公共基础课教材

主编◎张治俊

新编高等数学

XINBIAN GAODENG SHUXUE

上

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -ctgx + C$$

$$\int \sec x \cdot tgx dx = \sec x + C$$

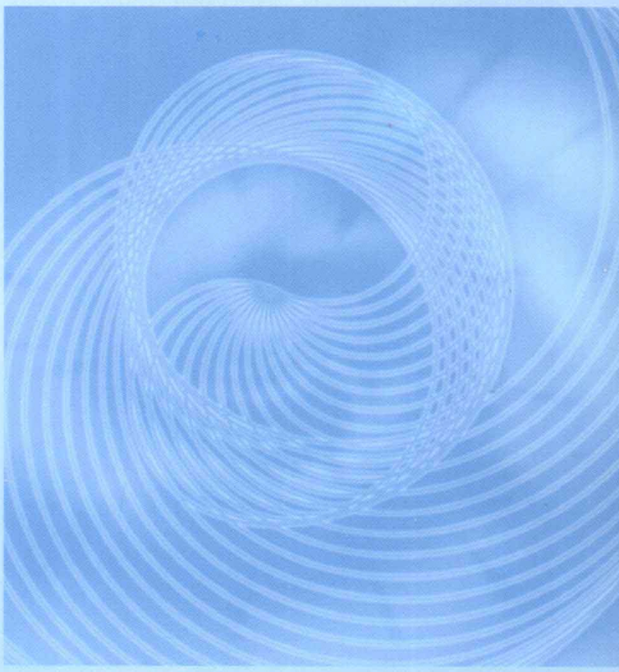
$$\int \csc x \cdot ctgx dx = -\csc x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int shx dx = chx + C$$

$$\int chx dx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

新编高等数学(上)

主　编　张治俊　甘肃畜牧职业学院

杨厚平　湖南科技工业职业技术学院

蒋百华　辽宁工程职业学院

耿玉霞　沈阳师范大学职业技术学院

副主编　王拥军　大连工业大学职业技术学院

李志平　海南软件职业技术学院

邵立凤　大连工业大学职业技术学院

冯金顺　南阳理工学院教育学院

编　委　郭海防　西安工业大学北方信息工程学院

宋家乐　许昌学院

江　华　湖南科技工业职业技术学院

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本教材根据教育部制定的相关文件，本着简明、基础、实用的原则，综合现阶段学生的学习特点及其他相关因素精心编写而成，适用于高等院校理工及经管类各专业的学生。本教材包括：函数与极限、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分与定积分应用、多元函数微分学、二重积分、微分方程、无穷级数、矩阵及其应用、概率统计基础。每节附有精心编制的课堂练习与作业题，每章有综合复习题，并附有参考答案，供师生参考。

通过本教材的学习，可以使学生掌握微积分、线性代数的基础知识、运算方法及应用，为学生学习后继课程和解决实际问题提供必不可少的数学基础知识及常用数学方法，培养运用所学知识分析解决问题的能力及创新意识和自学能力，进而实现发展学生智力，提升就业能力，完善人格修养的教育培养目标。

图书在版编目（CIP）数据

新编高等数学：全2册 / 张治俊主编. —北京：北京邮电大学出版社，2012.6

ISBN 978-7-5635-3055-7

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 092525 号

书　　名：新编高等数学（上）
作　　者：张治俊
责任编辑：毋燕燕
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号（邮编：100876）
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市平谷县早立印刷厂
开　　本：787mm×1 092mm　1/16
印　　张：11
字　　数：214 千字
印　　数：1—3 000 册
版　　次：2012 年 6 月第 1 版　2012 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3055-7　　定　价：25.80

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前言

高等数学是高等院校各专业必修的一门重要基础课程，对培养大学生的思维品质、创造能力、科学精神以及利用数学知识分析解决实际问题的能力，具有极其重要的作用。

本教材根据教育部制定的相关文件，本着简明、基础、实用的原则，综合现阶段学生的学习特点及其他相关因素精心编写而成，适用于高等院校理工及经管类各专业的学生。在编写中力求做到以下几点。

1.以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，坚持以应用为目的，以“必需、够用”为度的原则，以提高学生的综合能力为指导思想，以培养高素质的技能型人才为根本任务。

2.适当选材，由浅入深，循序渐进。不过于追求数学体系的逻辑性及理论的完整性，突出基本概念和定理的几何背景和实际应用背景的介绍；强调基本概念的理解，而不注重概念的抽象性；强调基本理论的实际应用，而不强调理论的证明技巧；强调基本计算方法的运用，而不追求运算的技巧。

3.在每节开始部分引入知名数学家的格言警句，每章后有与本部分知识相关的数学家传记或数学史阅读材料，并恰当引入高等数学在现代科技领域中的应用。以丰富的数学史料为载体，贴近生活的数学应用为触角，结合相关案例的引入，尝试在数学课程中进行数学文化思想的渗透。

4.叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性，便于自学；注重用语确切，行文严谨。有利于学生严谨的学习态度、良好的学习习惯、一定的数学修养的形成。

5.具有精心制作的配套多媒体课件，方便老师上课及学生学习使用。

本教材包括：函数与极限、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分与定积分应用、多元函数微分学、二重积分、微分方程、无穷级数、矩阵及其应用和概率统计基础。每节附有精心编制的课堂练习与作业题，每章有综合复习题，并附有参考答案，供师生参考使用。

通过本教材的学习，可以使学生掌握微积分、线性代数和概率统计的基础知识、运算方法及应用，为学生学习后继课程和解决实际问题提供必不可少的数学基础知识及常用数学方法，培养运用所学知识分析解决问题的能力及创新意识和自学能力，进而实现发展学生智力，提升就业能力，完善人格修养的高等院校教育培养的目标。

由于水平所限，时间也比较仓促，本书难免有不足错误之处，敬请读者斧正。

编　者

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第1章　函数与极限

高等数学研究的对象是函数，主要是初等函数，研究的工具是极限. 本章我们将在对函数概念进行复习和补充的基础上介绍函数极限的概念,求极限的方法以及函数的连续性.

§1—1 函 数

> 读史使人明智，读诗使人灵秀，数学使人周密.
>
> ——培根

一、函数概念

1. 函数的发展

近代数学本质上可以说是变量数学，而变量数学的里程碑是解析几何的创立，解析几何的基本思想是在平面上引进所谓的坐标的概念，以此在平面上的点和有序实数对之间建立了一一对应关系. 解析几何的发明归功于两位法国数学家笛卡尔(R. Descartes, 1596—1650)和费马(P. de Femat, 1601—1665).

"函数"一词最初是由德国数学家莱布尼兹(G. W. Leibniz, 1646—1716)在1692年开始使用.

1734年，瑞士数学家欧拉(L. Euler, 1707—1783)引入了函数符号"f(x)"，并称变量的函数是一个解析表达式，认为函数是由一个公式确定的数量关系. 但当时的函数概念仍然是比较模糊的.

1837年，德国数学家狄利克莱(P. G. L. Dirichlet, 1805—1859)提出："如果对于x的每一个值，y总有一个确定的值与之对应，则y是x的函数". 这个定义比较清楚地说明了函数的内涵.

1859年，清代数学家李善兰(1811—1882)第一次将"function"译成"函数".

19世纪70年代以后，随着集合概念的出现，函数概念得以用更严谨的语言来表达.

2. 函数的定义及表示法

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$.

这里 x 称为自变量，y 称为因变量或函数，集合 D 称为函数的定义域，相应的 y 值的集合称为函数的值域，f 是函数符号，表示 y 与 x 的对应规则，有时函数符号也可用其他字母来表示，如 $y = g(x)$ 或 $y = \varphi(x)$ 等.

函数的表示法通常有三种：公式法、表格法和图形法.

(1) 以数学式子表示函数的方法叫公式法，如 $y = x^2$，$y = \cos x$，公式法的优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式表示函数的方法叫表格法，它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如三角函数表、对数表等，表格法的优点是所求的函数值容易查得.

(3) 以图形表示函数的方法叫图形法或图像法，这种方法在工程技术上应用很普遍，其优点是直观形象，可看到函数的变化趋势.

3. 分段函数

在实际应用中经常会遇到一类函数，在定义域的不同区间用不同的式子来表达，这类函数称为分段函数. 例如，

(1) 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

(2) 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(3) 取整函数 $y = [x] = n$(当 $n \leqslant x < n+1, n \in z$). 根据取整函数的定义可以看出，记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[4.8] = 4$，$[0.6] = 0$，$[-7.3] = -8$，$[-5] = -5$ 等.

上述三个函数的图像如图 1-1-1 所示.

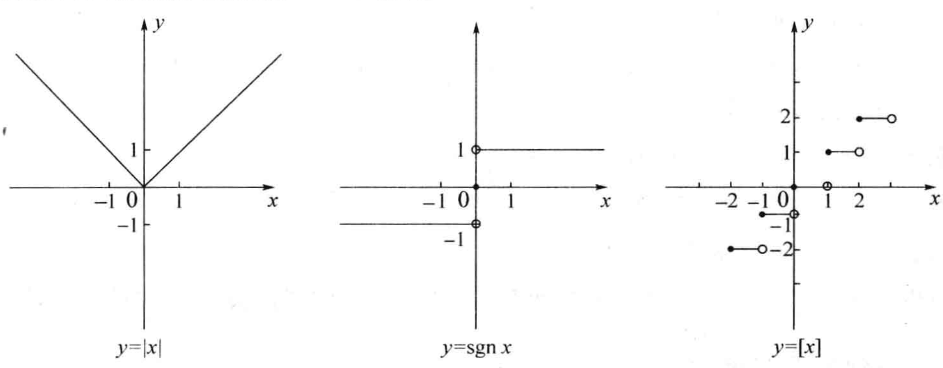


图 1-1-1

对于分段函数我们要能够正确求其定义域及自变量为 x_0 时对应的函数值，下面举例说明.

例 1 分段函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \leqslant x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 3-x, & 0 < x < 3, \end{cases}$ 的定义域为 $[-2, 3)$.

这也即是说分段函数的定义域为各段定义域的并集.

例 2 设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ x^2-6x+\dfrac{19}{2}, & 2\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

求解:(1)$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$;　　(2)$f(1)$;

(3)$f(3)$;　　(4)$f(4)$.

解(1)$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$;　　(2)$f(1)=1$;

(3)$f(3)=3^2-6\times 3+\dfrac{19}{2}=\dfrac{1}{2}$;　　(4)$f(4)=4^2-6\times 4+\dfrac{19}{2}=\dfrac{3}{2}$.

4. 反函数

定义 1.2 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数,其值域为 R,如果对于 R 中的每一个 y 值,都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应,则得到一个定义在 R 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数,我们称之为 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,并称 $y=f(x)$ 为直接函数.

显然,由定义可知,单值函数一定有反函数.习惯上,我们总是用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

从上面的定义容易得出,求反函数的过程可分为两步:第一步,从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$;第二步交换字母 x 和 y.

例 3 求 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

解 由 $y=2^{x-1}$ 解得 $x=1+\log_2 y$,然后交换 x 和 y,得 $y=1+\log_2 x$,即 $y=1+\log_2 x$ 是 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

可以证明,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

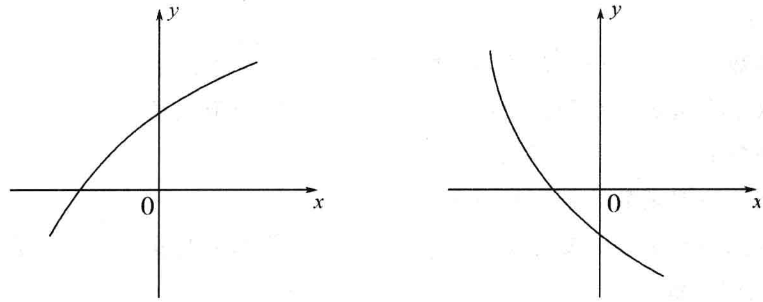
二、函数的几种特性

1. 单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的,区间 I 称为函数 $y=f(x)$ 的一个单调增加区间.如果对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的,区间 I 称为函数 $y=f(x)$ 的一个单调减少区间.单调增加和单调减少函数统称为单调函数.

单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升,单调减少函数的图形沿 x 轴正向逐渐下

降，如图 1-1-2 所示.



(a) 单调增加函数　　(b) 单调减少函数

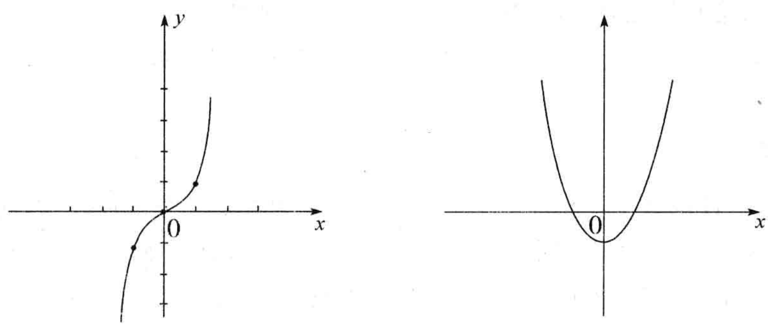
图 1-1-2

例如，函数 $f(x)=x^2+1$ 在区间 $[0,+\infty)$ 是单调增加的；在区间 $(-\infty,0]$ 是单调减少的. 又如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

2. 奇偶性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$），如果对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数；如果对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-1-3 所示.



(a) 奇函数　　(b) 偶函数

图 1-1-3

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=x\cos x$ 等都为奇函数；$y=x^2$，$y=\cos x$，$y=\sqrt{1-x^2}$ 等都为偶函数.

经常会遇到一些常见函数及其奇偶性的判定，现将常见奇(偶)函数及其运算性质归纳如下：

奇函数：$\sin x$，$\arcsin x$，$\tan x$，$\arctan x$，$\dfrac{1}{x}$，x^{2n+1} $(n\in\mathbf{N})$，...

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

偶函数：$\cos x$，$|x|$，$x^{2n}(n \in \mathbf{N})$，$e^{|x|}$，e^{x^2}，...

奇(偶)函数有如下运算性质：

(1) 奇函数的代数和仍是奇函数，偶函数的代数和仍是偶函数；

(2) 奇数个奇函数的乘积是奇函数，偶数个奇函数的乘积是偶函数；

(3) 偶函数的乘积仍是偶函数；

(4) 奇函数与偶函数的乘积是奇函数；

(5) 奇函数与奇函数的复合是奇函数，奇函数与偶函数的复合是偶函数，偶函数与偶函数的复合是偶函数.

例 4 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y = x^3 + \tan x$；　　(2) $y = x\sin x$；

(3) $y = x^3 \tan x \cdot e^{x^2}$；　　(4) $y = \sin(\sin x)$；

(5) $y = \cos(\sin x)$；　　(6) $y = \cos^2 x$.

解 根据常见奇(偶)函数及其运算性质可知，(1)，(4) 为奇函数；(2)，(3)，(5)，(6) 为偶函数.

3. 周期性

定义 1.5 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的实数 T，使得对于任意的 $x \in D$，都有 $(x \pm T) \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $y = f(x)$ 为周期函数，T 称为它的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y = \tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

4. 有界性

定义 1.6 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正常数 M，使得对于任意的 $x \in D$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界. 如果不存在这样的正常数 M，即对任意的正常数 M，都存在某个点 $x_0 \in D$，使得 $|f(x_0)| > M$，则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上无界.

例如，函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，因为对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，都有 $|\sin x| \leqslant 1$.

又例如，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

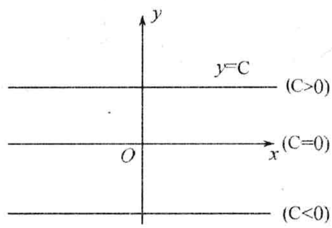
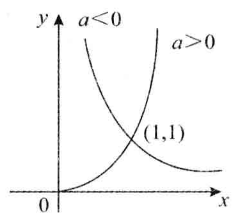
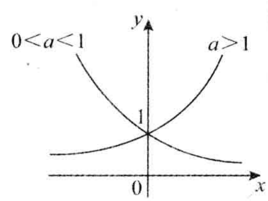
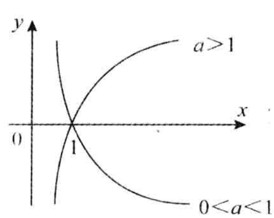
三、初等函数

1. 基本初等函数

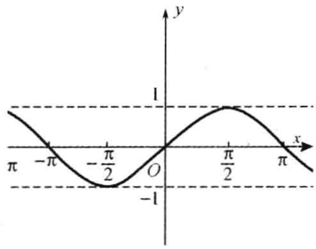
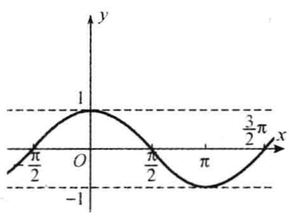
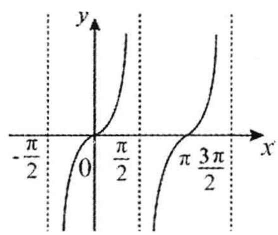
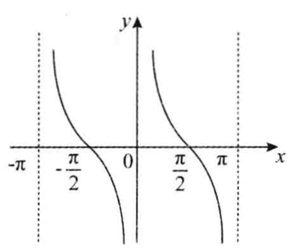
我们在中学学习过的六大类函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数

和反三角函数统称为基本初等函数. 为了便于应用，下面对其图像和基本性质作简单复习.

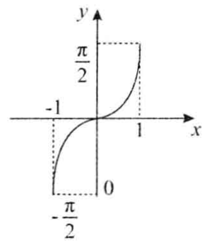
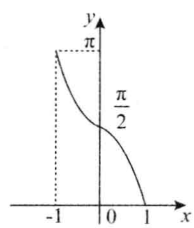
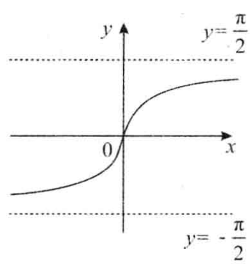
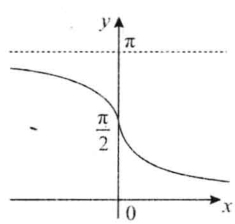
表 1-1　基本初等函数及图像和性质

函数	图像	性质
常数函数 $y=C$		一条平行于 x 轴且截距为 c 的直线，偶函数.
幂函数 $y=x^a$		在$(0,+\infty)$内总有定义， 当 $a>0$ 时函数图像过点$(0,0)$和$(1,1)$，在$(0,+\infty)$内单调增加且无界； 当 $a<0$ 时函数图像过点$(1,1)$，在$(0,+\infty)$内单调减少且无界.
指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$		单调性： 当 $0<a<1$ 时，在$(-\infty,+\infty)$单调减少； 当 $a>1$ 时，在$(-\infty,+\infty)$单调增加. 奇偶性：非奇非偶函数. 周期性：非周期函数. 有界性：无界函数.
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$		单调性： 当 $0<a<1$ 时，在$(0,+\infty)$单调减少； 当 $a>1$ 时，在$(0,+\infty)$单调增加. 奇偶性：非奇非偶函数. 周期性：非周期函数. 有界性：无界函数.

续表

三角函数	正弦函数 $y=\sin x$		单调性： 在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$上单调增加； 在$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$上单调减少. 奇偶性：奇函数. 周期性：周期函数 $T=2\pi$. 有界性：有界函数.
	余弦函数 $y=\cos x$		单调性： 在$[(2k-1)\pi,2k\pi]$上单调增加； 在$[(2k\pi,(2k+1)\pi]$上单调减少. 奇偶性：偶函数. 周期性：周期函数 $T=2\pi$. 有界性：有界函数.
	正切函数 $y=\tan x$		单调性： 在$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$内单调增加. 奇偶性：奇函数. 周期性：周期函数 $T=\pi$. 有界性：无界函数.
	余切函数 $y=\cot x$		单调性：在$(k\pi,(k+1)\pi)$内单调减少. 奇偶性：奇函数. 周期性：周期函数 $T=\pi$. 有界性：无界函数.

续表

反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$		单调性:在$[-1,1]$上单调递增. 奇偶性:奇函数. 周期性:非周期函数. 有界性:有界函数.
	反余弦函数 $y=\arccos x$		单调性:在$[-1,1]$上单调减少. 奇偶性:非奇非偶函数. 周期性:非周期函数. 有界性:有界函数.
	反正切函数 $y=\arctan x$		单调性:在$(-\infty,+\infty)$内单调增加. 奇偶性:奇函数. 周期性:非周期函数. 有界性:有界函数.
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		单调性:在$(-\infty,+\infty)$内单调减少. 奇偶性:非奇非偶函数. 周期性:非周期函数. 有界性:有界函数.

另外,三角函数中还有正割函数$y=\sec x$和余割函数$y=\csc x$,对于这两个函数我们不作详细讨论,只需知道它们分别为$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$和$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

2. 复合函数

定义 1.7 已知函数$y=f(u)$与$u=g(x)$,其中$f(u)$的定义域为$D(f)$,$g(x)$的值域为$R(g)$,如果$g(x)$的值域与$f(u)$的定义域的交集非空,则称函数$y=f[g(x)]$为函数$y=f(u)$与$u=g(x)$构成的复合函数,其中x为自变量,y为因变量,u为中间变量.

例如，$y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 构成复合函数 $y=\sin^2 x$；$y=\ln u$，$u=v^2$ 与 $v=7x+8$ 构成复合函数 $y=\ln(7x+8)^2$ 等.

利用复合函数的概念，可以将一个较复杂的函数“分解”成几个简单函数的复合，这样更便于对函数进行研究.

例 5 讨论下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin 5x$； (2) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$.

解 (1) $y=\sin 5x$ 可以看成是由 $y=\sin u$，$u=5x$ 两个函数复合而成.

(2) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 可以看成是由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 三个函数复合而成.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的能用一个式子表达的函数，称为初等函数.

例如，$y=e^{\cos x}+7x^2$，$y=\sqrt{\ln(x^2+1)}$，$y=3^{\tan\frac{1}{x}}$ 等都是初等函数.

分段函数一般不是初等函数，例如，符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 不是初等函数，绝对值函数 $y=|x|$ 虽可分段表示，但由于 $|x|=\sqrt{x^2}$，故它仍是初等函数. 在今后的学习过程中，我们所讨论的函数大多是初等函数.

课堂练习与作业

1. 下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数？

(1) $x+\sin^3 x$； (2) $x^2\cos x$； (3) $\sin x^2$； (4) $\dfrac{\sin x}{x}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & x<1,\\ 0, & x\geqslant 1,\end{cases}$

求：(1) $f(1)$； (2) $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$； (3) $f(\pi)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<2,\\ (x-2)^2, & 2\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的定义域.

4. 在以下各题中，将 y 表示为 x 的函数：

(1) $y=u^2$，$u=\lg t$，$t=\dfrac{x}{2}$； (2) $y=\sqrt{u}$，$u=\cos t$，$t=2^x$.

5. 讨论下列函数的复合过程：

(1) $y=\arctan[\lg(x-1)]$；　　(2) $y=2^{\cos(x^2-5)}$.

§1—2　函数的极限

只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就非常缓慢，它们的应用就非常狭窄，但是，当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取对方的新鲜活力，并迅速地趋于完善.

——拉格朗日

一、悠久的极限思想

1. 庄子的极限思想

《庄子·天下篇》中说"一尺之锤，日取其半，万世不竭". 看似容易理解，其实短短的12个字包含了丰富的内容，庄子已经认识到这是一个走向极限"0"的过程. 虽然"一尺之锤"越截越短，但剩下的锤的长度永远不为0，而又无限逼近0，即极限为0.

2. 刘徽的割圆术

魏晋时代的数学家刘徽在《九章算术》中利用割圆术证明了圆面积的精确公式，并给出了计算圆周率的方法. 刘徽以"割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣."来总结这种方法，其中也在无形中利用了极限的思想.

2. 芝诺悖论

公元前450年，古希腊有个大诡辩家叫芝诺，他是当时哲学家巴门尼德的学生、埃利亚学派的主要人物. 他曾经提出多个悖论，不论在哲学史上，还是在逻辑史上、数学史上，都有重要的贡献.

其中，有个著名的阿基里斯悖论：

在希腊神话中，阿基里斯是跑的最快的人，但芝诺却断言，阿吉里斯永远追不上乌龟. 他假设的条件是，阿基里斯的速度是10米/秒，乌龟爬行速度1米/秒，而且让阿基里斯站在乌龟后面100米处，然后同时开始跑.

显然，阿基里斯的速度是乌龟的10倍，应该很快追上乌龟，但芝诺认为不可能，其分析如下：

当阿基里斯走完100米时，乌龟又向前爬了10米；

当阿基里斯再走完10米时，乌龟又向前爬了1米；

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com