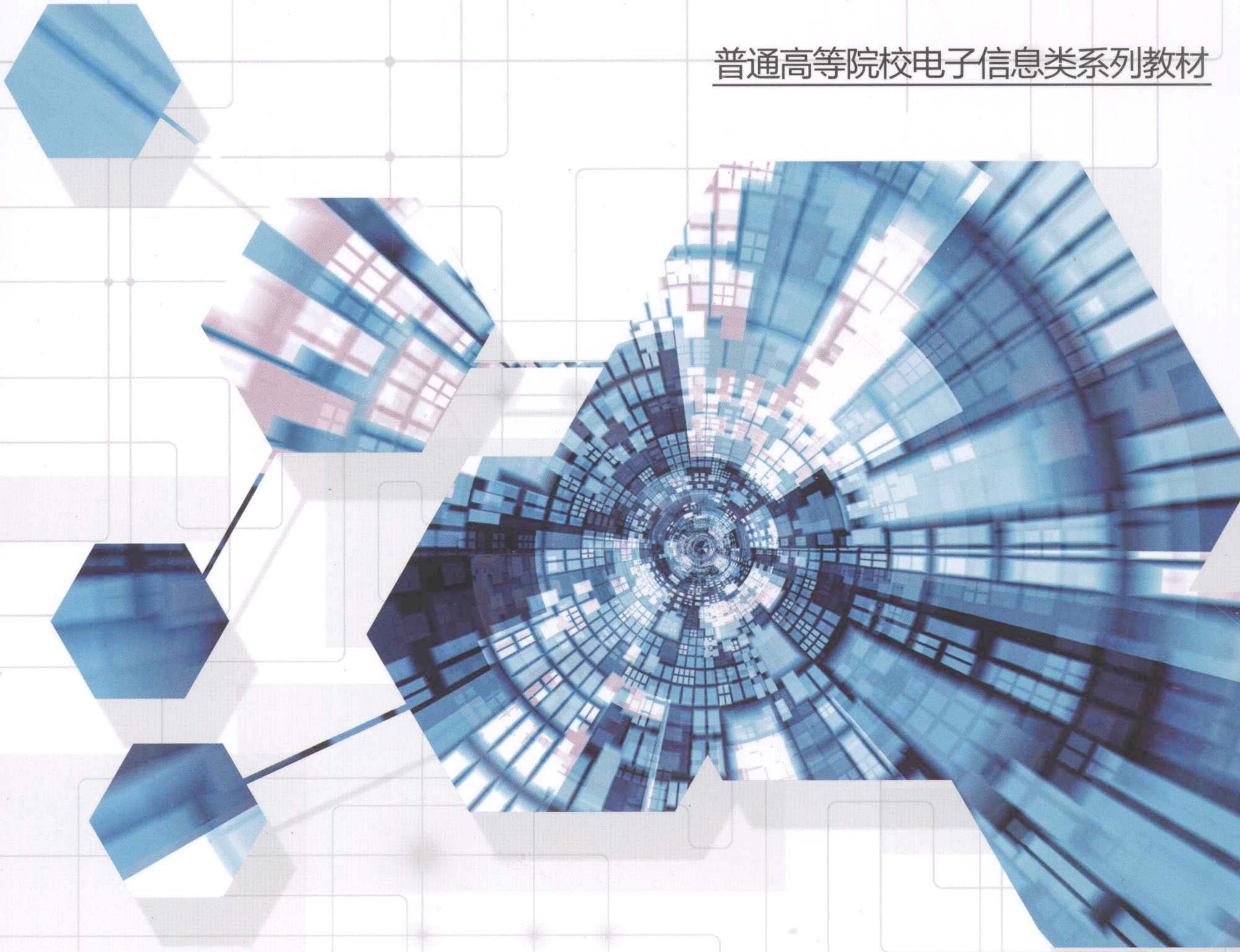
普通高等院校电子信息类系列教材



DIANCICHANG YU DIANCIBO JIANMING JIAOCHENG

电磁场与电磁波简明教程

刘文楷　董小伟　牛长流◎编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等院校电子信息类系列教材

电磁场与电磁波简明教程

刘文楷　董小伟　牛长流　编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是作者多年来从事电磁场与电磁波课程教学成果的总结。全书共分6章，内容包括：矢量分析、静电场、恒定电场、稳恒磁场、时变电磁场、平面电磁波的传播。各章后均附小结和习题，索引处给出了常用物理量的符号和单位。本书在编写过程中遵循由特殊到一般、由简单到复杂、循序渐进的原则，内容简练且通俗易懂，力求加强基础、重注物理概念、拓展实际问题。本书可作为普通高等院校相关专业学生的教材或参考用书，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波简明教程 / 刘文楷，董小伟，牛长流著．--北京：北京邮电大学出版社，2013.8

ISBN 978-7-5635-3574-3

Ⅰ．①电… Ⅱ．①刘… ②董… ③牛… Ⅲ．①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 Ⅳ．①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第165800号

书　　名：电磁场与电磁波简明教程
著作责任者：刘文楷　董小伟　牛长流　编
责 任 编 辑：何芯逸　张国申
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京联兴华印刷厂
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：9
字　　数：206千字
印　　数：1—3 000册
版　　次：2013年8月第1版　2013年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-3574-3　　　　**定　价**：22.00元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

符号、物理量及单位

符号	物理量	国际单位	简写
$\boldsymbol{A}$	矢量磁位	韦伯/米	Wb/m
$\boldsymbol{B}$	磁通密度	特拉斯或韦伯/平方米	T 或 Wb/m^2
C	电容	法拉	F
$\boldsymbol{D}$	电通密度	库仑/平方米	C/m^2
d	距离,直径	米	m
$\boldsymbol{E}$	电场强度	伏特/米	V/m
$\boldsymbol{H}$	磁场强度	安培/米	A/m
I	电流	安培	A
$\boldsymbol{J}_V$	体电流密度	安培/平方米	A/m^2
$\boldsymbol{J}_S$	面电流密度	安培/米	A/m
L	电感	亨利	H
l	长度	米	m
$\boldsymbol{M}$	磁化强度矢量	安培/米	A/m
$\boldsymbol{P}$	极化强度矢量	库仑/平方米	C/m^2
Q,q	电荷	库仑	C
R	电阻	欧姆	Ω
S	坡印廷矢量	瓦特/平方米	W/m^2
$\boldsymbol{S}_{av}$	平均坡印廷矢量	瓦特/平方米	W/m^2
U	电压	伏特	V
W	能量	焦耳	J
ω	角频率	弧度/秒	rad/s
ε	介电常数	法/米	F/m
ε_r	相对介电常数	无纲量	
λ	波长	米	m
μ	磁导率	亨/米	H/m
μ_0	真空磁导率	亨/米	H/m
μ_r	相对磁导率	无纲量	
ρ_l	线电荷密度	库仑/米	C/m
ρ_s	面电荷密度	库仑/平方米	C/m^2
ρ_V	体电荷密度	库仑/立方米	C/m^3
σ	电导率	西门子/米	S/m
Φ	磁通	韦伯	Wb
Ψ	电通	库仑	C
χ_e	电极化率	无纲量	
χ_m	磁化率	无纲量	

前言

电磁场理论是高等工科院校电类专业的一门专业基础课，同时也是一些交叉学科和新兴边缘科学发展的基础。电类专业的学生必须具备相关的知识，才能适应社会对高素质人才的需求。

由于目前很多电磁场理论教学用书内容过于繁杂，学生普遍感到概念抽象、难学难懂。为了适应当前高等教育改革的特点，在总结多年教学经验的基础上，编写《电磁场与电磁波简明教程》，力求加强基础，重注物理概念，拓展实际问题，以激发学生对这门课程的兴趣，培养学生对基础知识的牢固掌握和灵活运用能力。

本书作为高等工科院校电类专业本科生学习电磁场理论的一本简明教学用书，在编写过程中遵循由特殊到一般、由简单到复杂、循序渐进的原则，重注电磁模型的建立和定性分析，有意识地加强学生对基本规律、基本概念和基本分析方法的理解和掌握程度。本书的主要特色如下：

(1) 以矢量分析作为第 1 章，使学生掌握分析学习“场”的数学工具，为后续描述电磁场基本特征打下数学基础。

(2) 以基本实验现象为起点，引出“静电场”和“恒定磁场”的概念；以基本方程为主线，结合边值问题，提出静电场和恒定磁场的分析方法，突出知识点的联系和区别。

(3) 以麦克斯韦方程为基础，引出时变电磁场的基本特征和平面波的传播规律，注重知识的概念性和延续性。

(4) 每章正文均设小标题，层次分明；各章后均附小结，重点突出；选编难易结合的习题，以便不同层次的学生可根据自身情况来加强对知识点的理解。

全书共分为 6 章，即矢量分析、静电场、恒定电场、稳恒磁场、时变电磁场和平面电磁波的传播。每章均附有小结和习题。

由于水平有限，对于书中的不妥和错误之处，衷心欢迎使用本书的师生和其他读者批评指正。

目录

第1章　矢量分析 ………… 1

1.1　标量和矢量 ………… 1
1.1.1　标量 ………… 1
1.1.2　矢量 ………… 1
1.1.3　单位矢量 ………… 1
1.1.4　矢量的分量 ………… 1
1.1.5　矢量的运算 ………… 2
1.2　三种坐标系 ………… 3
1.2.1　直角坐标系 ………… 3
1.2.2　圆柱坐标系 ………… 3
1.2.3　球坐标系 ………… 4
1.2.4　三种坐标系中的微分元 ………… 5
1.3　标量场的梯度 ………… 6
1.4　矢量场的通量和散度 ………… 7
1.4.1　矢量场的通量 ………… 7
1.4.2　矢量场的散度 ………… 8
1.4.3　散度定理 ………… 8
1.5　矢量的环量和旋度 ………… 9
1.5.1　矢量的环量 ………… 9
1.5.2　矢量的旋度 ………… 9
1.6　矢量场的若干定理和场的分类 ………… 10
1.6.1　格林定理 ………… 10
1.6.2　唯一性定理 ………… 11
1.6.3　场的分类 ………… 11
1.7　矢量恒等式 ………… 12
小结 ………… 12
习题 ………… 13

第 2 章　静电场 …………………………………………………………… 15

2.1　库仑定律………………………………………………………………… 15
2.2　电场强度………………………………………………………………… 16
2.3　真空中的高斯定理……………………………………………………… 19
2.3.1　电场线……………………………………………………………… 19
2.3.2　电场通量…………………………………………………………… 20
2.3.3　高斯定理…………………………………………………………… 20
2.3.4　高斯定理的应用…………………………………………………… 21
2.4　电位及其梯度…………………………………………………………… 22
2.4.1　静电场力做功……………………………………………………… 22
2.4.2　电位及其梯度……………………………………………………… 24
2.4.3　电位的计算………………………………………………………… 25
2.5　介质中的静电场………………………………………………………… 26
2.5.1　介质的极化………………………………………………………… 26
2.5.2　介质中静电场的基本方程………………………………………… 27
2.6　边界衔接条件…………………………………………………………… 29
2.6.1　电场强度满足的衔接条件………………………………………… 30
2.6.2　电位移满足的衔接条件…………………………………………… 30
2.6.3　静电场的折射定理………………………………………………… 31
2.6.4　导体和介质的分界面上场量满足的衔接条件…………………… 31
2.6.5　位函数的衔接条件………………………………………………… 32
2.7　静电场的边值问题……………………………………………………… 33
2.7.1　电位满足的方程…………………………………………………… 33
2.7.2　边界条件…………………………………………………………… 34
2.8　镜像法…………………………………………………………………… 36
2.8.1　点电荷与无限大的导体平面……………………………………… 37
2.8.2　点电荷与接地导体球面…………………………………………… 38
2.8.3　点电荷与无限大的介质平面……………………………………… 39
2.9　直角坐标系中的分量变量法…………………………………………… 40
2.10　静电场的能量 ………………………………………………………… 43
2.10.1　静电场的储能 …………………………………………………… 43
2.10.2　静电场能量的分布 ……………………………………………… 45
小结 ………………………………………………………………………… 46
习题 ………………………………………………………………………… 47

第 3 章　恒定电场 …… 52

3.1　电流及其密度…… 52
3.1.1　电流…… 52
3.1.2　电流密度…… 53
3.1.3　电流连续方程…… 54
3.2　电源及其电动势…… 54
3.2.1　导电媒质的损耗…… 54
3.2.2　电源及其电动势…… 55
3.3　恒定电场的基本方程　分界面上的衔接条件…… 56
3.3.1　恒定电场的基本方程…… 56
3.3.2　分界面上的衔接条件…… 56
3.4　恒定电场的边值问题…… 57
小结 …… 58
习题 …… 58

第 4 章　稳恒磁场 …… 61

4.1　磁感应强度…… 61
4.1.1　毕奥-萨法尔定律 …… 61
4.1.2　磁通连续性原理…… 63
4.1.3　安培力定律…… 63
4.2　安培环路定理…… 65
4.2.1　真空中的安培环路定理…… 65
4.2.2　媒质的磁化…… 65
4.2.3　媒质中的安培环路定理…… 66
4.3　磁矢位和磁标位…… 67
4.3.1　磁矢位…… 67
4.3.2　磁标位…… 69
4.4　恒定磁场的基本方程和分界面上的衔接条件…… 69
4.4.1　恒定磁场的基本方程…… 69
4.4.2　不同媒质分界面上的衔接条件…… 70
4.5　恒定磁场的边值问题…… 72
4.5.1　位函数满足的微分方程…… 72
4.5.2　恒定磁场的边值问题…… 73
4.6　镜像法…… 74
4.7　电感…… 76
4.7.1　自感…… 76

4.7.2 互感 …… 77
4.8 磁场的能量 …… 78
小结 …… 80
习题 …… 81

第5章 时变电磁场 …… 85

5.1 麦克斯韦方程 …… 85
5.1.1 麦克斯韦第一方程——修正的安培环路定律和全电流连续方程 …… 85
5.1.2 麦克斯韦第二方程——电磁感应定律的广义化 …… 87
5.1.3 麦克斯韦第三方程和第四方程 …… 88
5.1.4 辅助方程 …… 89
5.2 时变电磁场的边界条件 …… 90
5.2.1 一般情况 …… 90
5.2.2 特殊情况 …… 91
5.3 时变电磁场的能量关系 …… 92
5.4 时变场的动态位 …… 95
5.4.1 动态位 …… 95
5.4.2 动态位的微分方程 …… 95
5.4.3 正弦电磁场的复数表示法 …… 96
5.4.4 麦克斯韦方程的复数形式 …… 97
5.4.5 波印廷定理的复数形式 …… 98
5.4.6 动态位的复数形式 …… 99
小结 …… 101
习题 …… 102

第6章 平面电磁波的传播 …… 105

6.1 电磁波动方程和平面电磁波 …… 105
6.1.1 自由空间电磁波动方程 …… 105
6.1.2 平面电磁波及基本性质 …… 106
6.2 理想介质中的均匀平面电磁波 …… 107
6.2.1 一维波动方程的解及其物理意义 …… 107
6.2.2 理想介质中的正弦均匀平面波 …… 109
6.2.3 计算举例 …… 111
6.3 导电媒质中的均匀平面电磁波 …… 112
6.3.1 导电媒质中正弦均匀平面波的传播 …… 112
6.3.2 低损耗介质中的正弦均匀平面波 …… 115
6.3.3 良导体中的正弦均匀平面波 …… 115

6.3.4　计算举例 …………………………………………………………………… 116
6.4　均匀平面电磁波的反射与透射 ……………………………………………… 118
6.4.1　反射定律与透射定律 ……………………………………………………… 118
6.4.2　反射系数与透射系数 ……………………………………………………… 119
6.4.3　垂直入射电磁波的反射与透射 ………………………………………… 121
小结………………………………………………………………………………… 125
习题………………………………………………………………………………… 126

参考文献………………………………………………………………………… 130

第1章 矢量分析

电磁场理论着重研究电磁现象及电磁场与电磁波的基本规律，其中所涉及的一些物理量，如电场强度、磁场强度等都具有确切的物理意义。当这些物理量与空间坐标或方向有关时，通常须采用矢量的方法进行描述，这些矢量在空间的分布就构成所谓的矢量场。为了方便后续各章的学习，本章首先介绍一些基本的矢量分析和场的相关知识。

1.1 标量和矢量

1.1.1 标量

只有大小的物理量称为标量，如温度、质量、功等。

1.1.2 矢量

既有大小，又有方向的物理量称为矢量，如力、速度、加速度、电场强度等。本书统一用黑斜体的英语字母表示矢量。两个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 只有在大小相等、方向相同时，才能称两个矢量相等，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。在坐标系中，矢量用有方向的线段来表示，有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的指向表示矢量的方向。

1.1.3 单位矢量

模为1的矢量称为单位矢量，单位矢量的方向与矢量的方向一致。本书单位矢量以 $\boldsymbol{e}$ 来表示，即 $\boldsymbol{e}_a=\boldsymbol{A}/|\boldsymbol{A}|$，因此 $\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{e}_a$，其中 $A=|\boldsymbol{A}|$。

1.1.4 矢量的分量

坐标系中的一个矢量可以用三个方向上的分量来表示。例如，在直角坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z \tag{1-1}$$

其中，A_x，A_y，A_z 分别为 x，y，z 三个坐标轴上的分量，$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ 分别表示三个坐标轴方向上的单位矢量。

在直角坐标系中，$\boldsymbol{e}_a$ 可表示为

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{A_x}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{e}_x+\frac{A_y}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{e}_y+\frac{A_z}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{e}_z \tag{1-2}$$

1.1.5 矢量的运算

1）矢量的加法

矢量的加法运算满足平行四边形法则，表示为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C} \tag{1-3}$$

如图 1.1 所示。矢量加法满足交换律，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1-4}$$

同时，矢量的加法也满足结合律，即

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \tag{1-5}$$

两个矢量相加就是对应坐标轴上的分量相加。例如，在直角坐标系中，若矢量 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$，矢量 $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 在三个坐标轴上的分量分别为 A_x+B_x,A_y+B_y,A_z+B_z。

2）矢量与标量的乘积

一个矢量乘以一个标量的结果仍然是一个矢量，如 $\boldsymbol{C}=b\boldsymbol{A}$，矢量 $\boldsymbol{C}$ 的大小是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的 $|b|$ 倍：当 $b>0$ 时，矢量 $\boldsymbol{C}$ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向一致；当 $b<0$ 时，矢量 $\boldsymbol{C}$ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向相反。

3）矢量的点积和叉积

矢量的点积又称为矢量的内积，以“·”表示，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{1-6}$$

其中，θ 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角，如图 1.2 所示。

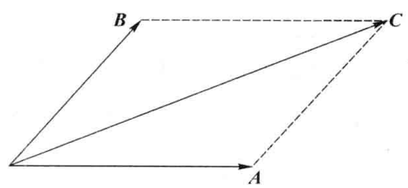


图 1.1 平行四边形法则

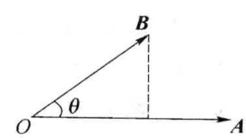


图 1.2 矢量的点积

显然

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{cases}0 & \boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}\\ |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| & \boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{B}\end{cases} \tag{1-7}$$

在直角坐标系中，如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 在三个坐标轴上的分量分别为 (A_x,A_y,A_z)、(B_x,B_y,B_z)，则两个矢量的点积为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1-8}$$

即两个矢量的点积是一个标量，数值上等于两个矢量对应坐标轴上各分量之积的和。两个矢量之间的点积满足交换律：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1-9}$$

分配律：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1-10}$$

矢量的叉积又称为矢量的外积或矢积，以“×”来表示，即

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{1-11}$$

其中，θ 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角。如图 1.3 所示，矢量 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 构成右手螺旋关系。

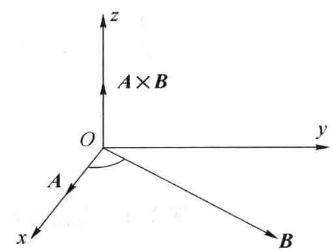


图 1.3 矢量的叉积

在直角坐标系中，如果两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$， $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$，则

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1-12}$$

1.2 三种坐标系

1.2.1 直角坐标系

直角坐标系由三个相互正交的直线构成，这三条直线分别称为 x 轴、y 轴、z 轴，三轴的交点称为坐标原点 O。直角坐标系中空间任意一点 P 的位置由其在三个坐标轴上的投影确定，如图 1.4 所示，位置矢量是由原点指向 P 点的矢量，可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z \tag{1-13}$$

x,y,z 是 P 在三个坐标轴上的投影。

在直角坐标系中，三个方向上的单位矢量 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 满足以下关系：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z=1\\&\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_z=0\\&\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y\end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

1.2.2 圆柱坐标系

如图 1.5 所示，在圆柱坐标系中，三个方向上的单位矢量分别为 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z$，任意一点的位置可由 ρ,ϕ,z 确定。其中，ρ 为原点 O 到 P 点的距离矢量在 xy 平面上的投影长度；ϕ 为此投影与 x 轴的夹角，通常称为方位角，取值范围在 $[0,2\pi]$；z 与直角坐标相同。直角坐标系和圆柱坐标系的各个分量之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}&x=\rho\cos\phi\\&y=\rho\sin\phi\\&z=z\\&r^2=\rho^2+z^2\end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

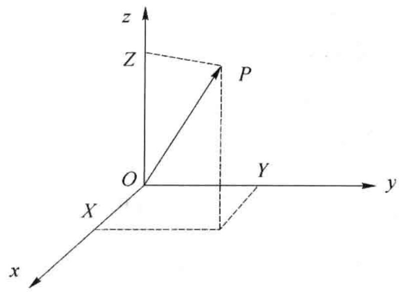


图 1.4　直角坐标系

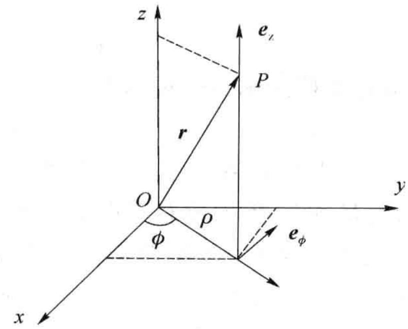


图 1.5　圆柱坐标系

圆柱坐标系中单位矢量的点积和叉积满足如下关系：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_\phi\cdot\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z=1\\&\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_\phi=0\\&\boldsymbol{e}_\rho\times\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned}\right\}\tag{1-16}$$

两种坐标系单位矢量之间的变换关系写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_\rho\\\boldsymbol{e}_\phi\\\boldsymbol{e}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi&\sin\phi&0\\-\sin\phi&\cos\phi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\\\boldsymbol{e}_y\\\boldsymbol{e}_z\end{bmatrix}\tag{1-17}$$

若矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系中表示为 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$，而在圆柱坐标系中表示为 $\boldsymbol{A}=A_\rho\boldsymbol{e}_\rho+A_\phi\boldsymbol{e}_\phi+A_z\boldsymbol{e}_z$，其中 A_ρ,A_ϕ,A_z 分别为圆柱坐标系中的分量，则两种坐标系中各分量的变换关系为

$$\begin{bmatrix}A_\rho\\A_\phi\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi&\sin\phi&0\\-\sin\phi&\cos\phi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}\tag{1-18}$$

1.2.3　球坐标系

如图 1.6 所示，在球坐标系中，任意一点的坐标可用 ρ,ϕ,θ 确定，θ 为矢量与 z 轴正方向的夹角，取值范围为[0，π]（数学上称为天顶角）。直角坐标系与球坐标系的各个分量之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}&x=r\sin\theta\cos\phi\\&y=r\sin\theta\cos\phi\\&z=r\cos\theta\end{aligned}\right\}\tag{1-19}$$

在球坐标系中，单位矢量满足的点积和叉积的关系为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_\phi\cdot\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta=1\\&\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_\phi\cdot\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta=0\\&\boldsymbol{e}_\theta\times\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned}\right\}\tag{1-20}$$

两种坐标系单位矢量之间的变换关系写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} \tag{1-21}$$

若矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系表示为 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$，而在球坐标系中表示为 $\boldsymbol{A}=A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_\phi\boldsymbol{e}_\phi$，其中 A_r,A_θ,A_ϕ 分别为球坐标系中的分量，则两种坐标系中各分量的变换关系为

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1-22}$$

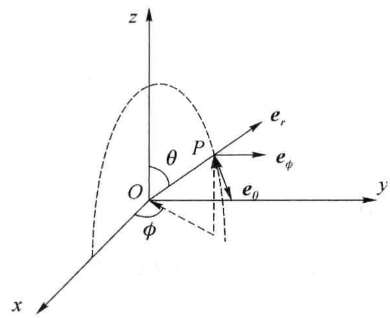


图 1.6　球坐标系

1.2.4　三种坐标系中的微分元

电磁场常须完成线、面、体积分，因此须关注三种微分元在不同坐标系中的表达形式。

1）直角坐标系中的微分元

在直角坐标系中，有向长度的微小变化 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 可以用三个方向微小变化的矢量和表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z \tag{1-23}$$

有向曲面的微小增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可分解为在坐标平面上的 3 个投影，如图 1.7 所示，3 个投影分别表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_x=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{S}_y=\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{S}_z=\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-24}$$

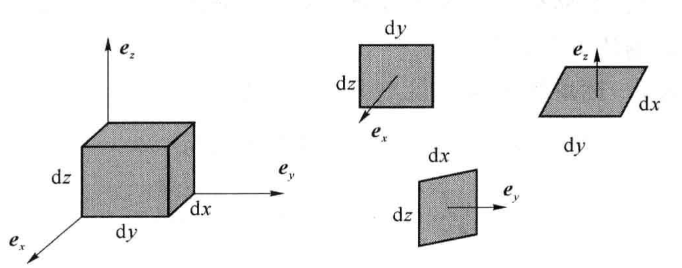


图 1.7　直角坐标系的微分元

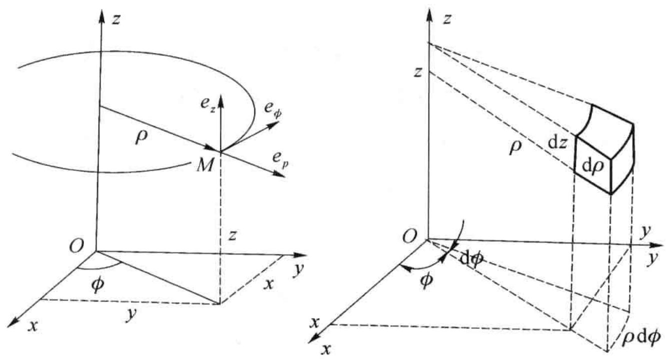
体积微分元可表示为沿三个坐标轴方向微小增量之积，即

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1-25}$$

2）圆柱坐标系中的微分元

如图 1.8 所示，圆柱坐标系中长度、面积、体积微分元分别表示为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_\rho\mathrm{d}\rho+\boldsymbol{e}_\phi\rho\mathrm{d}\phi+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z\\
&\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\rho=\boldsymbol{e}_\rho\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\phi=\boldsymbol{e}_\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_z=\boldsymbol{e}_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\\
&\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z
\end{aligned}
\tag{1-26}
$$



(a)　　(b)

图 1.8　圆柱坐标系的微分元

3）球坐标系中的微分元

球坐标系中长度、面积、体积的微分元分别表示为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{e}_\theta r\mathrm{d}\theta+\boldsymbol{e}_\phi r\sin\theta\mathrm{d}\phi\\
&\mathrm{d}\boldsymbol{S}_r=\boldsymbol{e}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\theta=\boldsymbol{e}_\phi r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\phi=\boldsymbol{e}_\phi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
\tag{1-27}
$$

1.3　标量场的梯度

所谓场，就是一个函数，这个函数描述物理量在一定空间区域的分布情况。因物理量有标量和矢量之分，所以场就分为标量场和矢量场。

对于一个标量场，因为场中各点标量的大小可能不同，同时标量沿各个方向的变化率也不尽相同，通常用方向导数描述场的这种特性，标量场 f 在空间某一点沿某一方向上的变化率称为标量场的方向导数。

在直角坐标系中，标量场 f 沿矢量 $\boldsymbol{l}$（其单位矢量为 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\beta+\boldsymbol{e}_z\cos\gamma$，其中 α,β,γ 为矢量 $\boldsymbol{l}$ 与三个坐标轴的夹角）的方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial l}$为

$$
\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma
\tag{1-28}
$$

令

$$
\boldsymbol{g}=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z
$$

则方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial l}$可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{e}_l$$

矢量 $\boldsymbol{g}$ 称为标量场 f 的梯度，用 grad f 表示，即

$$\text{grad}\ f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1-29}$$

由此可知，标量场的梯度是一个矢量场。当梯度的方向与矢量 $\boldsymbol{l}$ 的方向一致时，方向导数取最大值。因此，梯度的模即为方向导数的最大值，梯度的方向即为标量变化最快的方向。

1846 年，爱尔兰数学家哈密顿引入一个算子，即

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-30}$$

称为哈密顿算子，符号∇ 读作“del”。利用哈密顿算子，梯度可表示为

$$\text{grad}\ f=\nabla f=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1-31}$$

本书将大量使用哈密顿算子，现对其进行说明：

(1) 哈密顿算子是一种矢量运算符号，它是微分算符与矢量的结合；

(2) 哈密顿算子仅仅是一种运算符号，其本身没有意义，它只对右边的量产生作用；

(3) 哈密顿算子在不同坐标系中的表达形式不同，例如在圆柱坐标系和球坐标系中，其表达形式分别为

$$\begin{aligned}\nabla&=\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial f}{\partial z}\\ \nabla&=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial f}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\end{aligned} \tag{1-32}$$

定义$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$为拉普拉斯算子，在直角坐标系中拉普拉斯算子表示为

$$\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1-33}$$

拉普拉斯算子对标量函数 f 的作用在圆柱坐标系和球坐标系中写为

$$\begin{aligned}\nabla^2 f&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\ \nabla^2 f&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\end{aligned} \tag{1-34}$$

1.4 矢量场的通量和散度

1.4.1 矢量场的通量

在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中，取一个有向曲面 $\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{A}$ 在有向曲面上的面积分称为矢量在曲面 $\boldsymbol{S}$ 上