高等学校教材

高等数学

上册

刘坤　沈京一　许定亮　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

上册

Gaodeng Shuxue

刘　坤　沈京一　许定亮　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

作者在多年教学实践的基础上，根据最新制定的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"编写了本书.

本书分上、下两册. 上册内容为函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等六章. 为便于同中学内容衔接，书后附有一些常用的中学数学公式、几种常用的曲线，以及积分表、习题答案与提示. 本书以应用为主，内容丰富，层次清晰，语言通俗，深入浅出，简明扼要，便于学生自学.

本书可作为应用型本科院校工科类和农林医类各专业的高等数学教材，也可作为教学参考书和考研用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册/刘坤,沈京一,许定亮编. -- 北京:
高等教育出版社, 2013.6

ISBN 978-7-04-037295-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… ②沈… ③许… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 084371 号

策划编辑 张彦云　责任编辑 张彦云　封面设计 张申申　版式设计 王　莹
插图绘制 邓　超　责任校对 刘娟娟　责任印制 尤　静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 三河市华润印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 12
字　　数 220 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2013 年 6 月第 1 版
印　　次 2013 年 6 月第 1 次印刷
定　　价 18.10 元

物 料 号　37295-00

前　言

近十年来，我国的高等教育已逐渐从“精英教育”走向“大众化教育”，一批应用型本科院校应运而生，这就要求编写一本适应时代要求、有特色、高质量、切合应用型本科院校教学实际的高等数学教材。本书是作者根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，在多年从事高等数学教学的基础上编写而成的。

本书在内容安排和难易程度上充分考虑了大众化教育背景下的学生特点，既删除了较艰深的理论推导，又保持了理论体系的连贯性和完整性，以便为学生继续深造和考研打好基础；在编写时注重数学思想的渗透和数学方法的介绍，注重应用，着重培养学生的逻辑能力、应用能力和创新思维能力。本书结构严谨，深入浅出，例题丰富，便于自学。

全书分上、下两册，上册包括函数、极限与连续、一元函数微积分及其应用，下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程，书后附习题答案与提示。本书适用于应用型本科院校工科类各专业，亦可供农林医类专业选用。

本书由刘坤、沈京一、许定亮编写，其中上册第一章、第三章、第四章、第五章、第六章由刘坤编写，第二章由许定亮编写；下册第七章由沈京一编写，第八章、第九章、第十章、第十二章由刘坤编写，第十一章由许定亮编写。上、下两册均由刘坤编写大纲并统稿。

在本书的编写过程中，得到了高等教育出版社的鼎力协助，编辑为此付出了辛勤的劳动，同时也得到了常州工学院教务处和理学院领导的大力支持，在此向他们深表谢意！

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，望广大读者和同行专家批评指正。

编者

2013 年 2 月

目　　录

第一章　函　　数

高等数学是研究变量的数学,变量之间的依赖关系就是函数关系.在中学数学中我们已经初步讨论了函数,本章将对函数的概念和性质作进一步深入的讨论.

§1.1　函　　数

一、常用数集与符号

1. 常用数集

在中学我们已经学习过集合的概念,这里列出几个常用的数集.

(1) 自然数的集合,记作 $\mathbf{N}$,即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

(2) 全体正整数的集合,记作 $\mathbf{N}^+$,即

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

(3) 全体整数的集合,记作 $\mathbf{Z}$,即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

(4) 全体有理数的集合,记作 $\mathbf{Q}$,即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\},$$

$\mathbf{Q}^c$ 为全体无理数的集合.

(5) 全体实数的集合,记作 $\mathbf{R}$;排除 0 的实数集合,记作 $\mathbf{R}^*$;全体正实数的集合,记作 $\mathbf{R}^+$.

(6) xOy 平面上全体点的集合,记作 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$,即

$$\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}.$$

2. 几个符号的说明

(1) 符号"$\Rightarrow$"表示"推出".例如,由 A"推出"B,表示为 $A\Rightarrow B$.

(2) 符号"$\Leftrightarrow$"表示"等价",即两个结论可相互"推出".例如,$A\Leftrightarrow B$ 表示由 A 可推出 B,反过来,由 B 也可推出 A.

(3) 符号"$\forall$"表示"对于任意给定的"或"对于每一个".

(4) 符号"$\exists$"表示"存在".

(5) 符号"[　]"表示取不超过某实数的最大整数部分,即若设 x 为任一实

数，不超过 x 的最大整数部分为 $[x]$．例如，$[0.5]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-3.8]=-4$.

二、常量与变量

我们在观察自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不变，也就是保持一定的数值，称其为**常量**；有的量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，称其为**变量**. 例如，在计算圆的面积公式 $S=\pi R^2$ 中，圆周率 π 是常量，而对于不同的圆，半径 R 是变量；又如，一天中的气温、生产过程中的产量都是不断变化的，它们都是变量.

常量与变量的确定依赖于所研究的过程，同一个量在不同的过程中可能是常量，也可能是变量. 例如，某种商品的价格在一段时间内是常量，而在较长时间内则可能是变量.

常量也可看作是一种特殊的变量.

常量通常用 a,b,c 等表示，而变量通常用 x,y,z 等表示。

三、区间与邻域

1. 区间

变量的变化范围一般是一个集合. 设有变量 x，a 和 b 都是实数，且 $a<b$.

集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间的端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$.

集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间的端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

类似地有，

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\} \text{ 和 } (a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\},$$

$(a,b]$ 和 $[a,b)$ 都称为**半开区间**.

以上所述区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为区间的长度. 此外还有所谓**无穷区间**，例如区间

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}.$$

记号“$-\infty$”读作负无穷大，记号“$+\infty$”读作正无穷大，它们的具体定义将在第二章中介绍.

2. 邻域

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为以点 a 为中心、以 δ 为半径的**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

显然 $U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}$.

如不强调邻域的半径,则以点 a 为中心的邻域记作 $U(a)$.

有时需要把邻域中心去掉,点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为**点 a 的去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

四、函数

1. 函数的基本概念

在我们所研究的某个变化过程中,常会同时出现几个变量,这些变量并不是彼此独立变化的,而是相互影响和相互制约的,一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化. 如果这些变化是依照某一规则的,则我们常说这些变量之间存在着函数关系.

定义 1.1　设 x,y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集,如果对于每个 $x\in D$,变量 y 按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的一个值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为这个函数的定义域,记作 D_f,亦即 $D_f=D$.

在函数定义中,记号 f 是 x,y 之间的对应法则,同时也理解为由它确定的函数 f. 对于每一个 $x\in D$,唯一确定的值 $y=f(x)$ 称为函数 f 在 x 处的函数值,函数值的全体 $\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**,记作 R_f 或 $f(D)$.

2. 函数值的说明

当自变量 x 取定义域中某个值 x_0 时,由函数定义知对应的因变量的值称为函数值,记作

$$f(x_0)\text{或 }y\big|_{x=x_0}.$$

例如对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,有 $f(0)=1,f(u+1)=\dfrac{1}{1+(u+1)^2},y\big|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$ 等.

在定义 1.1 中,对自变量 x 的一个确定的取值,y 只能有唯一一个值与之对应,我们称这种函数为**单值函数**,简称函数. 若对自变量 x 的一个确定的取值有多个 y 值与之对应,则称这种函数为**多值函数**. 多值函数不是定义 1.1 意义下的函数. 例如,由关系式 $y^2=x$ 所确定的 y 关于 x 的函数就是一个多值函数,可将其分解成两个单值函数:

$$y=\sqrt{x},x\in[0,+\infty)\text{和 }y=-\sqrt{x},x\in[0,+\infty).$$

例 1.1　设 $f(x)=2^{x-2}$,求 $f(2),f(0),f\left(\dfrac{5}{2}\right),f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

解 $f(2)=2^{2-2}=2^0=1$, $f(0)=2^{0-2}=\dfrac{1}{4}$, $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}-2}=\sqrt{2}$, $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=2^{\frac{1}{a}-2}$.

3. 函数的三要素

由函数定义可知,一个函数 $y=f(x)$ 是由自变量的取值范围和函数的对应法则两个因素确定的,而函数值的范围也非常重要,因此我们将其统称为函数的三要素:

(1) 定义域,即自变量的取值范围 D;

(2) 对应法则 f;

(3) 值域,即函数值的集合 $f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$.

对于两个函数,如果它们的定义域和对应法则都相同,那么这两个函数就是相同的. 反过来,以上三条,只要有一条不同,两个函数就不相同.

例 1.2 判断下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

(1) $f(x)=(\sqrt{x})^2$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$, $g(x)=\sin x$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$, $g(x)=x\sqrt[3]{1+x^2}$.

解 (1) 因为 $D_f=(0,+\infty)$, $D_g=(-\infty,+\infty)$,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不同,

(2) 虽然 $D_f=D_g=\mathbf{R}$,但值域不同,R_f 只取正值,而 R_g 可正可负. 实际上,

$$f(x)=|\sin x|\neq\sin x=g(x).$$

(3) 因为定义域与函数关系均相同,所以 $f(x)=g(x)$.

4. 函数的定义域

在研究函数时,必须注意函数的定义域. 函数的定义域通常按以下两种情形来确定:

(1) 对于实际应用问题中的函数,要根据变量的实际意义来确定.

例如,有一边长为 $a(a>0)$ 的正方形铁片,从四个角各剪去边长为 x 的小正方形,做成一个无盖铁盒,其体积 V 是 x 的函数,即

$$V=x(a-2x)^2,$$

考虑本问题的实际意义,函数的定义域应为 $D=\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$. 这种情况一定要在函数后表示出其定义域.

(2) 对于用数学式子表示的函数,这种函数的定义域通常是使数学式子有意义的一切实数组成的集合,此时,我们可以不必表示出定义域,而直接用"$y=f(x)$"来表示函数. 例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$.

例 1.3 确定函数

$$y=\frac{\sqrt{5-x}}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$$

的定义域.

解　要使表达式有意义,必须满足

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\5-x\geqslant 0,\\x+2\geqslant 0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x\neq \pm 1,\\x\leqslant 5,\\x\geqslant -2.\end{cases}$$

故函数的定义域为

$$D=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,5].$$

例 1.4　确定函数 $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解　要使表达式有意义,必须满足

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}>0,\\x+2\geqslant 0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x<1,\\x\geqslant -2,\end{cases}$$

故函数的定义域为 $D=[-2,1)$.

5. 函数的表示方法

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法.

(1) 表格法

表格法是用表格形式来表示自变量和因变量的函数关系,它在生产实际中应用广泛. 例如,某市场一年中各月毛线的零售量(单位:kg)列表如下:

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 Q	91	85	50	43	12	10	9	23	123	154	178	123

它表示毛线的零售量 Q 随月份 x 而变化的函数关系,其定义域为 $D=\{1,2,\cdots,12\}$,值域为$\{91,85,50,43,12,10,9,23,123,154,178,123\}$.

(2) 图形法

图形法是用坐标平面上的图形来表示函数. 坐标平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形(图 1-1).

(3) 解析法

解析法就是将自变量与因变量之间的关系用方程表示. 这些方程通常称为函数的解析表达式. 例如,$y=\cos x-\lg(1+x)$,$y+\sin y=x^2\cos x$ 和 $y=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\1-x,x<0\end{cases}$ 都是函数的解析表达式. 它们分别代表了三种不同类型的函数:

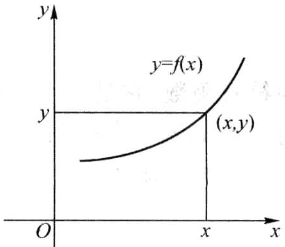

图 1-1

1°　函数 $y=f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间

的对应关系，这种函数表达方式的特点是：等号左端是因变量，而右端是含有自变量的式子，当自变量取定义域内任一值时，由该式能确定对应的函数值. 用这种方法表达的函数叫做**显函数**. 例如，函数 $y=\cos x-\lg(1+x)$，$y=e^x$，$y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$等都是显函数.

2° 函数 $y+\sin y=x^2\cos x$，y 没有由 x 的解析式直接表示出来，而是由两个变量 x,y 的方程给出，称这种形式的函数为隐函数. 一般地，若一个函数的自变量 x 和因变量 y 的对应关系是由一个方程 $F(x,y)=0$ 来确定的，则称这个函数为**隐函数**.

显函数也可被看成一种特殊的隐函数. 将隐函数化成显函数的过程，称为函数的**显化**. 但并不是所有的隐函数都能化成显函数. 例如，隐函数 $y+\sin y=x^2\cos x$ 就不能显化，而隐函数 $y+2ye^{2x}-5=0$ 就可以显化.

3° 函数 $y=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ 1-x, x<0,\end{cases}$ y 在定义域的不同范围具有不同的解析表达式，这种函数称为**分段函数**. 应该注意的是，分段函数是用几个解析式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数.

4° 若变量 x 与 y 之间的函数关系是通过参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases} \quad t\in T$$

给出的，这样的函数称为**由参数方程确定的函数**，简称**参数式函数**，t 称为**参数**.

例如，物体作斜抛运动时，运动轨迹的位移函数就可以写成参数式函数

$$\begin{cases}x=v_0t\cos\alpha,\\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2,\end{cases}$$

其中 α 为初速度$\boldsymbol{v}_0$与水平方向的夹角，$v_0=|\boldsymbol{v}_0|$.

例 1.5 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

称为**符号函数**，它是一个分段函数，定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，如图 1-2 所示. 对任何实数 x，有 $|x|=x\operatorname{sgn} x$.

例 1.6 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，如图 1-3 所示，这个函数称为**绝对**

值函数.

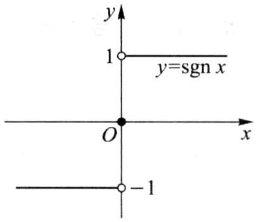

图 1-2

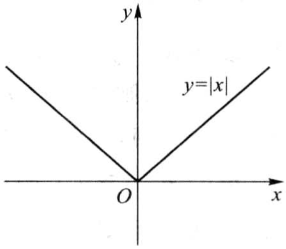

图 1-3

§1.2　函数的几种特性

一、函数的有界性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义，如果存在数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有上界的；如果存在数 m，对于所有的 $x\in D$，恒有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 D 上是有下界的.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有上界也有下界，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内有下界而无上界.

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义，如果存在正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的；如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\sin x|\leqslant 1$，故函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 对于有界函数，其界 M 的取法不唯一，对于 $f(x)=\sin x$，可取任何大于等于 1 的数作为 M 而使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立.

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于区间 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立，但函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界，如可取正数 $M=1$，而有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ 对任意 $x\in(1,2)$ 都成立.

容易证明，函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有界的充分必要条件是它在 D 上既有上界又有下界.

二、函数的奇偶性

定义 1.4 **设函数** $y=f(x)$ **的定义域** D **关于原点对称，若对任意** $x\in D$，

(1) $f(-x)=-f(x)$，**则称** $f(x)$ **为奇函数；**

(2) $f(-x)=f(x)$，**则称** $f(x)$ **为偶函数.**

例如，$y=x^3$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$y=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，$y=\sqrt{1-x^2}$ 是 $[-1,1]$ 上的偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，即如果点 $P(x,f(x))$ 在函数的图形上，则点 $P'(-x,-f(x))$ 也在此图形上（如图 1-4）.

偶函数的图像关于 y 轴对称，即如果点 $Q(x,f(x))$ 在函数的图形上，则点 $Q'(-x,f(x))$ 也在此图形上（如图 1-5）.

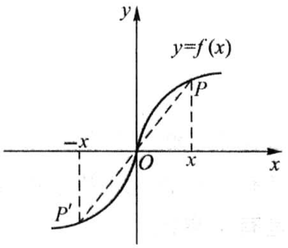

图 1-4

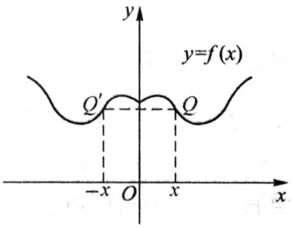

图 1-5

容易证明下列结论：

(1) 两个奇函数的代数和仍是奇函数，两个偶函数的代数和仍是偶函数；

(2) 两个奇函数的乘积是偶函数，两个偶函数的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

三、函数的单调性

定义 1.5 **设函数** $y=f(x)$ **的定义域为** D，**区间** $I\subset D$，**如果对于** I **上的任意两点** x_1,x_2，

(1) **当** $x_1<x_2$ **时，恒有** $f(x_1)<f(x_2)$，**则称** $y=f(x)$ **在区间** I **上是单调增加的**（如图 1-6）；

(2) **当** $x_1<x_2$ **时，恒有** $f(x_1)>f(x_2)$，**则称** $y=f(x)$ **在区间** I **上是单调减少的**（如图 1-7）.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

函数的单调性与所讨论的函数的区间有关. 例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内并不是单调函数，但它在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

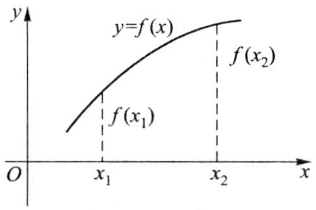

图 1-6

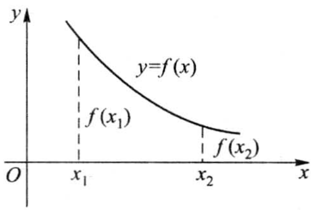

图 1-7

函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的，它是单调函数.

四、函数的周期性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，对任意 $x\in D$ 有 $(x+T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 满足 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正数 T 称为 $y=f(x)$ 的最小正周期，简称周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

对于周期为 T 的函数 $y=f(x)$，只要作出函数在一个周期上的图像，则整个函数的图像就可以将该周期上的图像向左或向右作平移得到.

§1.3 反 函 数

在函数的定义 1.1 中，有两个变量：一个是自变量，一个是因变量，它们的地位不同. 但在实际问题中，谁是自变量，谁是因变量，并不是绝对的，而要根据所研究的问题而定. 在一定的条件下，函数的自变量与因变量的地位是可以交换的，这样就可得到一个新的函数，这个函数通常叫做原来函数的反函数.

定义 1.7 设给定函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 $f(D)$. 如果对 $f(D)$ 中的任一 y 的值，按关系式 $y=f(x)$，总有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，这样就得到一个以 y 为自变量的函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=\varphi(y) \text{ 或 } x=f^{-1}(y),\ y\in f(D).$$

因习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以总是将 $y=f(x)$ 的反函数表示为

$$y=f^{-1}(x),\ x\in f(D).$$

在同一坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(如图 1-8).

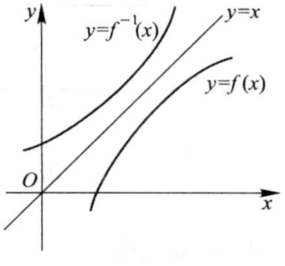

图 1-8

例 3.1 求函数 $y=2x-3$ 的反函数.

解 由 $y=2x-3$ 解得 $x=\frac{y+3}{2}$,故 $y=2x-3$ 的反函数为 $y=\frac{x+3}{2}$.

值得注意的是,并非每个函数都具有反函数. 例如函数 $y=x^2, x\in D=(-\infty,+\infty)$,对其值域中的每个 $y\in(0,+\infty)$,在 D 中有 x 的两个值 $x=\pm\sqrt{y}$,使得 $x^2=y$,故在 $(-\infty,+\infty)$ 内,$y=x^2$ 没有反函数. 那么,在什么条件下函数 $y=f(x)$ 才具有反函数呢? 有如下的结论.

定理 1.1 **若 $y=f(x)$ 在其定义域上单调,则 $y=f(x)$ 存在反函数,且其反函数也是单调函数.**

证明略.

例如,$y=x^2, x\in(0,+\infty)$ 存在反函数 $y=\sqrt{x}, x\in(0,+\infty)$,而 $y=x^2, x\in(-\infty,0]$ 存在反函数 $y=-\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

§1.4 基本初等函数及图形

基本初等函数是指常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六种函数.

下面给出这些函数的图形和一些主要的性质.

1. **常量函数**

函数 $y=c$(c 为常数)称为常量函数. 常量函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,它是偶函数且有界,如图 1-9.

2. **幂函数**

函数 $y=x^\alpha$(α 为实数)称为幂函数. 幂函数的定义域依 α 的取值不同而不同,但不论 α 为何值,它在 $(0,+\infty)$ 内恒有定义,如图 1-10.

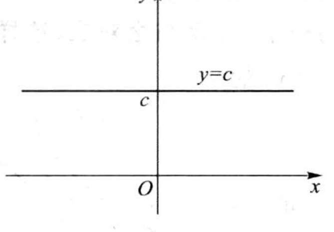

图 1-9

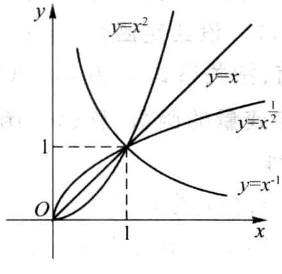

图 1-10

3. **指数函数**

函数 $y=a^x$($a>0, a\neq 1$)称为指数函数. 指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值

域为$(0,+\infty)$，当 $a>1$ 时为单调增加函数，当 $0<a<1$ 时为单调减少函数，如图 1-11.

4. 对数函数

函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$ 称为对数函数，它是指数函数的反函数. 对数函数的定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，当 $a>1$ 时为单调增加函数，当 $0<a<1$ 时为单调减少函数，如图 1-12.

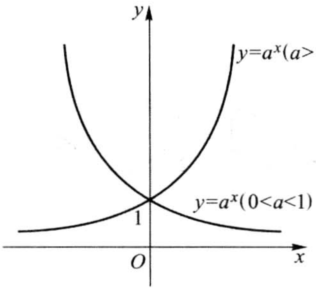

图 1-11

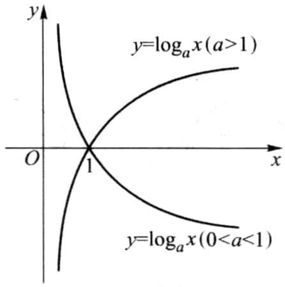

图 1-12

当底数为 10 时，对数函数 $y=\log_{10}x$ 称为常用对数函数，简记为

$$y=\lg x\ .$$

当底数为 $e=2.71828\cdots$时，对数函数 $y=\log_e x$ 称为自然对数函数，简记为

$$y=\ln x.$$

5. 三角函数

三角函数包括以下六种函数：

(1) 正弦函数 $y=\sin x$. 正弦函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以 2π 为周期的奇函数.

(2) 余弦函数 $y=\cos x$. 余弦函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以 2π 为周期的偶函数.

(3) 正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$. 正切函数的定义域为 $D=\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+n\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$，它是以 π 为周期的奇函数，在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调增加.

(4) 余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. 余切函数的定义域为 $D=\{x\mid x\neq n\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$，它是以 π 为周期的奇函数，在$(0,\pi)$上单调减少.

(5) 正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$. 正割函数是余弦函数的倒数，其定义域为