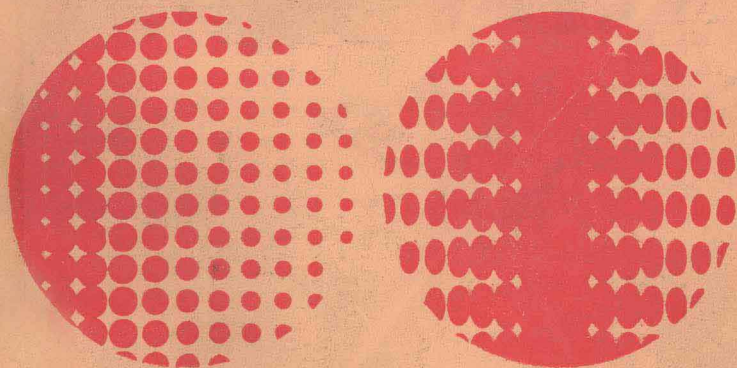


高中几何 解题方法汇集

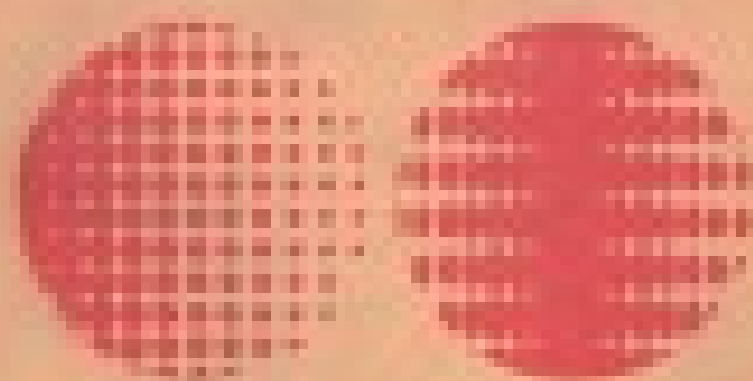
刘鹏志 等编



青岛出版社

高中几何 解题方法汇集

胡德本 等编



青岛出版社

高中几何解题方法汇集

刘鹏志 等编

青 岛 出 版 社

鲁新登字 08 号

责任编辑 戚道浚

封面设计 李伯书

高中几何解题方法汇集

刘鹏志 等编

*

青岛出版社出版

(青岛市徐州路 77 号)

邮政编号: 266071

新华书店北京发行所发行

胶南市印刷厂印刷

*

1993 年 12 月第 1 版 1994 年 5 月第 1 次印刷

32 开(787×1092 毫米) 9.5 印张 202 千字

印数 1— 10110

ISBN 7-5436-1095-7/G · 508

定价: 5.00 元

前 言

根据国家教委关于教学改革的精神和《中学数学教学大纲》的要求,继《高中代数解题方法汇集》一书出版后,我们又编写了这本《高中几何解题方法汇集》,使之成为高中数学的一套完整资料,奉献给广大读者。

众所周知,学习数学离不开解题,而解题离不开解题方法。本“汇集”就是以此为出发点,对现行高中《立体几何》《平面解析几何》(以下简称高中几何)中常用的解题方法进行归纳、整理、分类,并以课本顺序为序,以解题方法为系列编写而成。它突出的特点是明确地阐明高中几何各章节中是采用过什么样的方法来指导解答习题的。

“汇集”在内容上不脱离教材,在方法上又高于教材。现行教材中,对一些解题方法、解题思路未做明确系统的介绍,而本“汇集”就是力图作些这方面的弥补,注重解题方法的指导性,因而更具有实用性。对指导高中几何的学习将发挥积极的作用。

“汇集”新颖、充实,语言精练,是编者多年教学经验的概括与总结。掌握好方法可节时省功,掌握好方法,可举一反三,触类旁通。它既可帮助读者掌握好高中几何的全部知识,提高能力,又能从“题海”中解脱出来。

本“汇集”可供高中数学教师教学参考和高中学生课外阅读及广大青年自学者使用。

编 者

1993年12月

《高中几何解题方法汇集》

编辑名单:

主 编：刘鹏志 苗其蔚 田祥君

副主编：管绍岩 徐全祥 袁强伦

编 委：李长友 王坤业 丁来福

姜登甲 李玉春 邵光明

殷国良 张存令 贾方斌

刘瑞进 匡克春 车邦强

宋广斌 逢洪奎 赵玉会

目 录

前 言

立 体 几 何

第一章 直线与平面	(1)
§ 1.1 确定平面的方法	(1)
§ 1.2 各种距离的计算方法	(7)
§ 1.3 各种角的计算方法	(24)
§ 1.4 关于线面平行的证明	(35)
§ 1.5 关于线面垂直的证明	(41)
§ 1.6 综合题	(49)
习题答案与提示	(55)
第二章 多面体和旋转体	(71)
§ 2.1 多面体和旋转体中的线面关系	(71)
§ 2.2 表面积、体积的计算方法	(80)
§ 2.3 多面体和旋转体的截面	(91)
§ 2.4 有关几何量的最大值和最小值问题	(99)
习题答案与提示	(104)

解 析 几 何

第一章 直线	(107)
§ 1.1 基本概念、基础知识的运用	(107)

§ 1.2	直线方程的求法	(128)
§ 1.3	点与直线、直线与直线位置关系的判断	(138)
§ 1.4	定点、定值、最值与轨迹问题	(152)
* § 1.5	不等量、图形与区域	(167)
	习题答案与提示	(178)
第二章	圆锥曲线	(198)
§ 2.1	曲线的方程的求法	(198)
§ 2.2	充要条件	(210)
§ 2.3	圆锥曲线的基础知识及其应用	(214)
§ 2.4	坐标变换	(223)
§ 2.5	直线与圆锥曲线的位置关系	(231)
§ 2.6	定值与最值问题	(244)
§ 2.7	圆锥曲线系	(252)
	习题答案与提示	(260)
第三章	参数方程与极坐标	(275)
§ 3.1	曲线的参数方程和普通方程的互化	(275)
§ 3.2	直线的参数方程	(278)
§ 3.3	圆锥曲线的参数方程的应用	(282)
§ 3.4	应用参数求轨迹	(284)
§ 3.5	极坐标与极坐标方程	(287)
§ 3.6	利用极坐标求轨迹方程	(288)
§ 3.7	圆锥曲线极坐标方程的应用	(291)
	习题答案与提示	(293)

立体几何

第一章 直线与平面

在高中教材中,立体几何是学生感到比较难学的一部分知识,究其原因,主要是:(1)空间概念没有很好的建立起来;(2)绘制、观察、分析立体图形的能力差;(3)不加区别的滥用平面几何的定理、性质,导致不应有的错误.而直线与平面一章是立体几何的基础,它对于正确建立空间概念,培养观察、绘制、分析空间图形的能力,训练立体几何的解题思路与方法都具有十分重要的作用.

§ 1.1 确定平面的方法

空间图形中的一些共点、共线、共面的问题,常常需要转化为平面上的问题来解决,而转化的关键,首先必须确定平面以及哪些元素在平面内.因此必须熟练掌握确定平面的条件及方法.

1. 直接法

利用确定平面的条件及平面的性质确定平面.

例 1: $n(n \geq 3)$ 条两两相交的直线中,有三条直线不共点,求证这几条直线在一个平面内.

证明:不妨设 L_1, L_2, L_3 三条直线两两相交且不共点, $L_1 \cap L_2 = A, L_2 \cap L_3 = B, L_3 \cap L_1 = C$. 并设 L_1 和 L_2 所确定的平面为 α .

$\because B \in \alpha, C \in \alpha$, 且 $B \in L_3, C \in L_3, \therefore L_3 \subset \alpha$, 设其余 $n-3$ 条直线中的任意一条为 L , L 与 L_1, L_2, L_3 的交点中至少有两个不重合, 设这两个点为 M 和 N , 可知 $M \in \alpha, N \in \alpha$, 又 $M \in L, N \in L, \therefore L \subset \alpha$.

综上所述可知这几条直线均在同一个平面内.

例 2:在四面体 $ABCD$ 中作截面 PQR , 若 PQ, CB 的延长线交于 M, RQ, DB 的延长线交于 N, RP, DC 的延长线交于 K , 求证 M, N, K 三点共线.

证明: $\because M \in PQ$,
 $\therefore M \in \text{平面 } PQR, M \in \text{平面 } BCD$, 故 M 在平面 PQR 和平面 BCD 的交线上. 同理可证 N, K 都在平面 PQR 和平面 BCD 的交线上, $\therefore M, N, K$ 三点共线.

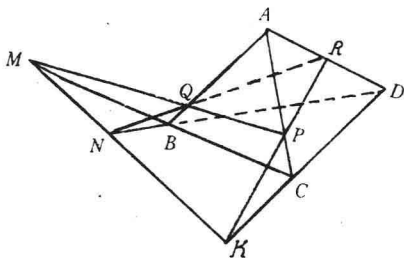


图 1-1

说明:要证多点共面或多线共面时,通常先利用已知的点或线确定一个平面,然后证其余的点或线也在该平面内. 象例 1 所述:证多点共线时通常利用平面性质,证点都在平面的交线上,象例 2 所述.

2. 反证法

例 3:过已知平面外一点且平行于该平面的直线,都在过已知点平行于该平面的平面内.

证明: 设已知平面为 α , 已知点 A . 过 A 任作一条直线 L
 $L \parallel \alpha$, 且 $A \in \beta, \alpha \parallel \beta$.

假设 $L \not\subset \beta$, 则 L 与平面 β 相交于 A , $\because \alpha \parallel \beta, \therefore L$ 必与平面 α 相交, 这与 $L \parallel \alpha$ 相矛盾, $\therefore L \subset \beta$. 由 L 的任意性可知, 过 A 点的所有平行于 α 的直线都在平面 β 内.

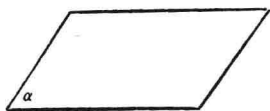
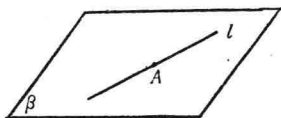


图 1-2

例 4: 已知直线 a 在平面 M 内, 直线 b 与平面 M 交于 P , 且 P 点不在直线 a 上, 求证 a, b 为异面直线.

证明: 假设 a, b 不是异面直线, 则 a, b 平行或相交.

(1) 若 $a \parallel b$, 过 a, b 作平面 N , $\because P$ 点不在 a 上, $\therefore$ 平面 M 和平面 N 公有一条直线 a 及 a 外的一点 P , $\therefore$ 平面 M 与平面 N 重合, $\therefore$ 直线 b 在平面 M 内, 这与已知相矛盾, $\therefore a \parallel b$ 不成立.

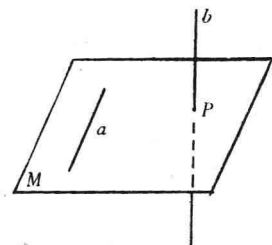


图 1-3

(2) 若直线 a 和 b 相交, 过 a, b 作一个平面 N' , 仿(1)可证得 M 与 N' 重合, 同样得出 b 在平面 M 内的结论, 与已知矛盾, $\therefore a$ 和 b 相交也不成立.

综合(1)(2)可知 a, b 不是异面直线不成立, $\therefore a$ 和 b 是异面直线.

值得注意的是, 在用反证法证题时, 如果结论的反面有两种以上情况, 必须用穷举法逐一否定.

3. 同一法

例 3 也可以用同一法证明,证法如下:

证明:过点 A 作直线 $b \parallel \alpha$,再过 b 作平面 γ ,设 γ 与平面 α 的交线为 c ,则 $c \parallel b$,若 $b \not\subset \beta$,但 $b \subset \gamma$,设 $B \cap \gamma = b'$. $\because \alpha \parallel \beta$, $\therefore c \parallel b'$,在平面 γ 内过 A 点有二条直线 b, b' 都和 c 平行,可知 b, b' 必为同一条直线,即 $b \subset \beta$.

例 5:已知异面直线 a, b ,求证两个端点分别在直线 a 和 b 上的线段的中点都在同一个平面内.

证明:在直线 a 上任取两点 A, D ,在直线 b 上任取两点 B, C ,过线段 AB, AC, CD 的中点 H, G, E 作平面 α .

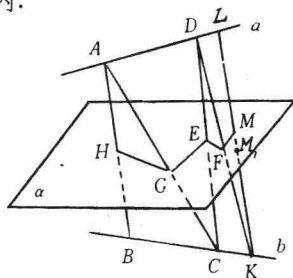


图 1—4

在直线 a, b 上分别任取一点 L, K , LK 的中点为 M ,连结 DK , $\because D, L$ 在直线 a 上, K 在直线 b 上, $\therefore DK, KL$ 必与平面 α 相交,设交点分别为 F, M_1 . $\because H, G$ 分别为 AB, AC 的中点, $\therefore HG \parallel BC$, $\therefore b \parallel$ 平面 α ,同理 $a \parallel$ 平面 α , $\therefore b \parallel EF$, E 为 CD 的中点, $\therefore F$ 是 DK 的中点. 同理可证 M_1 是 LK 的中点, $\therefore M_1$ 与 M 重合,即 LK 的中点在平面 α 内. $\therefore$ 两个端点分别在异面直线 a, b 上的线段的中点都在同一个平面内.

在立体几何中,证明共点、共线、共面的问题,经常采用同一法,而运用此法的关键是结合图形特点,运用确定平面的条件和平面几何的知识.

习题 1.1

一、选择题

1. 在空间中可以确定一个平面的条件是().
(A) 两两相交的三条直线.
(B) 三条直线, 其中的一条与另外两条分别相交.
(C) 三个点和一条直线.
(D) 两两相交但不交于同一点的三条直线.
2. 一条直线和此直线外不共线的三个点, 可确定平面的个数().
(A) 1 个, (B) 3 个, (C) 4 个,
(D) 以上答案都有可能.
3. 一条直线 a 和两条异面直线 b, c 都相交, 则它们可以确定平面的个数().
(A) 1 个, (B) 2 个, (C) 3 个, (D) 4 个
4. 下列命题正确的是().
(A) 空间四点中, 有三点在一条直线上, 则这四点必共面.
(B) 三个平面两两相交, 有三条交线, 这三条交线一定共点.
(C) 几条直线中的任意两条共面, 则它们都共面.
(D) 一条直线与三条平行线都相交, 则这四条直线共面.
5. 共点于 P 的 10 条直线, 其中有 4 条共面, 其余无三条共面, 则 10 条直线可以确定平面的个数().
(A) 46 个, (B) 40 个, (C) 39 个, (D) 16 个.

二、填空题

1. 分别和二条异面直线相交的两条直线的位置关系是_____.

2. 不重合的三条直线交于一点, 最多能确定_____个平面.
相交于两点最多能确定_____个平面.

3. 已知四个不共面的点, 在空间存在多少个平面, 使各点到该平面的距离相等_____.

4. 经过平面外的一点有_____个平面与已知平面平行. 有_____个平面与已知平面垂直.

三、证明题

1. 空间中四条直线, 每两条都相交, 每三条不共点, 求证这四条直线共面.

2. 已知三个平面两两相交, 有三条交线, 判断这三条交线的位置关系, 并加以证明.

3. 如果一条直线与一个平面平行, 那么过这个平面内的一点而与这条直线平行的直线, 在这个平面内.

4. 求证和两条异面直线分别相交的直线是异面直线.

5. 求证正三棱锥的四个顶点向所对面作的垂线相交于一点.

6. 如图, 已知平面 $\alpha \perp$ 平面 β , $\alpha \cap \beta = l$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, 且 a 、 b 都与 l 不垂直, 求证 a 与 b 不垂直.

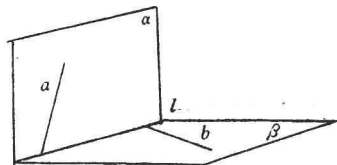


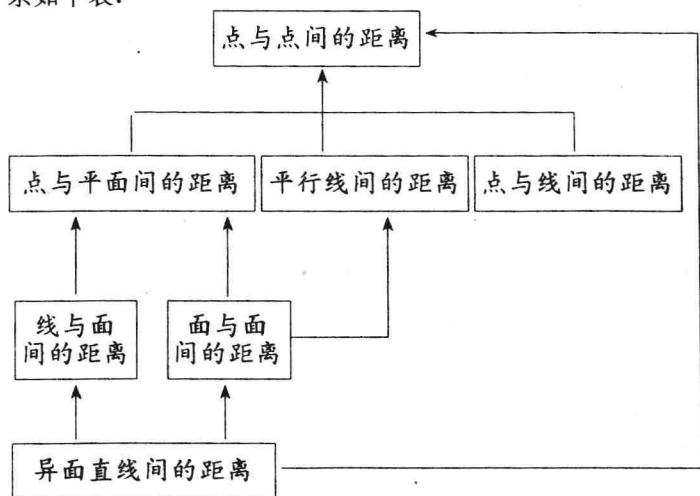
图 1—5

§ 1.2 各种距离的计算方法

立体几何中学过的距离有以下几种情形：

两点间的距离；点到直线的距离；点到平面的距离；二条平行线间的距离；异面直线间的距离；平行于平面的直线与平面间的距离；两个平行平面间的距离；球面上两点间的距离。

在这些距离中，两点间的距离是其他距离定义的基础，各种距离的计算最终都要转化成两点间距离的计算，其转化关系如下表。



计算距离常用定义法；转化法；补形法；体积法；极值法；异面直线上两点间距离公式等方法。

1. 定义法

从转化关系表中可以看出,用定义法求距离包括点线距离、点面距离、异面直线间的距离及平行线间的距离.

例 1: AD 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高,在 AD 上取一点 E ,使 $AE = \frac{1}{2}DE = a$,过 E 点作直线 $MN \parallel BC$,交 AB 、 AC 于 M 、 N .将 $\triangle AMN$ 沿 MN 折起,使 $\angle A'ED = 60^\circ$,求 A' 到 BC 的距离.

证明: $\because AD \perp BC, MN \parallel BC, \therefore AE \perp MN$, 则 $A'E \perp MN, \therefore A'E \perp BC$, 又 $\because ED \perp BC, \therefore BC \perp$ 平面 $A'ED$, 连结 $A'D, A'D \subset$ 平面

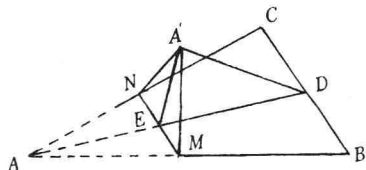


图 1—6

$A'ED, \therefore BC \perp A'D$, 即 $A'D$ 是点 A' 到 BC 的距离. 在 $\triangle A'ED$ 中, $AE = A'E = a, ED = 2a$, 根据余弦定理有: $A'D^2 = a^2 + (2a)^2 - 2a \cdot (2a) \cdot \cos 60^\circ = 3a^2, \therefore A'D = \sqrt{3}a$, 即 A' 到 BC 的距离为 $\sqrt{3}a$.

说明: 从本题的结论中可知 $EA' \perp A'D$, 根据点到平面距离的定义, 可得出 EA' 是 E 点到平面 $A'BC$ 的距离.

例 2: 从平面外一定点向平面引二条斜线, 它们在平面上的射影分别等于 a 和 b , 又这二条斜线与平面所成的角之差为 45° , 求这点到平面的距离, 并讨论 a, b 应满足什么条件所求距离才有意义.

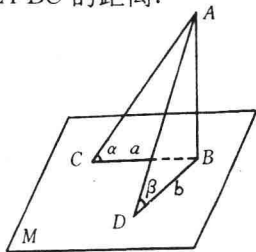


图 1—7

解法 1: 设两条斜线与平面 M 所成的角分别为 α, β , 设 A 点到平面的距离为 x , 不妨取 $a >$

$b, \beta > \alpha, \beta - \alpha = 45^\circ$, 如图从 A 向平面 M 引垂线, 垂足为 B , 连结 BC, DB , 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $x = atg\alpha$, 在 $Rt\triangle ABD$ 中, $x = b \cdot tg\beta$, $\therefore atg\alpha = \beta \cdot tg\beta$, 即 $atg\alpha = b \cdot tg(\alpha + 45^\circ) = b \cdot \frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$

$$\therefore atg^2\alpha + (b-a) \cdot tg\alpha + b = 0, \therefore tg\alpha = \frac{a-b \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4ab}}{2a}$$

$$= \frac{a-b \pm \sqrt{a^2 - 6ab + b^2}}{2a} \quad \text{又} \because AB = x = atg\alpha, \therefore AB = \frac{a-b \pm \sqrt{a^2 - 6ab + b^2}}{2}.$$

讨论: 要使所求距离有意义, 必须 $a^2 - 6ab + b^2 \geq 0$, 即 $[a - (3+2\sqrt{2})b][a - (3-2\sqrt{2})b] \geq 0$, $\therefore a \geq (3+2\sqrt{2})b$ 或 $a \leq (3-2\sqrt{2})b$. $\because a > b$, $\therefore$ 取 $a \geq (3+2\sqrt{2})b$, 即当 $a \geq (3+2\sqrt{2})b$ 时, A 点到平面的距离才有意义.

解法 2: 如图设 $AB = x$, 斜线与平面 M 所成的角分别为 $\arctg \frac{x}{b}, \arctg \frac{x}{a}$, 依题意有 $\arctg \frac{x}{b} - \arctg \frac{x}{a} = \frac{\pi}{4} \therefore \frac{1 + \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{x}{b}$, 即 $\frac{a+x}{a-x} = \frac{x}{b}, x^2 - (a-b)x + ab = 0, \therefore x = \frac{(a-b) \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4ab}}{2}$, 当且仅当 $(a-b)^2 - 4ab \geq 0$ 时有实数解, 即 $b^2 - 6ab + a^2 \geq 0$, 由解法 1 可知 $a \geq (3+2\sqrt{2})b$ 时 A 点到平面的距离才有意义.

例 3: 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 棱长为 a , 求异面直线 BD 与 A_1C 间的距离.

解: 连结 AC , 则 $BD \perp AC$, 又 $\because AA_1 \perp$ 平面 $ABCD, \therefore AA_1 \perp BD, \therefore BD \perp$ 平面 AA_1C , 在平面 AA_1C 内过 O 作 OE