全国大学生文化素质教育“十二五”规划教材

全国高职高专学生文化基础素质培养精品教材

高等数学题型解析与复习指导

QUANGUO DAXUESHENG WENHUA SUZHI JIAOYU

GAODENG SHUXUE TIXING JIEXI YU FUXI ZHIDAO

曹爱民　主　编

赠送教学资源

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

全国大学生文化素质教育“十二五”规划教材

全国高职高专学生文化基础素质培养精品教材

高等数学题型解析与复习指导

QUANGUO DAXUESHENG WENHUA SUZHI JIAOYU

GAODENG SHUXUE TIXING JIEXI YU FUXI ZHIDAO

曹爱民 主 编

任晓燕 王 岳 副主编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学题型解析与复习指导 / 曹爱民主编. —北京：北京师范大学出版社，2011.9

ISBN 978-7-303-13247-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①曹… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第160571号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875

印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：184 mm × 260 mm
印　　张：13.5
字　　数：270千字
版　　次：2011年9月第1版
印　　次：2011年9月第1次印刷
定　　价：22.80元

策划编辑：庞海龙　　责任编辑：庞海龙
美术编辑：高　霞　　装帧设计：天泽润
责任校对：李　菡　　责任印制：孙文凯

前　言

“高等数学”是高等职业院校理工、经济、管理类专业学生必修的一门重要课程，也是专升本考试的重点科目。与初等数学相比，高等数学更加系统、抽象，逻辑推理更加严密。为帮助读者更好地学习高等数学，我们根据教育部1999年组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写了本书。全书系统讲解了高等数学的所有重要知识点，包括基本概念、基本思想、基本原理与基本方法，注意理论联系实际，突出解题思路，详尽介绍重要知识点的解题方法以及多种解题方法之间的联系，并使解题思路条理化，使读者便于学习和记忆。在每章内容和解题方法之后，设计了一套强化练习题，可以使读者得到比较系统的训练和提高。

本书章节安排与教材一致，便于复习和巩固。内容安排循序渐进，层次分明，前后呼应，便于读者更快、更好地学习掌握《高等数学》的基本内容。每章均设计了四个版块：

本章考试要求：详细说明本章对各知识点的要求，其中以“掌握”、“理解”、“了解”等不同词语说明对其要求的不同程度。

知识点详解：给出了本章所涉及的全部知识点及学习过程中需注意的问题。

基本题型：以每章重点问题为主线结合历年专升本真题，对常考题型进行分类总结，部分例题给出多种解法，以开拓思路，使读者更深刻地理解数学思想。

强化练习题：精选部分练习题，以达到巩固和理解基本题型的目的。

本书特色及亮点：

1. 过程步骤最详，方法技巧全面。
2. 关键步骤加注解，讲解更到位。
3. 配有教材原题目，使用更方便。
4. 根据难度及重要性，将全书习题分不同等级。
5. 配有历年专升本的真题，使用起来更有针对性。
6. 本书配套电子课件和“强化练习题”答案，请发邮件至 hailong_pang@163.com 索取。

参与本书的编者长期主讲“高等数学”课程，在编写过程中，我们重点突出解题思路和方法，力求将多年的教学经验与体会渗透到本书内容中，由于时间仓促及编者水平有限，书中不妥或错误之处在所难免，敬请各位同行、读者批评指正。

目录

第1章 函数、极限和连续

1.1 本章考试要求

1.1.1 函数

1)理解函数的概念:函数的定义,函数的表示法,分段函数.

2)理解和掌握函数的简单性质:单调性,奇偶性,有界性,周期性.

3)了解反函数:反函数的定义,反函数的图像.

4)掌握函数的四则运算和复合运算.

5)理解和掌握基本初等函数:幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数.

6)了解初等函数的概念.

1.1.2 极限

1)理解数列极限的概念:数列、数列极限的定义,能根据极限概念分析函数的变化趋势.会求函数在一点处的左极限与右极限,了解函数在一点处极限存在的充分必要条件.

2)了解数列极限的性质:唯一性,有界性,四则运算定理,夹逼定理,单调有界定理,极限存在定理,掌握极限的四则运算法则.

3)理解函数极限的概念:函数在一点处极限的定义,左、右极限及其与极限的关系,当$x\to\infty$时函数的极限.

4)掌握函数极限的定理:唯一性定理,夹逼定理,四则运算定理.

5)理解无穷小量和无穷大量:无穷小量与无穷大量的定义,无穷小量与无穷大量的关系,无穷小量与无穷大量的性质,两个无穷小量的比较.

6)熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

1.1.3 连续

1)理解函数连续的概念:函数在一点连续的定义,左连续和右连续,函数在一点连续的充分必要条件,函数的间断点及其分类.

2)掌握函数在一点连续的性质:连续函数的四则运算,复合函数的连续性,反函数的连续性,会求函数的间断点及确定其类型.

3)掌握闭区间上连续函数的性质:有界性定理,最大值和最小值定理,介值定理(包括零点定理),会用介值定理推证一些简单命题.

4)理解初等函数在其定义区间上连续,并会利用连续性求极限.

1.2 知识点详解

1.2.1 函数

1. 函数的定义

在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在某个范围 D 内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的**函数**，x 叫**自变量**. 记作 $y=f(x)$（其中 f 是对应法则）. 自变量 x 的取值范围称为函数的**定义域**，和 x 的值对应的 y 的值称为**函数值**，函数值的集合称为函数的**值域**.

注意：两个函数相等当且仅当函数的定义域和对应法则（又称函数的两个要素）都相同.

2. 分段函数

在定义域的不同点集内由不同的式子表示的函数称为**分段函数**.

3. 函数的性质

(1)有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 M，使得任意 $x\in D$，都有 $|f(x)|<M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上**有界**；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上**无界**.

注意：有界函数的图像在直角坐标系中，表现为其界于两条水平直线之间.

(2)单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，任意 $x_1<x_2\in D$，如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 D 上是**单调递增**的；如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 D 上是**单调递减**的.

(3)奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称，对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

注意：奇函数的图像关于坐标原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

(4)周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 $T(T\neq 0)$，使得任意 $x\in D$，$x\pm T$ 也在定义域中，且恒有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是**周期函数**，T 是它的一个**周期**.

注意：一般把满足上述条件的最小正常数 T 称为函数的周期，且周期函数在它的每一个周期内图像都是完全相同的.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别为 D、W，若对于变量 W 中的每一个值，D 中有唯一确定的值与之对应，则由此确定的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**，习惯上，将 x,y 互换，记作 $y=f^{-1}(x)$. 在同一坐标系内，两个图形关于 $y=x$ 对称.

5. 基本初等函数

(1)常函数

函数 $y=a\,(a\neq 0,a$ 是常数）称为**常函数**. 其图像为平行于 x 轴的一条直线，如

图 1-1 所示.

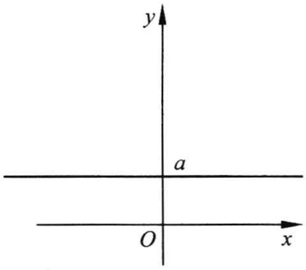

图 1-1

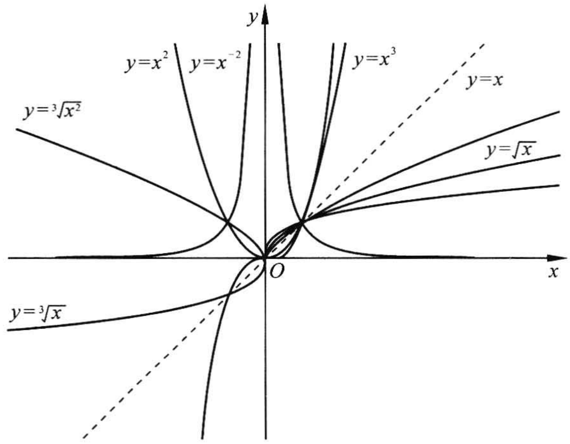

图 1-2

(2)幂函数

函数 $y=x^{\alpha}$(α 为任意实数)称为**幂函数**,如图 1-2 所示.

(3)指数函数

函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq1$)称为**指数函数**,它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,如图 1-3 所示.

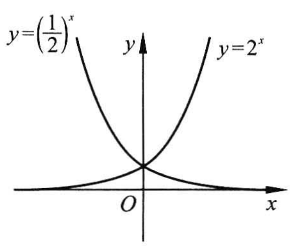

图 1-3

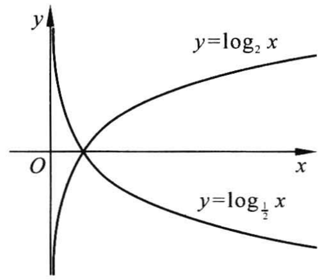

图 1-4

(4)对数函数

函数 $y=\log_{a}x$($a>0,a\neq1$)称为**对数函数**,它的定义域为$(0,+\infty)$,所以图像在 y 轴右方,如图 1-4 所示.

注意:函数 $y=a^{x}$ 和 $y=\log_{a}x$ 互为反函数.

(5)三角函数

三角函数包括正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$,余割函数 $y=\csc x$,分别如图 1-5～图 1-10 所示.

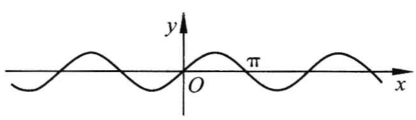

图 1-5

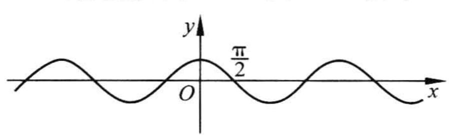

图 1-6

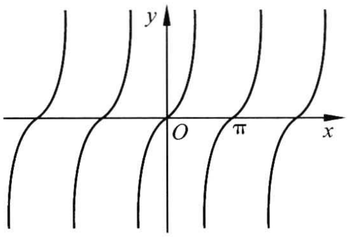

图 1-7

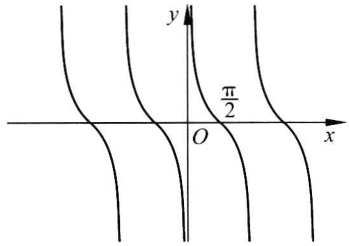

图 1-8

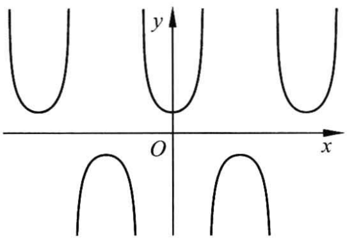

图 1-9

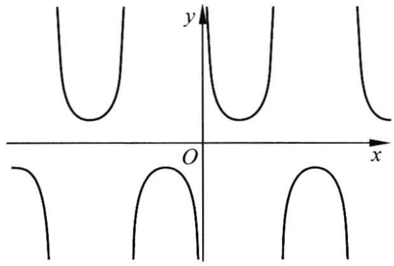

图 1-10

(6)反三角函数

反三角函数一般包括反正弦函数 $y=\arcsin x$,反余弦函数 $y=\arccos x$,反正切函数 $y=\arctan x$,反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\ x$,分别如图 1-11～图 1-14 所示.

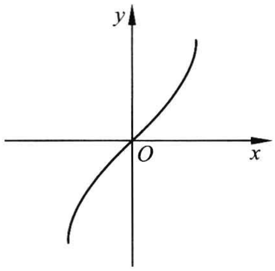

图 1-11

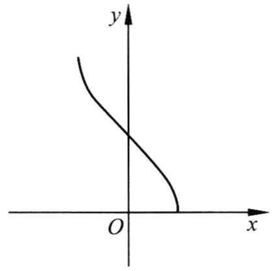

图 1-12

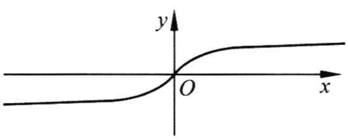

图 1-13

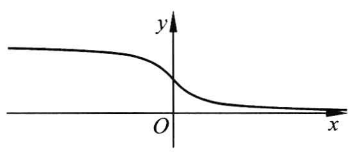

图 1-14

6. 复合函数

设 y 是 u 的函数:$y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数:$u=\varphi(x)$,并且 $u=\varphi(x)$值域的全部或一部分包含在 $y=f(u)$的定义域中,则可以构成一个以 x 为自变量,以 y 为函数值的**复合函数**,记作 $y=f(\varphi(x))$,其中 u 是**中间变量**.

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或复合所构成的能用一个式子表达的函数称为**初等函数**.

1.2.2 极限

1. 数列的极限

(1)数列的定义

按某种规律有次序地排列起来的一串数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 称为**数列**. 简记为 $\{x_n\}$，其中 x_1 叫**首项**，x_n 叫**通项**.

注意：数列的实质是以全体正整数为定义域的特殊函数，可以记为 $x_n=f(n)$.

(2)数列的极限

给定数列 $\{x_n\}$，当 $n\to\infty$ 时，如果 x_n 与常数 a 无限接近，称 $\{x_n\}$ 极限存在，且极限为 a，或称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 a. 记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

如果数列无极限，也称数列是**发散**的.

(3)数列极限的性质

性质 1：如果数列 $\{x_n\}$ 存在极限，则极限是唯一的.

性质 2：如果数列 $\{x_n\}$ 存在极限，那么数列一定有界.

性质 3：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子列也收敛于 a.

性质 4：单调有界数列必有极限.

性质 5：(夹逼定理)：设有数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，如果 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

性质 6：(数列极限的四则运算法则)设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\ (b\neq 0)$ 则

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=ab$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}$.

2. 函数的极限

(1)函数极限的定义

1)自变量趋于有限数时函数的极限：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与一常数 A 无限接近，那么常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

2)自变量趋于无穷大时函数的极限：设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 与一常数 A 无限接近，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(2)函数极限的性质

性质 1：(唯一性)若 $f(x)$ 在 x_0 点存在极限，则极限是唯一的.

性质 2：(有界性)若 $f(x)$ 在 x_0 点存在极限，则存在常数 $M>0$ 与 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

性质 3：(保号性)若 $f(x)$ 在 x_0 点存在极限，且等于 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$，则必存在 x_0 的某一邻域，在该邻域内，有 $f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$；若函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一去心邻域内有

$f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则必有 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

性质 4：若对于任意 x_0 的去心邻域内的点 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

性质 5：若对于任意 x_0 的去心邻域内的点 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$.

性质 6：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B(B\neq 0)$，则

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$；

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$；

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{A}{B}$.

(3)左、右极限

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果当 $x\to x_0+0$ 时，$f(x)$与一常数 A 无限接近，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0+0$ 时的极限，又叫**右极限**，记作：

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A;$$

如果当 $x\to x_0-0$ 时，$f(x)$与一常数 A 无限接近，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0-0$ 时的极限，又叫**左极限**，记作：

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A.$$

定理：函数 $f(x)$在 x_0 点极限存在的充要条件是：$f(x)$在 x_0 点左、右极限都存在且相等.

(4)两个重要极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；　2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(5)无穷小量与无穷大量

1)定义：任意一个变量，只要它在某一变化过程中以零为极限，这个变量就叫**无穷小量**；若在某一变化过程中趋于无穷大，则称为**无穷大量**.

2)无穷小量的性质：

① 有限个无穷小量的和或乘积仍是无穷小量；

② 无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量；

③ 若$|f(x)|$在某一过程中是无穷小量，则 $f(x)$在该过程中也是无穷小量；

④ 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在的充要条件是：函数 $f(x)$可以表示为：$f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$是无穷小量(在 $x\to x_0$ 的过程中).

3)无穷小量的比较：设函数 $\alpha(x)$，$\beta(x)$是自变量 x 在同一变化过程中的两个无穷小量.

① 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$是较$\beta(x)$**高阶**的无穷小量；

② 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$是较$\beta(x)$**低阶**的无穷小量；

③若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是**同阶无穷小量**.

特别地，当 $c=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ **等价**，记作：$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

4）无穷小量与无穷大量的关系：在某一变化过程中，若 $\alpha(x)$ 是无穷小量且不取零值（即 $\alpha(x)\neq 0$），则其倒数 $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ 是无穷大量；反之，在某一变化过程中，若 $\beta(x)$ 是无穷大量，则其倒数 $\dfrac{1}{\beta(x)}$ 是无穷小量.

5）等价无穷小量的性质，设在某一变化过程中：

①若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$ 也存在，且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}=\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$；

②若 $\alpha\sim\gamma$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\beta$.

6）常见的几个等价关系：在 $x\to 0$ 的过程中：

$\sin x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim \dfrac{x}{n}$.

1.2.3 连续

1. 函数连续性的概念

（1）函数在一点连续的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义：

定义1：若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点**连续**；

定义2：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点**连续**.

（2）函数在区间上连续的定义

若函数在某个区间内的每一点都连续，则称函数在该区间上连续.

（3）左、右连续

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点**左连续**；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点**右连续**.

（4）定理

函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充要条件是：函数在 x_0 点既左连续，又右连续，即

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

2. 间断点及其分类

（1）间断点的定义

若函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点**或**不连续点**.

（2）分类

1）第一类间断点：设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，若函数 $f(x)$ 在 x_0 处左、右极限都存在，则称点 x_0 是**第一类间断点**. 第一类间断点又分为跳跃间断点和可去间断点. 若左、右极限不相等，称 x_0 为**跳跃间断点**；若左、右极限相等，称 x_0 为**可去间断点**.

2）第二类间断点：函数在点 x_0 至少有一侧极限不存在，统称为**第二类间断点**.

3. 初等函数的连续性

1)若函数 $f(x)$、$g(x)$在 x_0 点连续,则这两个函数的和、差、积、商在 x_0 也连续.

2)由连续函数经有限次复合而成的复合函数在定义区间内仍连续.

3)单调增加(减少)且连续的函数,其反函数也是单调增加(减少)且连续的.

4)初等函数在其定义的区间内都是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

1)(**最大值、最小值定理**)在闭区间上的连续函数必存在最大值、最小值.

2)(**有界性定理**)闭区间上的连续函数必有界.

3)(**介值定理**)设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,又 $f(a)\neq f(b)$,则对于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任意一个数 c,在(a,b)内至少存在一个点 x_0,使 $f(x_0)=c$.

4)(**零点定理**)$f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在(a,b)内至少存在一个点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

1.3 基本题型

1.3.1 判断两个函数是否为同一个函数

由函数的定义可以看出,要判断两个函数是否相同时只需判断函数的定义域和对应法则是否相同即可,因为在函数的定义域和对应法则完全相同的情况下,其值域也一定相同.

【例 1-1】 判断下列函数是否为同一个函数.

1. $y=x, y=\sqrt{x^2}$;　　2. $y=\sin^2 x+\cos^2 x, y=1$;

3. $y=\lg x^2, y=2\lg x$;　　4. $y=\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{2t}\mathrm{d}t, y=\int_0^{x}\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$.

解 1. 不同,因为对应法则不同. $y=\sqrt{x^2}$中,当 $x\geqslant 0$ 时,$y\geqslant 0$;当 $x<0$ 时,$y>0$. $y=x$ 中,当 $x\geqslant 0$ 时,$y\geqslant 0$;当 $x<0$ 时,$y<0$;

2. 相同,因为对任意的 x,$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 恒成立;

3. 不同,因为定义域不同,$y=\lg x^2$ 的定义域是$\left\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq 0\right\}$;$y=2\lg x$ 的定义域是$\left\{x \mid x\in\mathbf{R}, x>0\right\}$;

4. 相同,因为由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{2t}\mathrm{d}t\right)=\frac{\sin x^2}{x}$,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x}\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t\right)=\frac{\sin x^2}{x}$ 知两函数相差一个常数,当 $x=0$ 时函数值相等,所以此常数为零,故两函数相等.

【例 1-2】 下列表示同一个函数的是(　　).

A. $\log_2(x+1)^2$ 和 $2\log_2(x+1)$　　B. $\sqrt{(x+1)^2}$和$|x+1|$

C. $\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$和 $x+1$　　D. $\sqrt{x(x+1)}$和$\sqrt{x}\sqrt{x+1}$

解 由定义知,故选 B.

1.3.2 求函数的定义域

求定义域时常用的几个结论如下.

1)函数关系中若有分式,则分母不为零;

2)偶次方根下,表达式大于或等于零;

3)函数中有对数,则其真数大于零,其底数大于零且不等于1;

4)正切函数、余切函数要注意其定义域分别为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,$(k\pi-\pi,k\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$;

5)反正弦函数$y=\arcsin x$、反余弦函数$y=\arccos x$中x的取值要符合其定义域,即$|x|\leqslant1$;

6)分段函数的定义域为其各分段中x取值的并集;

7)当一个表达式中同时有以上几种情况时,取它们的交集.

【例1-3】 求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{1}{\log_2(x+1)}$;　　(2)$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{1+x}$;

(3)$y=\arccos\dfrac{2-x}{3}$;　　(4)$y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$.

解(1)只需$x+1>0$,且$x+1\neq1$,即定义域为$(-1,0)\cup(0,+\infty)$;

(2)$1-x^2\neq0,1+x\geqslant0$,即$x\neq\pm1$,且$x\geqslant-1$,取它们的交集,

所以定义域为$(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3)$\left|\dfrac{2-x}{3}\right|\leqslant1$,即$|2-x|\leqslant3$,

所以定义域为$[-1,5]$;

(4)$2-x^2>0$,得,$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$;再由$\left|\dfrac{1}{2}x-1\right|\leqslant1$,得,$x\in[0,4]$,取它们的交集,

所以定义域为$\left[0,\sqrt{2}\right)$.

【例1-4】 (2007年真题)函数$y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$的定义域为____________.

解 由$-1\leqslant\dfrac{2x-1}{3}\leqslant1$知,定义域为$\left\{x\mid-1\leqslant x\leqslant2\right\}$.

【例1-5】 (2008年真题)函数$y=\ln x+\arcsin x$的定义域为____________.

解 由$\begin{cases}x>0\\-1\leqslant x\leqslant1\end{cases}$知,定义域为$\left\{x\mid0<x\leqslant1\right\}$.

【例1-6】 (2010年真题)函数$y=\sqrt{1-x^2}-\arccos\dfrac{x+1}{2}$的定义域是(　　).

A. $[-3,1]$　　B. $[-3,-1]$　　C. $[-3,-1)$　　D. $[-1,1]$.

解 $\because\begin{cases}1-x^2\geqslant0,\\-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant1\end{cases}$,$\therefore\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant1\\-2\leqslant x+1\leqslant2\end{cases}$,即$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant1\\-3\leqslant x\leqslant1\end{cases}$,

$\therefore-1\leqslant x\leqslant1$,故选D.

【例1-7】 已知函数$y=f(x)$的定义域为$[-1,2]$,求函数$y=f(2x+1)$的定义域.

解 因为函数$y=f(x)$的定义域为$[-1,2]$,所以$-1\leqslant2x+1\leqslant2$,解之得$-1\leqslant x\leqslant$

$\frac{1}{2}$,即函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

【例 1-8】 设 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$,$u=\varphi(x)=x+1$,求复合函数 $f(\varphi(x))$ 的定义域.

解 因为 $f(u)$ 的定义域为 $|u|\leqslant 2$,即 $[-2,2]$,$\varphi(x)$ 的定义域为,所以由 $|u|=|x+1|\leqslant 2$,得函数 $f(\varphi(x))$ 的定义域为 $[-3,1]$.

1.3.3 复合函数

1. 已知函数 $f(x)$,$g(x)$ 的解析式,求 $f(g(x))$ 的解析式

【例 1-9】 设 $f(x)=3x^2+2x$,$g(x)=\lg(1+x)$,求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$.

解 $f(g(x))=3g^2(x)+2g(x)=3\lg^2(1+x)+2\lg(1+x)$,$(x>-1)$

$$g(f(x))=\lg(1+f(x))=\lg(3x^2+2x+1),(x\in\mathbf{R}).$$

【例 1-10】 (2006 年真题)设 $f(x)=\sin x$,$g(x)=\begin{cases}x-\pi, & x\leqslant 0\\ x+\pi, & x>0\end{cases}$,则 $f(g(x))=$ ( ).

A. $\sin x$　　B. $\cos x$　　C. $-\sin x$　　D. $-\cos x$

解 $f(g(x))=\begin{cases}\sin(x-\pi)=-\sin x, & x\leqslant 0\\ \sin(x+\pi)=-\sin x, & x>0\end{cases}$,故选 C.

【例 1-11】 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$,则当 $x\neq 0$ 时,$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=$ ( ).

A. $\frac{x-1}{x}$　　B. $\frac{x}{x-1}$　　C. $1-x$　　D. x

解 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}=1-x$,故选 C.

2. 已知 $f(g(x))$ 的解析式,求函数 $f(x)$ 的解析式

这类题目的解法主要有两种,一是"拼凑法",二是"换元法".

【例 1-12】 设 $f(x+1)=x^2+2x+2$,求 $f(x)$.

解 解法一:$\because f(x+1)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$,

$\therefore f(x)=x^2+1$.

解法二:令 $x+1=t$,$\therefore x=t-1$,代入 $f(x+1)=x^2+2x+2$ 中,得

$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)+2$,

整理得 $f(t)=t^2+1$,即 $f(x)=x^2+1$.

【例 1-13】 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$.

解 解法一:$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1=(e^x+1)^2-(e^x+1)+1$,

$\therefore f(x)=x^2-x+1$.

解法二:令 $e^x+1=t$,$x=\ln(t-1)$,原式化为

$f(t)=e^{2\ln(t-1)}+e^{\ln(t-1)}+1=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1$,

即

$$f(x)=x^2-x+1.$$

1.3.4 求函数值

解这类题目时,要特别注意原来函数的定义域,而且如果所求函数的变量是一个表