A}\otimes\underset{n\times n}{B}|=|A|^n|B|^m$　　(5.3.13)

证：$|A\otimes B|=|I_mA\otimes BI_n|=|(I_m\otimes B)(A\otimes I_n)|$

$=|I_m\otimes B||A\otimes I_n|$

$$=\begin{vmatrix}B & & 0\\ & B & \\ & & \ddots \\ 0 & & B\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}I_n & a_{12}I_n & \cdots & a_{1m}I_n\\ a_{21}I_n & a_{22}I_n & \cdots & a_{2m}I_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}I_n & a_{m2}I_n & \cdots & a_{mm}I_n\end{vmatrix}_{mn\times mn}$$

$$
=|B|^m \begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \cdots\cdots & a_{1m} & 0 \\
0 & a_{11} & 0 & a_{12} & & 0 & a_{1m} \\
a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \cdots\cdots & a_{2m} & 0 \\
0 & a_{21} & 0 & a_{22} & & 0 & a_{2m} \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
a_{m1} & 0 & a_{m2} & 0 & \cdots & a_{mm} & 0 \\
0 & a_{m1} & 0 & a_{m2} & \cdots & 0 & a_{mm}
\end{vmatrix}
$$

$$
=|B|^m \begin{vmatrix}
\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{matrix} & & 0 \\
& \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{matrix} & \\
0 & & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{matrix}
\end{vmatrix}_{mn\times mn}
$$

$$=|A|^n\;|B|^m,$$

证毕。

例(5。3。1):

设 $X=(X_1\ X_2\ \cdots X_N)'$，其中 $X_\alpha=\begin{pmatrix} x_{\alpha_1} \\ x_{\alpha_2} \\ \vdots \\ x_{\alpha p} \end{pmatrix}$ 相互

独立，具有相同分布 $N_p(\mu, \Sigma)$，

$\alpha = 1, 2, \cdots, N$，则 X 的密度函数为：

$$f(X) = (2\pi)^{-\frac{Np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{N}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha-\mu)'\Sigma^{-1}(X_\alpha-\mu)\} \quad (5.3.14)$$

也可写成：

$$f(X) = (2\pi)^{-\frac{Np}{2}} |I_N \otimes \Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{X}-1\otimes\mu)'(I_N\otimes\Sigma)^{-1}(\overrightarrow{X}-1\otimes\mu)\} \quad (5.3.15)$$

（5．3．14）与（5．3．15）只是表达形式不同。

事实上：

$$|I_N\otimes\Sigma| \overset{(5.3.5)}{=} |I_N|^p|\Sigma|^N = |\Sigma|^N。$$

$$\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha-\mu)'\Sigma^{-1}(X_\alpha-\mu)\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}t_r(X-1\otimes\mu)\Sigma^{-1}(X-1\otimes\mu)'\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}t_r(X-1\otimes\mu)'(X-1\otimes\mu)\Sigma^{-1}\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{X-1\otimes\mu})'(\overrightarrow{X-1\otimes\mu)\Sigma^{-1}}\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{X}-1\otimes\mu)'\overrightarrow{I(X-1\otimes\mu)\Sigma^{-1}}\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{X}-1\otimes M)'(I\otimes\Sigma^{-1})(\overrightarrow{X-1\otimes\mu})\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{X}-\ \otimes\mu)'(I\otimes\Sigma)^{-1}(\overrightarrow{X}-\ \otimes\mu)\}$$

证毕。

其中用到公式：(1) $(\overrightarrow{A})'\overrightarrow{B} = t_r(A'B)$

(2) $\overrightarrow{\sum_{i=1}^{k} a_i X_i} = \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{X_i}$

(3) $\overrightarrow{\underset{m\times p}{A}\ \underset{p\times g}{B}\ \underset{g\times m}{C}} = (A\otimes C')\vec{B}$

§ 5·4 Wishart 分布的推导

Wishart 分布首先由 Fishar(1915) 对 $p=2$ 的情形导出。Wishart(1928) 对一般的 p 给出了此分布的一个几何推导。Ing ham(1933) 从特征函数导出此分布。ELfving(1947)，Hauldan(1955)，和 Olkin 和 Roy(1954) 用矩阵变换导出了样本观察值的Wishert矩阵的Bartlett分解，然后导出了Wishart矩阵的分布。Khrisa gar(1959)用随机正交变换导出了Wishart 分布和Bartlett分解的分布。Srerdrup (1947)用样本空间上的直接积分法导出了Wishart 分布。tlrain(1948) 和 Ogawa(1953) 用的是回归方法，而 Ogawa 的方法则更为漂亮。Rasch(1948) 和 Khatir (1963) 也给出了这个分布的其它推导方法。

定义：若 随机矩阵 A 和 $\sum_{\alpha=1}^{n} Z^{\alpha} Z^{\alpha'}$ 的分布一致。这里 Z^1，Z^2，……Z^n 独立，$Z_i^{\alpha} \sim N_p(\mu_i, \Sigma)$，$i=1, 2\cdots n$。则称 A 服从 n 个自由度的，非中心常数 $\{(\mu_1, \cdots \mu_n)\} = \{M\}$ 的。p 阶非中心 Wishart 分布。记作 $A \sim W_p(n, \Sigma, M)$。

若 $\mu_i = 0$ $(i=1, 2, \cdots n)$ 则这时为中心 Wishart 分布。记作 $W_p(n, \Sigma)$

从定义可见，它是 $p=1$ 情形 χ^2 分布的多维推广。下面就来导出 Wishart 分布的形式：