泛复变函数

及其

在数学与物理中的应用

熊锡金

通化师范学院

泛复函及其在物理中的应用研讨会

开　幕　词

通化师院　　熊锡金

各位代表：

今天，全国各地近百名数学物理工作者来到鸭绿江畔聚会，对新兴的数学分支——泛复变函数，进行一次集中的研讨。这是我们吉林省的光荣，也是我们通化师院的荣幸。我再次代表通化师范学院，特别是师院的数学、物理教师向我们的同行表示热烈地欢迎。

人类历史往往是螺旋式地发展的。在人们已经掌握了各种深奥的科学理论，采用了众多复杂技术手段的今天，可能会发现我们离开科学真理的本源愈来愈远了。生命和物质，这些最熟悉的东西是科学金字塔才得以建立起来的源泉。基于它们科学才有当今的高度。但是，我们对这些事物的本源又认识了多少呢？于是人们回过头研究最基础的东西，物质的基本粒子和人体科学本身。

数学也是一样。虽然它已发展得令人眼花瞭乱，它的许多细微结构也已都被人们了如指掌，但我们似乎也距离数学的本源愈来愈远了。某些数学中最熟悉的东西，例如数和被称为加减乘除的四则运算，也是数学金字塔的基础。现今的一切科学也都离不开它们，但是，人们对这种科学的基础又了解得怎样呢？因之，人们也转过身来，正视一下自己最熟悉的东西，也许里面会含有点新意，人们就开始研究群、环、体、模，研究函数、方程。

泛复变函数的引入也是出于上述的背景。它的中心在于引入一种广泛的、具有通常意义的四则运算体系，并建立其中的的分析学，使数学本身和其它学科特别是物理学增添一种有用工具。

近年来，世界各国数学家都从不同的角度，在各各不同的方向，对各种泛复变函数的特例进行了许多探讨，有些工作是很深刻的。在其它数学领域也得以应用。在一些国际会议上也受到重视。但是，当人们砍倒一颗大树获取木材时，并不注意培育它周围的许多幼林。不去认识由于幼林中有着许多不同的品系。从而它们的成长不仅会带来木材，也许会给人类带来各种果实、药材、许许多多的化工产品等等。

对于泛复变函数的研究，以往，也陷入了上述类似的状态。我们这次会议的目标就是要确立对这一数学分枝从整体上来进行研究的必要性。认定这些内容的基础性，认定这一基本方法应该是数学物理工作者的必备知识。从而争取它成为研究生或普通大学生的一门选修课。而不仅仅是一种讲座。这对我国在泛复函的发展中保持领先地位将是一重大的步骤。也将对国际数学和物理学界这一领域的研究起促进作用。

各位代表的光临，为达到这一目标创造了良好的条件。代表们来自我们祖国各地，这对我国在泛复变函数研究的推广与普及上将有十分重要的意义，希望代表们对这一领域的基础完善，发展方向以及在其它学科中的应用等方面多述己见，尽情交流。

各位代表，由于条件和水平的限制，会议组织准备上可能出现许多不足之处。例如生活安排不好，材料印刷质量差等。望大家多予海涵。各位代表的光临是这次会议能得以召开的首要条件。集安县的同志们提供了良好的会议环境也是甚为重要的。在此一并表示衷心地感谢。

最后，祝代表们在祖国边陲、塞外江南——通化地区生活愉快，身体健康！祝大会成功！

谢谢大家！

1986.7.20 集安

前　　言

许多实验物理学家今天同样对接受在理论物理学家的语言中愈来愈流行的很深奥的数学感到犹豫不安。

——杨振宁

这本书是想把作者窥见的这繁花似锦世界的一角的影象敬献在大家面前。为了让更多的人能欣赏这幅图景，我力求使它不需要艰深的预备知识，但在内容上却对数理专业的人也不无兴趣。复变函数对科学的巨大作用已为众所周知。作为复函推广的泛复变函数就很可能给专业人员增添一种新的工具，使之在解决某些问题时更为方便。因此请大家原谅，这里就不追求那种纯粹数学的过份严谨。因而也就摆脱了那种令人犹豫不安深奥的数学语言。

所谓人类对某一问题"求解"，即是将未知事物由已知某些性质的东西表达出来。如二次代数方程的解用根式表达，二维调和方程的解由复变解析函数表达等等。因而人类已知的东西越多，材料就越丰富，用以表达未知事物的方式就更加多彩，道路就更为宽广。泛复变函数也试图在人类知识大厦中增添一种材料，随时可以备用。

当然，每个人都可根据自己的爱好和需要来选读有关章节。例如，对代数不感兴趣的读者可越过第一章；而对复函较熟悉的数理工作者如需掌握一些内容作为工具，那么只要选择

各章中的典型例子看看就可以了。这本书还写进了由于种种原因作者所未完成的猜测和一些课题，这些可能引起读者的研究兴趣。

这本书只是在一片广袤无垠的沃土上引进了一点种子，而各种新苗的培育，期待着大家的耕耘。我深信，这一花园中的果木定会在关心它成长的人们手中出现许多珍贵多彩的品系，获得无数丰硕甜蜜的果实。

朱静航老师的教诲，吴学谋先生的指导，肖 荫 庵、马龙军、李武明、李龙景、阎英纪、丁有杰、曲波、林昆志、刘秋红、张利等同事有益的讨论，使这本书许多章节增添了光彩。其中有的结果也是他们得到的。特别是马龙军老师做了 大 量编写工作，在此一并致以谢意。

编著者

一九八六年元月

目　　录

第一章　数的扩充

第二章　泛复变函数

第三章 应用

第一章 数的扩充

下一个重要的代数创造由哈密尔顿所创始。揭开了全新的领域，打破了对于“数”所必须遵循的规则的古老信念。

——M·克莱因

从实数到具有良好性质的复数，人们陶醉于自己的胜利，但在欢呼之余，邦德列雅金拓扑域定理象在泼水节中洒出的一大盆水，使大家冷静下来。他说，不会再有比复数更大但和它性质完全相同的集合。的确是这样，但不必过份沮丧，平行的路也许是可以找到的。

§1 平面泛复数

泛复数的严格定义将在§7中叙述，这里让我们先获得一些感性认识。

定义1 实数域可以添加三种不同的非实域中的元素——虚单位i、j、k，它们分别满足下面等式及构成三种平面复数，统称为平面泛复数或称为圆锥复数。

椭圆数 $a=\alpha+\beta i$ 满足 $i^2+1=0$ 简记为C

抛物数 $a=\alpha+\beta k$ 满足 $k^2=0$ 简记为P （1）

双曲数 $a=\alpha+\beta j$ 满足 $j^2-1=0$ 简记为H

其中，α、β为实数，称α为a的实部，记为$\mathrm{Re}\,a=\alpha$。β为a的虚部，记为$\mathrm{Im}\,a=\beta$。

读者也许纳闷，j不就是±1吗？k不就是0吗？非也，因i、j、k都不是实域中的元素，即对1和j或1和k，在实数中

找不到不全为零的元素α、β，使得$\alpha\cdot 1+\beta\cdot j=0$ 或$\alpha\cdot 1+\beta\cdot k=0$。而$\pm 1$和0则不然。

定义2　用e代替i、j、k之中任一虚单位，与定义1吻合的平面复数运算是：

加减法：

$$(\alpha+\beta e)\pm(\gamma+\delta e)=(\alpha\pm\gamma)+(\beta\pm\delta)e$$

乘　法：

$$(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

$$(\alpha+\beta k)\cdot(\gamma+\delta k)=\alpha\gamma+(\alpha\delta+\beta\gamma)k \qquad (2)$$

$$(\alpha+\beta j)\cdot(\gamma+\delta j)=(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)j$$

定义3　$a=\alpha+\beta e$　的共轭元为$\bar{a}=\alpha-\beta e$，易知$a\bar{a}$为实数。对两个非零泛复数a和b，如果$a\cdot b=0$，则称a和b为共轭零因子。

显然，椭圆复数中没有零因子。而双曲复数中的共轭零因子是$\lambda_1(1+j)$及$\lambda_2(1-j)$。抛物复数中的共轭零因子是$\lambda_1 k$与$\lambda_2 k$。

定义4　除法

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i \quad (\gamma、\delta不全为0)$$

$$\frac{\alpha+\beta k}{\gamma+\delta k}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}k \quad (\gamma\neq 0) \qquad (3)$$

$$\frac{\alpha+\beta j}{\gamma+\delta j}=\frac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\gamma^2-\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2-\delta^2}j \quad (\gamma\neq\pm\delta)$$

易知，零和零因子不能作除数。

如果引进新的算符$\oplus$，乘、除定义也可统一为：

$$(\alpha+\beta e)\cdot(\gamma+\delta e)=(\alpha\gamma-\oplus\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)e$$

$$\frac{\alpha+\beta e}{\gamma+\delta e}=\frac{\alpha\gamma\oplus\beta\delta}{\gamma^2\oplus\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2\oplus\delta^2}e \qquad (4)$$

其中规定 $\oplus=\begin{cases} + & e=i \\ +0\times & e=k \\ - & e=j \end{cases}$

它们满足的条件（1）也可以统一成

$$e^2\oplus 1=0 \qquad (1')$$

定义5　如果$a\cdot b=1$则称a与b互为逆元。
显然，非零和非零因子a均有逆元

$$a^{-1}=\frac{1}{a}=\frac{\bar{a}}{a\bar{a}} \qquad (5)$$

这种元素一般称为正则元。

例如，$a=1+3k$ 的逆元是$a^{-1}=1-3k$。$a=2-j$的逆元是$a^{-1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}j$

圆锥复数的开方运算可能会有一定的条件限制，对椭圆复

数一般n次方根有n个根，其它就不一定了。例如双曲复数中平方根有四个或没有。如果双曲复数平方根存在，则这四个方根在不同的区限。我们分别记为$\sqrt[\mathrm{I}]{a}$、$\sqrt[\mathrm{II}]{a}$、$\sqrt[\mathrm{III}]{a}$、$\sqrt[\mathrm{VI}]{a}$。写出来就是

$$\sqrt{a}=\sqrt{\alpha+\beta j}=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\alpha+\beta}\pm\sqrt{\alpha-\beta}\right)+\frac{j}{2}\left(\pm\sqrt{\alpha+\beta}\mp\sqrt{\alpha-\beta}\right) \tag{6}$$

符号顺序由第一括号而定。上式是在条件$\alpha\geq\beta\geqslant-\alpha$时成立。不满足此条件时无平方根。

例1　在C、P、H中分别求下列方程的解

$$Z^4-4Z^2=0$$

解　原方程变形为$Z^2(Z^2-4)=0$

在C中　　$Z=0$，$Z=\pm2$。

在P中　　$Z=0$，$Z=\pm2$，$Z=\lambda k$（λ为实数）

在H中　　$Z=0$，$Z=\pm2$，$Z=\pm2j$。

例2　试用矩阵定义H

解　令$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$　　$J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

由于I、J在R上线性无关，因此$A=\alpha I+\beta J$构成一种数，其中α，$\beta\in R$。

易知$IJ=JI=J \qquad J^2=I$

因此，它的运算规律全同于H。

§2　圆锥复整的几何意义

可用平面直角坐标系中的点和向量来与三种复数对应，这三种平面分别称为椭圆平面（C）、抛物平面（P）和双曲平面（H）。

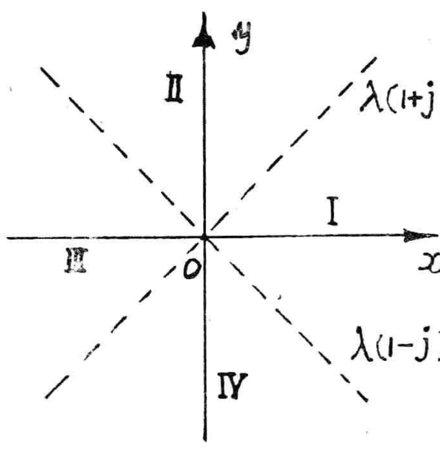
定义6　非负实数$|a|_M$叫做a的模：

$$|a|_M=\sqrt{|a\cdot\bar{a}|}=\begin{array}{ll}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} & a=\alpha+\beta i\\ |\alpha| & a=\alpha+\beta k\\ \sqrt{|\alpha^2-\beta^2|} & a=\alpha+\beta j\end{array}\qquad (7)$$

或简记为：$|a|_M=\sqrt{|\alpha^2 \oplus \beta^2|}$

当$|a|_M=0$时称a为零模数。显然a为零模数的充分必要条件是a为零或零因子。

若全体零模数的集合记为Z_0。则Z_0的图形如图1，即在C平面上是原点（$x=y=0$）P平面上是纵轴$x=0$）在H平面上是垂直的两直线（$x\pm y=0$）



椭园平面的零模点是孤立的而抛物与双曲平面的零模点则是连续的。后者将抛物平面分成左、右两区限；将双曲平面分成四个区限；我们把P 平面右区限，H平面的第1区限叫做主区限。

关于平面泛复数的模可以得到以下一些规律：

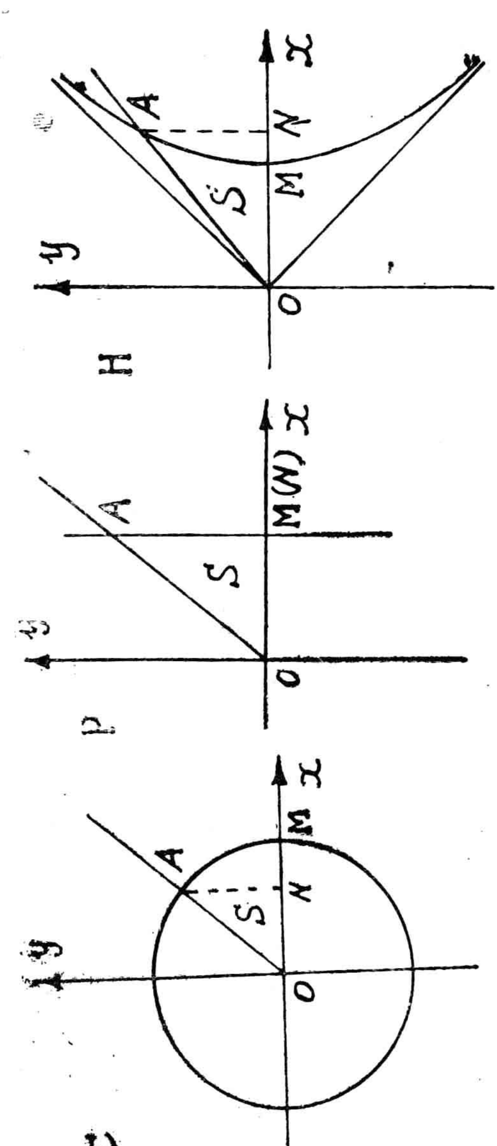
定理1　如果a、b在同一区限，则

$$
\begin{aligned}
|a+b|_M &\leq |a|_M + |b|_M \qquad a、b\in C \\
|a+b|_M &= |a|_M + |b|_M \qquad a、b\in P \qquad (8) \\
|a+b|_M &\geq |a|_M + |b|_M \qquad a、b\in H
\end{aligned}
$$

定理2　在三种平面上，两点a_1、a_2的拟距离均定义为$d=|a_1-a_2|_M$。那么，按拟距离定义，仅有椭圆平面是欧氏平面，而另两个则不然。

在C、P、H平面建立起直角坐标系后，以原点为中心，通过园锥复数a的对应点A分别在C平面上作圆，在P平面上作与y轴平行的直线，在H平面上作等轴双曲线，得如下图形

图2见后页


C
P
H
O
M
N
A
S
M(N)
x
y

那么$\alpha = ON$，$\beta = AN$，且有$r = oM = |a|_M$。设曲边三角形OMA的面积为S则称$\theta = \frac{2S}{r^2}$为a的幅角。

圆锥复数的指数函数式：

设园锥复数为$a = \alpha + \beta e$，在主区限中，它可以写成指数形式，也称为广义欧拉公式：

$$a = r\exp(\theta e) = \begin{cases} r(\cos\theta + i\sin\theta) & e \in C \\ r(1 + k\theta) & e \in P \\ r(\mathrm{coh}\theta + j\,\mathrm{sh}\theta) & e \in H \end{cases} \qquad (9)$$

其中，模长$r = |a|_M$，θ为幅角。它们的几何意义就是上面所述的。不难求得

$$\theta = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\alpha} & e \in C \\ \frac{\beta}{\alpha} & e \in P \\ \mathrm{arcth}\,\frac{\beta}{\alpha} & e \in H \end{cases} \qquad (10)$$

其它区限也有类似的形式，但符号有区别。

这个指数式便于进行乘、除运算，即对于圆锥复数$b = r'\exp(\theta' e)$有

$$a \cdot b = rr'\exp[(\theta + \theta')e],$$

$$\frac{a}{b} = \frac{r}{r'}\exp[(\theta - \theta')e]$$

因而也有广义棣莫弗公式：

$$a^n=[r\exp(\theta e)]^n=r^n\exp(n\theta e)$$

$$=\begin{cases} r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) & e\in c \\ r^n(1+nk\theta) & e\in p \\ r^n(\mathrm{ch}\,n\theta+j\,\mathrm{sh}\,n\theta) & e\in H \end{cases} \quad (11)$$

指数n也可以推广到分指数与无理数等情况。

例　　试证明双曲复数指数函数式中模长与幅角和其几何意义中的模长、幅角在主区限内是一致的。

证明　在指数式中$a=\alpha+\beta j=r(\mathrm{ch}\theta+j\mathrm{sh}\theta)$因此

$\alpha=r\mathrm{ch}\theta$，$\beta=r\mathrm{sh}\theta$。由此可得$r=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$　$\theta=\mathrm{arth}\dfrac{\beta}{\alpha}$

在几何表示中，由于A点的坐标为(α,β)，则等轴双曲线方程为

$$\frac{x^2}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{y^2}{\alpha^2-\beta^2}=1$$

因此，$r=oM=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$。经计算，曲边三角形AOM的面积$S=\dfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)\mathrm{arth}\dfrac{\beta}{\alpha}$，所以有

$$\theta=\frac{2s}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{2s}{r^2}=\mathrm{arth}\frac{\beta}{\alpha}$$

在泛复数中的模$|\cdot|_M$不满足一般范数的三条公理，它和通常定义的范数$\|\cdot\|$不是同一量，在椭园复数中它们是同一个量。一般园锥复数的范数以及由此产生的距离空间将由后面叙述。

猜测1　按$|\ |_M$建立的拟距离空间，将导致一类新的拓扑空间，可能引入一类新的几何学与分析学。

圆锥复数与非欧几何有关。它们分别对应的是C欧几里得几何，P：伽里略几何，H：闵可夫斯基几何。

习　题　一

1　计算

①　$(2+3j)(2-j)$　　②　$(1+2k)^4$

③　$\dfrac{2+3k}{3-k}$　　④　$(2+3j)^2$

⑤　$(2-j)^{-1}$　　⑥　$\sqrt{5+4j}$

2　试求下列方程分别在C、P、H中的解

$$Z^6-Z^2=0$$

3　试用符号"⊕"表示$(\alpha+\beta e)^{-1}$

4　在C、P、H中，下列点集的图形是什么？

①　$\mathrm{Im}(Z+1)>0$　　②　$\mathrm{Re}Z^2=0$

5　试证$|a|_M=|\bar{a}|_M=|a^{-1}|_M^{-1}$

6　在C、P、H中，$|x+ye|_M=5$分别表示什么曲线？

7　试求$\sqrt{\alpha+\beta k}$之值。由此讨论P中方根的规律。