

Finance
经济管理类课程教材

金融系列

固定收益证券

林清泉 编著



 中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

固定收益证券/林清泉编著. —北京: 中国人民大学出版社, 2013. 7
经济管理类课程教材·金融系列
ISBN 978-7-300-17798-4

I. ①固… II. ①林… III. ①证券投资-高等学校-教材 IV. ①F830.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 154248 号

经济管理类课程教材·金融系列

固定收益证券

林清泉 编著

Guding Shouyi Zhengquan

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室)

010-62511398 (质管部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com>(人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 三河市汇鑫印务有限公司

规 格 185 mm×260 mm 16 开本

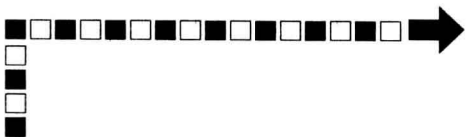
版 次 2013 年 8 月第 1 版

印 张 18

印 次 2013 年 8 月第 1 次印刷

字 数 448 000

定 价 35.00 元



出版说明

改革开放以来，中国的金融走上了高速发展的快车道，获得了前所未有的发展，有关院校都开设了金融课程，以便培养我国急需的人才。

一套高质量的教材是提高教学质量的前提之一。教材规定了教学内容，是教师授课取材之源，是学生求知和复习之本，没有优秀的教材，就无法提高教学质量。中国人民大学出版社推出“经济管理类课程教材·金融系列”，旨在推动国内金融人才培养工作的发展。

组织编写这套教材时，我们遵照以下原则：

1. 教材实行本土化。为了更快地与国际接轨，许多人主张采用“拿来主义”原则，直接引进国外的教材。实践证明，我国与发达国家相比，国情不同，文化背景不同，思维方式不同，语言表述方式不同，广大的专家教授一致认为：我们培养的是中国金融人才，是为中国的金融服务的，教材还是本土化为宜。在了解我国现况之后，再学习国外的知识。把中国的背景知识与国际接轨才是我们最需要的。该套教材均为本土原创作品。

2. 精选作者，保证教材质量。金融与国家的政策联系紧密，应用性强，培养的学生既要懂理论又要会应用，既要与国际接轨，又要考虑中国的国情。该套教材涵纳全国“政产学研”方面的作者，从源头上保证了这套书的质量。

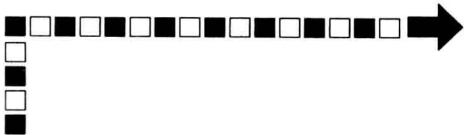
3. 要始终保持教材的“精”与“新”。现代金融日新月异，课程设置不断变化。该套教材根据形势的发展，不断推出新课程教材，并不断修订、完善。

4. 形式多种多样，方便教材使用者。书中每章都设有

“本章小结”、“本章要点”、“本章关键术语”、“本章思考题”和“本章练习题”等栏目，此外，各书还有配套的“学习指导书”，方便读者学习和使用。

总之，这套系列教材紧密结合当前国内外金融研究的最新成果与金融政策发展的实际情况，全面讲述金融基本理论和基本知识。我们相信“经济管理类课程教材·金融系列”的推出，能够为读者掌握现代金融知识、培养人才起到应有的作用。

中国人民大学出版社



前 言

固定收益证券市场是金融市场体系中的一个重要组成部分，它与股票市场一起构成了证券市场的两大基石。在固定收益证券市场上，产品种类繁多，市场总量和日常交易金额巨大，同时还存在着以固定收益证券为基础的众多衍生产品。这个市场一方面为众多的金融机构和个人投资者提供了丰富的投资品种，同时也为一大批资金的需求者提供了一个较为迅速、便利地获取资金的渠道。它以利率为杠杆，调节了整个社会的资金流向；所融通的大量资金保证了整个社会经济的正常运行。

固定收益证券市场主要是指债券市场及其衍生品市场，它是重要的直接融资市场。2009 年全球债券总额达 80.174 万亿美元，其中美国债券市场总额为 31 万亿美元，欧元区债券总额达 23.6 万亿美元；中国的债券市场总额为 2.4 万亿美元，根据 CIA 购买力平价估计的 GDP 中，2009 年世界 GDP 为 5 753 百亿美元，美国 GDP 为 1 427 百亿美元，欧洲 GDP 为 1 599 百亿美元，中国 GDP 为 475.8 百亿美元，日本 GDP 为 504.9 百亿美元。债券占 GDP 的比重分别为：全球 142.9%；美国 218.4%，日本 211.4%，欧元区 147.7%，中国 49.5%；根据债券市场总额和股票市场总额的数据，计算债券市场总额占直接融资总额的比重，美国 68.6%，日本 75.3%，欧元区 78.4%，中国 32.3%，在直接融资市场中，债券融资的比重相对较低。

中国的固定收益证券市场上主要有三个品种：国债、企业债和金融债。无论是哪种债券，其产生和发展的时间都不是很长。国债市场算是发展时间最长的了，从 1981 年

中国开始恢复国债发行算起，也不过才仅仅 30 多年的时间。而金融债券则是从 20 世纪 90 年代中后期才刚刚起步，也就是 20 多年的发展时间。截至 2011 年末，各类债券产品余额达 22.75 万亿元，其中政府债券、央行票据、金融债券和企业债券规模分别为 7.86 万亿元、2.13 万亿元、7.57 万亿元和 5.18 万亿元。

在这么短的时间内，想使中国的固定收益证券市场获得像西方发达国家一样的成就，是不现实的。但是我们必须注意到当前存在的问题并采取相应的措施，以促进中国固定收益证券市场的发展。笔者认为这样做至少具有以下几点意义：

首先，进入 21 世纪之后，一个国家的金融竞争力将对该国的整体实力和国际竞争力产生越来越大的影响。目前中国整个金融体系中较为薄弱的环节就是资本市场，在资本市场中固定收益证券市场的发展又落后于股票市场的发展。此外，我国的资本市场经过这些年的发展，已经形成较大规模。但是，其自身的风险也在加大。而管理风险需要多样化的金融工具，特别需要债务性工具。在一个只有股票而无债券的市场上，或者说在一个股票和债券市场发展不均衡的资本市场体系内，要想有效地对风险进行管理是十分困难的。从这个角度来看，发展债券市场是完善我国资本市场的迫切需要，更有助于中国整体金融竞争力的提升。

其次，对于政府而言，发展固定收益证券市场将有助于政府用更加市场化的手段对利率进行调控，并有助于利率市场化目标的实现。在金融市场发达的国家，国债不仅是政府的筹资工具，而且更多的是扮演金融市场基础性产品的角色。我国货币市场发展的一个重要目标是利率市场化，利率市场化意味着中央银行放弃对利率的直接管理，而是通过间接手段调控和影响基准利率和市场利率，实现利率的平稳运行。在这里，以国债为工具进行的公开市场操作是中央银行最主要和最常见的调控手段，长期固定利率国债的缺乏将使这种间接调控流于形式。发行长期固定利率国债可丰富和完善债券收益率曲线，而债券收益率曲线显示了市场对未来经济运行状况的心理预期，也是未来经济发展态势的重要参考指标。

再次，发展固定收益证券市场对于企业而言也具有重要的意义：一方面，有助于拓宽企业的融资渠道，改变目前企业融资过度依赖银行和股票市场的状况。而企业融资渠道的多样化将会使得企业的资本结构得到改善，有助于企业建立更为完善的治理结构，使企业获得持续发展的动力和活力。另一方面，有助于企业进行流动性管理。流动性管理是企业的一项重要日常业务。为了进行流动性管理，企业需要一种既有一定收益又有较高流动性的金融资产，这种资产只能是各种债券。目前，由于债券市场发展的滞后，企业只好将富余资金用于委托理财，甚至直接进入股市，结果带来了不可控的风险，导致很多企业经营困难。可见，要维持企业正常经营，也需要债券市场的大发展。

最后，发展固定收益证券市场将丰富目前中国的金融工具品种，无论是机构还是个人都将获得更多的投资机会和投资选择。特别是在中国股票市场波动性较大，而衍生产品市场又近乎于零的情况下，固定收益证券市场所提供的相对稳定的收益就更具有重要意义了。对于个人投资者而言，由于中国人逐渐脱离贫困实现温饱迈向小康后，储蓄存款越来越多，因而迫切需要找到多样化的金融资产来充做投资对象。另外，我国人口老龄化现象日趋明显，人们客观上需要一些风险相对较小的金融工具来保有自己的养老金。但是，因债券市场规模的狭小，目前可供中国居民选择的金融资产，或是风险很小但收益颇微的银行存款，或是风险很大但收益极不确定的股票，基本上没有收益和风险特征都能令人比较满意的其他金融产品。对于机构投资者而言，情况也是这样，由于受到风险控制的要求，机构投资者更不可能将手中的资金全部投资于股市。在这种情况下，债券市场应该是一个不错的选择，但是同样

受制于债券市场规模狭小这样一个现状，导致机构投资者手中富余了大量的现金，只能选择存入银行。

与固定收益证券市场的发展水平相类似，我国对固定收益证券的理论和应用研究历史并不长，本教材旨在借鉴和吸取国内有关固定收益证券的教材长处的基础上，介绍一些有关债券的基础知识，从宏观上介绍中国的债券市场。本教材还注重应用数学工具，从定量角度分析债券的价格、风险度量和投资策略的确定，详细地介绍了利率期限结构理论、固定收益证券的定价理论以及固定收益证券特征的定量描述。本教材的内容主要包括以下几个部分：

第一部分内容是有关利率的一些基本知识。本书从介绍货币的时间价值着手，介绍了即期利率、远期利率和折现因子的计算以及分析它们之间的相互关系，介绍货币时间价值理论的若干应用例子，在此基础上介绍了利率期限结构理论，应用无偏差预期理论、风险溢价理论和市场分割理论分析利率期限结构的变化趋势。这些有关利率的基本知识都是固定收益证券定价的基础。

第二部分内容是固定收益证券的定价理论。对于固定现金流的固定收益证券，可以采用折现因子、即期利率、远期利率和到期收益率的多种定价方法，并对债券的收益进行分析，为分析债券价格风险提供依据，在此基础上，应用债券价格构造利率期限结构。分析远期利率与不同期限债券价格变化的关系，进一步讨论长期投资、短期投资与债券收益的关系，探讨长期投资与短期投资的利弊。在这一部分还讨论了“到期收益率”这个货币时间价值尺度缺陷以及它的简便求法。我们也介绍了债券实际交易时间（交割时点不在票息支付的时间点）对债券价格的影响，在这种情况下，讨论了到期收益率及连续收益率的确定。

第三部分内容是固定收益证券产品定价。固定收益证券实质上就是利率产品，嵌有期权的固定收益证券的定价，实质上是对利率衍生产品的定价。我们介绍了利率产品、利率衍生产品的无套利和风险中性定价方法，以及多期的无套利定价模型。在此基础上，进一步讲述了四种离散的短期利率动态模型，描述短期利率变化的规律。尤其值得注意的是，我还深入分析了动态利率模型发展脉络。

第四部分内容是对固定收益证券一些特征的定量描述，主要分析固定收益证券风险度量方法，包括 PVBP、久期和凸性。这些特征其实就是固定收益证券价格对于利率的敏感性度量，应用这些度量指标可进行套期保值和风险管理。当我们能够运用 PVBP、久期和凸性对固定收益证券进行定量刻画的时候，我们就可以知道利率变化一个基点给债券价格带来了多少变化，从而帮助我们有效地进行套期保值和资产负债管理活动。最后还介绍了多因素模型风险度量模型——关键利率久期。这一部分还用例子说明久期及凸性的应用。

第五部分内容是对固定收益证券产品的介绍，分别介绍了国债、市政债券、国际债券、资产支持债券、抵押支持债券以及固定收益证券的一些衍生产品，同时讨论资产支持债券、抵押支持债券定价。同时简要地分析了美国次级房产贷款证券化在 2008 年世界金融危机中的作用，以美国三轮量化宽松货币政策（2008 年 11 月 25 日，2010 年 11 月 3 日，2012 年 9 月 13 日）为例，分析了国家的宏观货币政策对抵押支持债券投资（持有）结构的影响。

第六部分内容是固定收益证券的投资策略。债券投资策略一般分为保守型投资策略和积极型投资策略。投资者的资金来源和用途是投资策略选择的重要因素。另外，在确定投资策略时，投资者还应考虑自身整体的资产与负债状况以及未来现金流状况，以期达到收益性、安全性与稳定性的最佳结合。同时，投资策略的采取应是动态的，应根据现实情况进行合理调整。对这一部分的内容，考虑到投资策略更多地是和实践结合在一起的，因此对于每一种

投资策略我们在介绍了其思路之后，都用一些例子作进一步的说明，读者还是应该在实际操作中去学习和选择适合自己的投资策略和投资技巧。

最后还介绍了中国的固定收益证券市场，这包括中国的国债市场、中国企业债券市场、中国金融债券市场，在分析我国固定收益证券市场现状和存在的问题基础上，对中国固定收益证券市场的改革提出建议。

应该看到与国际固定收益证券市场相比，中国固定收益证券市场的发展前景还是很广阔的。全球发行的固定收益证券总额相当于全球 GDP 总额的 142.9%，而中国的这一比例只有 49.5%。笔者相信中国的固定收益证券市场在不远的将来必将出现一个蓬勃的发展阶段，同时也希望这本书能在中国固定收益证券市场的发展过程中起到一点普及基础知识的微薄之力。

《固定收益证券》这本教材是在作者几年来讲授该课程讲稿基础上经过修改补充而形成的。具体编写分工如下：第一章、第二章、第三章、第四章由林清泉编写；第五章、第六章、第七章、第十章、第十一章由林清泉、工商银行总行王振博士编写；第八章、第九章由林清泉、中信信托田明明、吴胜姣编写。第十二章由中信债券杨丰博士、王振编写。最后由林清泉教授统一定稿。

感谢常清英教授为本书的计算、编程、绘图及制表付出的辛勤劳动。感谢林一青博士后为本书的计算编写程序所做的工作。

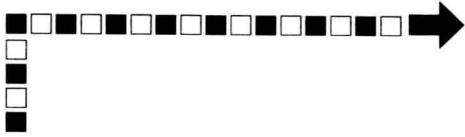
感谢中国建投刘克飞提供第六、七、八、九、十章部分的数据更新资料，中信证券邓力博士提供了表 7—1、表 7—3，黄小琳博士收集了部分更新数据。

感谢招商银行总行李颖、李婷、孙国良博士为本书部分习题编写所做的工作。

本教材编写过程中参考引用了国内外有关学者的研究成果，在此表示感谢。我们虽然作了很大的努力，但难免存在一些错误，敬请各位读者提出宝贵意见。

林清泉

2013年7月



目 录

第 一 章	货币的时间价值	1
第一节	利息和利率	1
第二节	货币时间价值的若干应用例子	9
第三节	到期收益率	12
第四节	即期利率、折现因子和远期利率	15
第五节	利率期限结构	20
	附录：附息债券到期收益率的计算方法	26
第 二 章	固定收益债券定价理论	30
第一节	固定收益证券的定价方法	30
第二节	债券到期收益分析	38
第三节	无套利与一价原则	41
第四节	债券的到期期限、价格和 回报率	44
第五节	实际债券价格	46
第六节	收益曲线拟合的方法	52
第 三 章	利率衍生产品的定价和短期利率动态模型	57
第一节	利率衍生产品的无套利定价	57
第二节	风险中性定价	61
第三节	多期的无套利定价	65
第四节	短期利率动态模型	74
第 四 章	价格敏感性的分析	93
第一节	价格的利率函数和它的微分	93

第二节	债券价格对利率的敏感性度量	97
第三节	麦考利久期和修正久期	109
第四节	关键利率久期	125
第五章	国债以及政府机构债券	133
第一节	国债概述	133
第二节	美国国债市场	136
第三节	政府机构债券	144
第六章	市政债券	148
第一节	市政债券概述	148
第二节	市政债券的发行和交易	152
第七章	公司债券	160
第一节	公司债券概述	160
第二节	公司债券的发行和交易	164
第三节	公司债券的信用评级	167
第四节	高收益债券	173
第五节	附有选择权的公司债券	177
第八章	国际债券	187
第一节	外国债券	187
第二节	欧洲债券	194
第九章	资产支持债券	202
第一节	资产证券化	202
第二节	资产支持债券分类与收益特征	206
第三节	信用增级	210
第十章	抵押支持债券	217
第一节	不动产抵押贷款	217
第二节	抵押支持债券分类与发行机构	222
第三节	抵押支持债券的提前偿付行为	235
第十一章	债券管理和投资技巧	244
第一节	保守型投资策略	244
第二节	积极性投资策略	249
第三节	债券投资的基本原则和技巧	253

第十二章	中国固定收益证券市场	259
第一节	中国国债市场	259
第二节	中国企业债券市场	264
第三节	中国金融债券市场	269
参考文献	272

【本章要点】

货币的时间价值 (the time value of money): 如果一个人在一年内可以得到 100 元钱, 总是希望在年初得到, 而不愿意在年底得到, 这是为什么呢? 原因在于年初得到的 100 元, 可以再投资获取一年的利息, 从而在年底可以得到比 100 元更多的钱, 这就是货币的时间价值原理。

能得到固定数量货币的人总是希望越快得到该货币越好, 同样地, 需要支付一定货币的人总希望拖得时间越长支付越好。但是, 若不对货币的时间价值进行定量分析, 它就没有特别的用处。例如, 进行固定收益证券分析时不可避免地会遇到现金流、收益率、债券价格、折现率等货币银行学、投资学中的基本概念和内容, 它们都需要进行定量分析。

通过对本章的学习, 读者应该掌握以下要点:

1. 了解有关利息和利率等货币银行学的基本概念, 学会计算到期收益率、即期利率、远期利率和折现因子。
2. 掌握利率期限结构理论, 并且能够运用利率期限结构理论对利率期限结构变化趋势进行分析。

第一节 利息和利率

一、利息

货币作为一个普遍被认同的交易媒介, 它的使用使得市场效率大大提高。在现代经济中, 如果人们要用现在的粮食换取未来的工业品, 居民可以用粮食换取货币 (这就是卖), 用现在的货币换取未来的货币 (这就是投资), 最后, 用未来的货币换取工业品 (这就是

买)。在这个过程中，现在的货币与未来的货币之间的差额就是货币的利息。

在经济学中，利息被理解为货币所有者转让货币使用权而索取的补偿。这种补偿由两部分组成：对机会成本的补偿和对风险的补偿。机会成本是货币所有者将他所有的货币投资于某一投资项目，而失去投资于另一个项目以获取收益的机会。风险则是指转让货币使用权所产生的未来收益具有的不确定性。

利息是货币所有者牺牲货币的使用权而应该得到的补偿，而资本的使用者又是如何利用资本来获得额外的收益以补偿投资者呢？他是通过产业投资来获得利润的。因此，利息实质上是利润的一部分，是利润在货币资本家与产业资本家之间的分割。

二、利率

利率，即利息率，是指贷款期限内的贷款利息额与所贷的资金额的比。在现实生活中，利率都是以某种形式存在的，如不同期限的借贷利率、不同种类的借贷利率。利率的大小主要由社会平均利润率和供求关系决定。

在利息计算中有两种基本的方法：单利与复利。

（一）单利

单利的特点是对已过计息时间而不提取的利息不计利息。其计算公式是：

$$L = Cr t$$

$$S = C(1 + r t)$$

其中， L 为利息额； C 为本金； r 为利息率； t 为借贷期限； S 为本金与利息之和，简称本利和。

【例 1.1】 期限为 3 年、年利率为 8% 的 1 万元贷款，到期后以单利计算，其利息总额和本利和各为多少？

利息总额为：

$$10\,000 \times 8\% \times 3 = 2\,400 \text{ (元)}$$

本利和为：

$$10\,000 \times (1 + 8\% \times 3) = 12\,400 \text{ (元)}$$

（二）复利

复利是一种将上一期利息并入下一期本金一起计算利息一次的方法。假设年利率 $r = 10\%$ ，一年只计息一次，今天投资 1 元，则 1 年后将得到 1.1 元 [$1 \times (1 + 10\%) = 1.1$ (元)]。如果半年计息一次，今天投资 1 元，6 个月之后将得到 1.05 元，一年后将得到 $1.05 \times 1.05 = 1.1025$ (元)，即 $(1 \times (1 + \frac{1}{2} \times 10\%)) = 1.105$ (元)， $1 \times (1 + \frac{1}{2} \times 10\%) (1 + \frac{1}{2} \times 10\%) = 1.1025$ (元)，因此，实际年利率 $R = 10.25\%$ ，半年计息一次的实际年利率 R 的计算公式是：

$$R = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 - 1$$

若每季度计息一次，则实际年利率 R 的公式为：

$$R = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4 - 1$$

其本息之和为：

$$\left(1 + \frac{r}{4}\right)\left(1 + \frac{r}{4}\right)\left(1 + \frac{r}{4}\right)\left(1 + \frac{r}{4}\right)$$

【例 1.2】 期限为 90 天的伦敦同业拆借利率（或 90 天的 LIBOR：London Interbank Offered Rate）是通过伦敦中介机构 90 天期的挂牌美元拆入利率。如果 90 天期 LIBOR 挂牌利率为 10%，它的季利率为 2.5%（即 $\frac{1}{4} \times 10\%$ ）。若按季复利一次，则实际年利率（有效利率）为：

$$(1.025)^4 - 1 = 10.38\%$$

注：在 LIBOR 市场上，“一季”是 90 天，“一年”是 360 天。

按年计息时，第一年按本金计息，第一年末所得的利息并入本金；第二年则按第一年末的本利和计息；第二年末的利息又并入本金，第三年则按第二年末的本利和计息；如此类推，直至借贷契约期满。这种复利计息法也称为“息上加息”。其计算公式是：

$$S = C \cdot (1 + r)^n$$

$$L = S - C$$

按复利计算例 1.1 的利息，则

$$S = 10\,000 \times (1 + 8\%) \times (1 + 8\%) \times (1 + 8\%) = 12\,597 \text{ (元)}$$

$$L = 12\,597 - 10\,000 = 2\,597 \text{ (元)}$$

即按复利计息，可多得利息 197 元。

现在我们回过头来考察一下计算复利次数与利息的关系：设年利率为 r ，每年复利 n 次，则实际年利率 R 的计算公式如下：

$$R = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

由此表达式可知，当一年复利次数 n 增大时，投资的本息和单调上升，也就是实际年利率 R 是关于 n 的单调增函数（可参考高等数学中的极限理论部分），最终达到其极限值 $e^r - 1$ ^①，此时的年利率 r 也称为连续复利率。例如， $e^{0.10} - 1 = 0.105\,2$ ，即实际年利率为 10.52%。

总之，在一定的借贷期内，复利次数越多，投资人的利息收入就越高。当然，筹资人的利息成本也就越大。虽然利息随着复利次数增多而增加，但它不会无限地增大，而是趋于一个确定的数。

▶▶▶ (三) 连续复利率 r 的计算

假定 1 元贷款一年后的本息和是 1.20 元，那么这笔贷款的连续复利率 r 是多少？我们知道， $e^r = 1.20$ ，因此，通过取对数，利用恒等式 $\ln(e^r) = r$ ，我们可以求得 r 的值。此问题的连续复利率为：

① 这里 e 是常数，是自然对数的底，取小数点前 5 位时 $e = 2.718\,28$ 。计算过程如下： $r = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$ ，

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 = e^r - 1$ 。

$$r = \ln 1.20 = 0.1823 = 18.23\%$$

同样的，我们可以很容易地求出售价为 8 000 元，1 年后本息和为 10 000 元的国库券的连续复利率。因为在这笔投资中，每 1 元的投资到期后本息和为 $\frac{10\,000}{8\,000}$ 元，因此，连续复利率 r 为：

$$r = \ln \frac{10\,000}{8\,000} = \ln 1.25 = 0.2231 = 22.31\%$$

对于现价为 9 200 元、半年后到期、其面值为 10 000 元的国库券的连续复利率，每 1 元国库券半年后的本息之和为：

$$\frac{10\,000}{9\,200} = 1.087$$

一年后每 1 元的本息之和为：

$$\frac{10\,000}{9\,200} \times \frac{10\,000}{9\,200} = 1.182$$

其一年后的连续复利率：

$$r = \ln 1.18147 = 0.1668 = 16.68\%$$

更一般的情形：

命题 1.1 设某种有价债券（如国库券）的初始价格为 p_t ， T 年后，最终价格（即在时间 $T+t$ 时）是 p_{t+T} ，则它的连续复利率由下列公式计算：

$$r = \ln \left(\frac{p_{t+T}}{p_t} \right)^{\frac{1}{T}} \quad (1.1)$$

证明： 1. 当 T 为整数时：

设年连续复利率为 r ，记 p_{t+i} 为 i 年之后的有价债券价值。则

$$\begin{aligned} \frac{p_{t+T}}{p_t} &= \frac{p_{t+T}}{p_{t+T-1}} \times \frac{p_{t+T-1}}{p_{t+T-2}} \times \cdots \times \frac{p_{t+1}}{p_t} \\ \ln \frac{p_{t+T}}{p_t} &= \ln \frac{p_{t+T}}{p_{t+T-1}} + \ln \frac{p_{t+T-1}}{p_{t+T-2}} + \cdots + \ln \frac{p_{t+1}}{p_t} \\ &= r + r + \cdots + r = rT \end{aligned}$$

故 (1.1) 式成立。此式也可以写成：

$$r = \frac{\ln p_{t+T} - \ln p_t}{T}$$

特别地，当 $t=0, T=1$ 时有：

$$r = \ln P_1 - \ln P_0$$

由上面得到的 (1.1) 式可知，如果现在投资 p_t 元，则 T 年后的价值可由下式给出：

$$p_{t+T} = p_t e^{rT}$$

令 $t=0, T=t$ ，则有

$$P_t = P_0 e^{rt}$$

且满足下列常微分方程：

$$\begin{aligned} dP_t &= P_0 e^{rt} r dt \\ &= P_t r dt \end{aligned}$$

其中 P_0 为初值条件。这就是连续时间金融市场模型中无风险债券价格所满足的微分方程。

2. 当 T 为非整数时, 设 $T = n + l$, n 为整数, $0 < l < 1$, l 的单位为年, 由于年连续复利率为 r , 则 l 期间对应的利率为 lr 。进一步假设在这一段时间内复利 k 次, 再令 $k \rightarrow \infty$, 则有:

$$\left(1 + \frac{rl}{k}\right)^k \rightarrow e^{rl}$$

故

$$\ln \frac{P_{t+T}}{P_{n+t}} = \ln e^{rl} = rl$$

$$\frac{P_{t+T}}{P_t} = \frac{P_{t+T}}{P_{t+n}} \times \frac{P_{t+n}}{P_{t+n-1}} \times \frac{P_{t+n-1}}{P_{t+n-2}} \times \dots \times \frac{P_{t+1}}{P_t}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{P_{t+T}}{P_t} &= \ln \frac{P_{t+T}}{P_{t+n-1}} + \ln \frac{P_{t+n-1}}{P_{t+n-2}} + \dots + \ln \frac{P_{t+1}}{P_t} \\ &= rl + r + \dots + r = rl + m = (l+n)r = rT \end{aligned}$$

由此可得命题的结论。

【例 1.3】 若某交易方投资额为 10 元 ($p_t = 10$), 连续复利率是 10%, 则 150 天之后 ($T=0.41$ 年) 所得收益为 (本息之和):

$$p_{t+T} = p_t e^{rT} = 10 \times e^{0.1 \times 0.41} = 10.42 \text{ (元)}$$

▶▶▶ (四) 利率的种类

利率的种类很多, 这里我们只介绍其中几种, 而且有些我们只介绍一下基本概念, 更详细的介绍请参考黄达的《金融学》或《货币银行学》。

1. 基准利率与无风险利率

基准利率是指在多种利率并存的条件下起决定作用的利率, 即这种利率发生变动, 其他利率也会相应变动。因而了解基准利率的变化趋势, 也就可以了解全部利率体系的变化趋势。在市场经济中, 基准利率是指通过市场机制形成的无风险利率。

2. 固定利率与浮动利率

根据在借贷期内利率是否调整为标准, 利率可分为固定利率与浮动利率。固定利率是指在借贷期内不做调整的利率。实行固定利率对于借贷双方准确计算成本与收益十分方便, 是借贷合约采用的传统方式。但是, 由于第二次世界大战后通货膨胀连绵不断, 特别是 20 世纪 70 年代后出现了几次大规模的带有普遍性的通货膨胀, 实行固定利率, 对债权人尤其是对进行长期放款的债权人会带来较大的损失。因此, 在越来越多的借贷合约中开始采用浮动利率。

浮动利率是一种在借贷期内可定期调整的利率。根据借贷双方的协定, 由一方在规定的时间内依据某种市场利率进行调整, 一般调整期为半年。浮动利率尽管可以为债权人减少损失, 但也因为手续繁杂、计算依据多样而增加了费用开支。

3. 一般利率与优惠利率

一般利率与优惠利率的划分以利率是否带有优惠性质为标准。商业银行优惠利率是指略低于一般贷款利率的利率。优惠利率一般提供给信誉好、经营状况良好且有良好发展前景的借款人。在国际金融市场上, 外汇贷款利率的优惠与否以伦敦同业拆借市场的利率为衡量标准, 低于该利率者可称为优惠利率。在市场经济国家, 是否提供优惠利率, 主要是微观经济行为主体的市场行为。