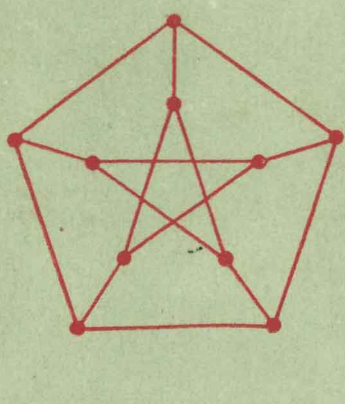
图论与网络最优化

宋增民 编著



东南大学出版社

图论与网络

宋增民 编著

东 南 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书讨论了几个主要的网络最优化问题：最小树，最短路，最优分派，旅行售货员和网络流等问题，和它们在工程网络、车辆调度，公交管理，工程设计，城市规划和优化劳动组合中的应用以及与这些问题有关的图论的基本概念和基本理论．本书深入浅出，清晰易懂，并有适当的例题和习题，便于自学，对于学习和研究图论与网络最优化的读者来说，这是一本较理想的入门书．

本书可作为应用数学、系统工程、管理、计算机应用等专业的高年级学生和研究生教材或教学参考书，也可供从事规划和设计的科技人员参考．

图论与网络最优化

宋增民 编著

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼二号)

南航服务公司印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1／32 印张 8 字数 180 千

1990 年 12 月第一版

1990 年 12 月第一次印刷 印数 1–2000

ISBN 7－81023－401－3

O・40 定价： 3.50元

前　　言

图论是研究离散对象二元关系系统中关系结构的一个数学分支，近几十年来十分活跃，它与拓扑，代数，组合数学等学科关系密切．网络最优化是运筹学中重要的组成部分，它有着深刻的实际背景和广泛的应用．本书的主要目的是介绍几种常用的网络最优化方法．由于图论是网络最优化的理论基础，故介绍最优化方法必须首先介绍有关的图论的基本概念和理论．为此，本书第一章首先介绍了图论的一些基本概念，在第二章至第六章分别介绍最小树，最短路，最优分派问题，中国邮递员问题和旅行售货员问题，网络流问题时，首先介绍有关的图论基础，掌握它们，可以帮助我们理解、掌握和应用这些方法．考虑到平面图理论在电子技术中有着广泛应用，在第七章介绍了平面图的基本理论和平面性算法．本书第八章介绍了几个应用实例，读者可以从中得到一些利用网络最优化方法解决实际问题的技巧．

本书是在原同名讲义的基础上，根据多次教学实践重新整理而成的，它亦包含了一些基本而重要的研究成果．例如，优化劳动组合的数学模型，Hamilton 图的充分条件和车辆调度问题的启发式算法等．

任何一本书，很大一部分应归功于早期的研究者和著作者，这里特别要提到的是田丰和马仲蕃，刘家壮和王建方及 Bondy 和 Murty 的著作．

本书的出版得到许多人的支持和帮助，在此表示衷心的感谢．特别是山东大学谢力同和刘家壮先生，是他们引导我

去研究图论;南京大学张克民先生,他仔细阅读了手稿,并提出了许多有价值的建议.

宋增民

1990年6月

于南京

目　　录

第一章　基本概念

本章首先介绍几个实际问题，然后介绍图与网络的基本概念，它们是以后各章讨论的基础。

§1　几个实际问题

1.1 Konigsberg 七桥问题

在 1736 年, Euler 研究了哥尼斯堡(Konigsberg)七桥问题。这被认为是图论的第一篇论文。在哥尼斯堡城(现在的加里宁格勒)，流贯全城的普雷格尔(Pregel)河两岸和河中两个岛之间架设了七座桥，把河两岸和两个岛连接起来，如图 1-1 所示。当地的居民热衷于这样一个问题：一个散步者能否走过七座桥且每座桥只走过一次，最后回到出发地。

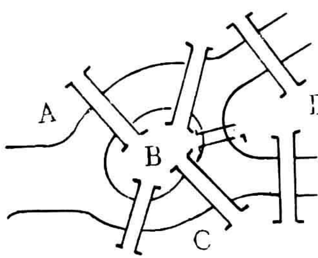


图 1-1

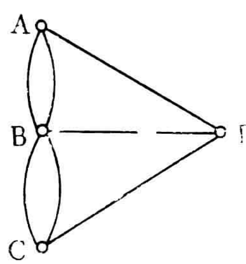


图 1-2

这个问题似乎不难，许多人都作了试验，但总是失败。著名数学家 Euler 把这个问题转化为如图 1-2 所示图形的一

笔画问题：用 A、B、C、D 四点分别表示两岸及两个孤岛，用点和点之间的连线表示对应的桥，问能否从 A、B、C、D 中某一点开始一笔画出这个图形，最后回到该点而不重复．这就使原问题变得简洁明了多了，Euler 证明了这是不可能的．因为图 1-2 中的每个点都只与奇数条线关联，不能保证从一条线进入，从另一条线出去．这个问题的提出虽出自游戏，但它的数学模型有着实际意义，详细的讨论见第五章．由于 Euler 解决了这个问题，故和一笔画有关的问题统称为 Euler 环游问题。

1.2 中国邮递员问题

一个邮递员送信，每次要走遍他负责投递范围内的街道，然后再回到邮局，问他应该按什么样的路线走，使所走的路程最短？

如果用点表示交叉路口，用点之间的连线表示对应的街道，每条线上对应一个实数，它是相应街道的长度，这样就把原问题变成一个图形上的问题．在第五章将会看到，这个问题和 Euler 环游有关．由于这个问题是我国管梅谷教授首先研究的，故国际上通称为中国邮递员问题．

1.3 旅行售货员问题

设有一个售货员从城市 1 出发，到城市 2，3，…，n 去推销货物，最后回到城市 1。假定任意两个城市 i、j 间的距离 $d_{ij}(d_{ij}=d_{ij})$是已知的，问他应沿着什么样的路线走，才能使所走的路线最短？

如果用点表示城市，任意两点之间都用线相连，每一条线都对应到一个实数，其大小表示相应两城市间的距离，这样就把原问题变成一个图形上的问题。

这个问题有着明显的实际意义，除售货员之外，邮局里负责到各个信箱取信的邮递员，及去各个分局送邮件的汽车等都会类似地遇到这个问题。其它还有一些表面上与这个问题无关，但实质上也可归结到这个问题来求解。

1.4 分派问题

在各种计划工作中，经常会碰到这样的问题：设有 n 个工人 x_1，x_2…，x_n，要安排他们从事 m 项工作，并不是所有的工人都能从事任何一项工作，应如何安排，才能最大限度地使工作有人去做？又因为不同的人去做某种工作的效率是不一样的，因而在相同条件下创造的价值也不一样，应如何安排，才能使创造的总价值最大？

如果用 n 个点 x_1，x_2，…，x_n 分别表示这 n 个工人，用 m 个点 y_1，y_2，…，y_m 分别表示这 m 项工作，x_i 和 y_j 有线相连当且仅当工人 i 能够从事工作 j。又若每条线对应一个实数，它是相应的工人去做对应的工作所创造的价值。这样，问题也转化为一个图形上的问题。

这类问题通称为分派问题，将在第四章介绍。

图论和网络最优化的理论和方法，就是从形形色色的具体的图形及有关的实际问题中，抽象出它们的共同性的东西，从中找出其规律、性质、方法，以便再应用到解决各个具体的问题上去。

§2 图与子图

从§1可以看到，现实世界的许多事例可以用图形来描述，这种图形是由一个点的集合以及这个点集中的某些点对

的连线所构成。例如，点可以表示人，连线表示一对朋友；或者，在哥尼斯堡七桥问题中，用点表示两岸或小岛，而连线表示桥，在这种图形中，人们主要感兴趣的是：给定两点是否有一根连线，而连接的方式则无关紧要，这种类型的事例的数学抽象，便产生了图的概念。

定义 设 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是一个非空有限集合，$E(G)=\{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$ 是与 $V(G)$ 不相交的有限集合。一个图 G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \psi_G)$，其中 ψ_G 是关联函数，它使 $E(G)$ 中每一元素(称为边)对应于 $V(G)$ 中的无序元素(称为顶点)对(可以相同)。若 e 是一条边，而 u 和 v 是使得 $\psi_G(e)=uv$ 的顶点，则称 e 连接 u 和 v；顶点 u 和 v 称为 e 的端点。

例 1 设 $V(G)=\{u, v, w, x\}$，$E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，而 ψ_G 定义为：

$$\psi_G(e_1)=uu,\ \psi_G(e_2)=uv,\ \psi_G(e_3)=vw,\ \psi_G(e_4)=vw$$

这时 $G=(V(G), E(G), \psi_G)$ 就是一个图。

采用图这一名称，是因为它们可以用图形来表示，在保持图的顶点和边的关系不变的情况下，图形的位置大小、形状都是无关紧要的。因此，在图的讨论中，我们常画出图的一个几何图形，并且把它作为这个图的本身。图 1-3 就是例 1 中图的一个图形。以后，将用圆圈表示顶点，用线表示边，并且称圆圈为“顶点”或“点”，线为“边”。

图论中的大多数概念都是根据图形表示提出来的。一条边的端点称为与这条边关联；反之，一条边称为与它的顶点关联。与同一条边关联的两个顶点称为相邻的，与同一顶点关联的两条边也称为相邻的。端点重合为一点的两条边也称为相邻的。端点重合为一点的边称为环(如图 1-3 中的 e_1)。

不与任何边关联的顶点称为孤立点(如图 1-3 中的点 x)。

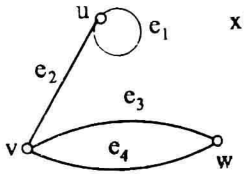


图 1-3

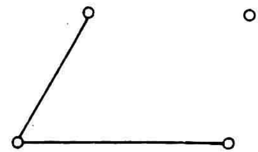


图 1-4

任给图 $G=(V(G), E(G), \psi_G)$，若 $V(G)$ 和 $E(G)$ 都是有限集合，则称为有限图。否则称为无限图。本书只研究有限图。没有任何边的图称为空图; 只有一个点的图称为平凡图; 其它所有图都称为非平凡图。有时我们将图 $G=(V(G), E(G), \psi_G)$简记为 $G=(V(G), E(G))$。

图的顶点数和边数分别用 $\nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 表示。在不致引起混淆的情况下，常用 V, E, ν, ε 代替 $V(G)$, $E(G)$, $\nu(G)$, $\varepsilon(G)$。

设 G 和 H 是任意两个图。如果 $V(G)=V(H)$, $E(G)=E(H)$, $\psi_G=\psi_H$，则称 G 和 H 是恒等的，记为 $G=H$。如果存在 $V(G)$ 和 $V(H)$ 间的 1-1 对应，使保持相邻关系，则称 G 和 H 是同构的，记为 $G\cong H$。如果 $V(H)\subseteq V(G)$, $E(H)\subseteq E(G)$，并且 ψ_H 是 ψ_G 在 $E(H)$ 上的限制，则称 H 是 G 的子图。记为 $H\subseteq G$。若 $H\subseteq G$, $H\neq G$，则称 H 为 G 的真子图，记为 $H\subset G$。G 的生成子图是指满足 $V(H)=V(G)$ 的子图 H。

若连接两个点有不止一条边，称这些边为多重边。没有环、也没有多重边的图称为简单图。任意两个点都相邻的简单图称为完全图，记为 K_ν。从图 G 中删去所有的环、并使每一对相邻点只留下一条边，得到 G 的一个简单生成子

图，称为 G 的基础简单图。图 1−4 是图 1−3 的基础简单图。

给定图 $G=(V, E)$，若 $V'\subseteq V$，$V'\neq\phi$，$E'=\{uv|u, v\in V'\}$，则称图 $G'=(V', E')$为 G 的由 V'导出的子图，简称 G 的导出子图，记为 $G[V']$。导出子图 $G[V\setminus V']$ 记为 $G-V'$。特别，若 $V'=\{v\}$，则简记 $G-\{v\}$ 为 $G-v$。

若 $E'\subseteq E$，$E'\neq\phi$，$V'=\{v\in V|v$ 是 E'中某边的端点$\}$，则称 $G'=(V', E')$为 G 的由 E'导出的子图，简称 G 的边导出子图，记为 $G[E']$。边集为 $E\setminus E'$的 G 的生成子图简记为 $G-E'$。特别地，若 $E'=\{e\}$，把 $G-\{e\}$ 简记为 $G-e$。类似地有 $G+E'$和 $G+e$。

图 1−5 画出了例 1 中图的这些不同类型的子图。

$G[\{v, w\}]$　　　　$G[\{e_1, e_2, e_3\}]$

图 1−5

设 $V'\subseteq V$，所谓在 G 中收缩 V' 是指在图 $G-E(G[V'])$中，把 V' 中的点重合为一个点 (有时称为伪点)，G 中与 V' 的点相关联的边变为与这个新点相关联的边。称这样得到的图为关于 V' 的收缩图。记为 $G\cdot V'$。以后，当我们说在 G 中收缩子图 G'时，就意味着在 G 中收缩 $V(G')$。例如在 G 中收缩边 uv，就是在 G 中收缩 $\{u, v\}$，简记所得的图为 $G\cdot uv$。

设G_1，G_2是 G 的子图，若G_1和G_2没有公共顶点，则称它们是不相交的;若G_1和G_2没有公共边，则称它们是边不重的。G_1和G_2的并图$G_1 \bigcup G_2$是指 G 的一个子图，其顶点集为$V(G_1) \bigcup V(G_2)$，其边集为$E(G_1) \bigcup E(G_2)$；如果G_1和G_2是不相交的，有时记其并图为G_1+G_2。

设 G＝(V， E) 是给定的一个图，从 G 构造另一个图 L(G): 对 G 中的每条边 e_j， L(G) 中有一个点 v_j。点 u_i 和 u_j 在 L(G) 中相邻当且仅当相应的 e_i 和 e_j 在 G 中相邻。称 L(G) 为图 G 的边图。

习　题

1.2.1 从日常生活中举出几个能自然地引出图的例子.

1.2.2 证明: 若 G 是简单图，则$\varepsilon \leqslant \binom{\nu}{2}$等式成立当且仅当 G 是完全图。

1.2.3 证明: 完全图的每个导出子图是完全图.

1.2.4 简单图 G 的补图 G^C是指和 G 有相同顶点集 V 的一个简单图，在 G^C 中两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中不相邻. 画出图 K_n^C.

1.2.5 如果 $G \cong G^C$，则称简单图 G 为自补的，画出 4 个顶点的自补图.

1.2.6 证明: 若G是自补的，则$\nu \equiv 0,1 \pmod 4$.

§ 3　顶点的度

以点 v 为端点的边数称为点 v 的度(或次)，记为 $d_G(v)$。若不产生混淆，也可记为 d(v)，这时环是以两条边

计算的。

令 $\delta(G)=\min_{v\in V}\{d(v)\}$，$\Delta(G)=\max_{v\in V}\{d(v)\}$。称 $\delta(G)$为最小度，$\Delta(G)$为最大度。若 $\delta=k=\Delta$，则称 G 为 k 正则图。显然，完全图是 ($v-1$) 正则图。

定理 1.1 $\sum_{v\in V}d(v)=2\varepsilon$.

证明: 因为 G 的每条边都有两个端点(可以相同)，因此在计算度时，每条边被计算两次(包括环的情形)，因而定理成立。□

度为奇数的点称为奇点，否则称为偶点。

推论 1 在任意图中，奇点的个数为偶数。

证明: 设 V_1 和 V_2 分别是 G 的奇点集和偶点集，则由定理 1.1 知

$$\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)=\sum_{v\in V}d(v)$$

是偶数，而 $\sum_{v\in V_2}d(v)$是偶数，因此，$\sum_{v\in V_1}d(v)$也是偶数，即 $|V_1|$是偶数。

定理 1.2 至少两个顶点的简单图有两个相同度数的顶点。

证明: 设 G 是简单图，$v\geqslant 2$，因为一个顶点至多只能与另外 $v-1$ 个顶点相邻，所以每个顶点的度数不超过 $v-1$，因此，只有下列次数是可能的:

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ v-1$$

但这 v 个数不能同时都作为 G 的顶点的度数。因为，一个度数为 0 的顶点是孤立点，而度数为 $v-1$ 的顶点相邻于其它每一个顶点。因此，只有下列的度数才是可能的:

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-2 \text{ 或 } 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \nu-1$$

不论在哪种情况下，至多有 $\nu-1$ 种不同的度数。因此，这些顶点中当然有一些有相同的度数。□

习　题

1.3.1 证明：$\delta \leqslant 2\varepsilon / \nu \leqslant \Delta$。

1.3.2 证明：由两人或更多的人组成的人群中，总有两人在该人群中恰好有相同的朋友数．

1.3.3 证明：在一个 6 人小组中，总能找到或者三个人互相认识，或者三个人互不相识．

1.3.4 若 G 有顶点 v_1，v_2，…，v_ν。则序列 $(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_\nu))$ 称为 G 的度序列．证明：非负整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是某个图的度序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数。

1.3.5 证明：若 G 是简单图，则 G 的边图有 $\varepsilon(G)$ 个顶点和 $\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}$ 条边．

1.3.6 在一个至少4人的旅游组中，对于其中任意4人，都存在1人，他认识其它 3 人。试证：在任意 4 人中都存在 1 人，它认识这个旅游组中每一个人。

§4　路、圈和连通

在图 G 中，一个有限非空的顶点和边的交替序列 $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$，如果对于每一 i，$1 \leqslant i \leqslant k$，$e_i$ 的端点是 v_{i-1} 和 v_i，则称 W 是从 v_0 到 v_k 的一条途径，或称为一