●高等学校理工科参考丛书●

GAODENGXUEXIAOLIGONGKECANKAOCONGS

吉米多维奇数学5000题
〈附解答〉

第二卷

高等学校理工科参考丛书

吉米多维奇数学5000题

（附解答）

第二卷

米天林　许康　何灿芝　陈强
罗金云　　胡锡炎　　郭忠　译

湖南科学技术出版社

湘新登字004号

高等学校理工科参考丛书

吉米多维奇数学5000题

（附解答）

第二卷

〔俄〕B·A·波尔戈夫

米天林　许　康　何灿芝　陈　强
罗金云　胡锡炎　郭　忠　译

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1992年3月第1版第2次印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张：14.5　字数：332,000

印数：29,201——32,200

ISBN 7—5357—1168—5

O·106　定价：8.10元

地科123—57

目　录

（注意：有＊号的各节是数值计算并附FORTRAN程序）

第二卷序言

本卷包括以下各章：多元函数的积分学，向量分析，微分方程，复变函数论的基本概念，数项级数和函数项级数及其应用，运算微积分．习题集所提供的材料包含了一九七九年五月苏联高等教育部规定的高等数学课程教学大纲的相应内容．

与第一卷一样，本书每节的开始先作了简明的理论概述．在使读者能独立解题之前，又详尽地分析了例题．对所有计算题都给出了答案，而对标有单星号或双星号的问题，还分别给出了提示或解法．

本书的一个特点是，在许多章节中配有利用电子计算机求解的习题．其次，关于一般函数项级数和幂级数的理论，我们是用复变函数的理论来叙述的．我们认为，这种阐述方法更有利于理解幂级数的性质和用幂级数表示函数．考虑到有些工科院校将级数理论按实数域和复数域分开叙述，我们在第十二章§2的相应段落的开头，配有实变函数项级数的习题，而在§3的习题中，变量z也可看作实变量，即认为$z=x$。

本书各作者的工作虽然是按章分配的，但每人作为编写集体的一员，都对全书负责．

作者同人借此机会再一次表达对莫斯科工程物理学院、莫斯科钢铁与合金学院、莫斯科动力学院数学教研室的勃里列伯

柯、特列诺金娜、博霍萨也娃主任以及这些教研室的成员们的谢意，感谢他们参加讨论本书原稿并提出一系列宝贵意见，使全书内容得到改进。

读者关于本书内容及习题选择方面的各种意见与希望，请按下列地址惠寄：117071，莫斯科，B-71，列宁大街，15，物理数学书籍编辑室。

第八章 重积分

§1. 二重积分

1. 二重积分的性质及其在笛卡儿坐标系中的计算 设函数$f(x,y)=f(p)$在 Oxy平面的有界闭区域 G上有定义且连续，$\sigma^n=\{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n\}$ 是区域G的某一个分划，基本子区域$\Delta\sigma_k$的面积仍用$\Delta\sigma_k$表示，而直径用d_k表示，固定一点$p_k\in\Delta\sigma_k$ $k=1, \cdots, n$。表达式

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta\sigma_k$$

称为函数$f(p)$ 在区域G上的一个积分和，如果积分和S_n的序列当$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} d_k\to0$ 时（此时 $n\to\infty$）极限存在，且此极限不依赖于用基本子区域$\Delta\sigma_k$对区域G的分划方法，也不依赖于点 $p_k\in\Delta\sigma_k$的取法，那么此极限就叫做函数 $f(x, y)$ 在区域G上的二重积分且记为$\iint\limits_G f(x, y)dxdy$。

于是，我们有

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\lim_{\max d_k\to0}\sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta\sigma_k.$$

二重积分具有线性和可加性（参看问题1.1）

二重积分的计算用下述方法化为累次积分的计算，设区域G由曲线$y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$及直线$x=a$，$x=b$所围成（图79），其中$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$都是$[a, b]$上的连续函数，并且$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$，则

$$\iint\limits_G f(x, y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

先算出对y的内层积分（视x为参数），将得到的结果对x积分。如果曲线$\varphi_1(x)$（或曲线$\varphi_2(x)$）在区间$[a, b]$上由不同的解析表达式给出，例如

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi_1^{(1)}(x) & a\leqslant x\leqslant c.\\ \varphi_1^{(2)}(x) & c<x\leqslant b.\end{cases}$$

（1）式右端的积分应表示为两积分之和的形式：

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int_a^c dx\int_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+$$
$$+\int_c^b dx\int_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

类似地，如果区域G由曲线$x=\psi_1(y)$，$x=\psi_2(y)$及直线$y=c$，$y=d$围成（图80），其中$\psi_1(y)$和$\psi_2(y)$都是$[c,d]$上的连续函数，并且$\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)$那么。

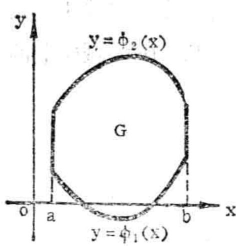

图79

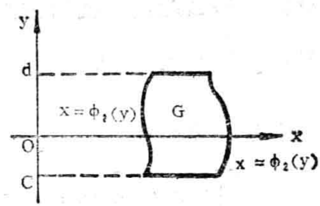

图80

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)dx. \tag{2}$$

二重积分表示为公式（1）或（2）的形式，其右端都称为累次积分。

例1 如果积分区域G由 $y=x$，$y=\frac{1}{x}$，$x=2$围成，用两种方法来配置积分限，并计算二重积分：$I=\iint\limits_G x^2/y^2dxdy$。

解法1 区域 G 的形式（图81）允许应用公式（1），此时 $\varphi_1(x)=\frac{1}{x}$，$\varphi_2(x)=x$，$a=1$，$b=2$。

$$I=\iint\limits_G x^2/y^2dxdy=\int_1^2 x^2dx\int_{1/x}^{x}\frac{1}{y^2}dy$$

$$=\int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=2\frac{1}{4}.$$

解法2 现在用公式（2）来计算给定的二重积分，首先注意到

$$\psi_1(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\\ y, & 1<y\leqslant 2.\end{cases}\quad \psi_2(y)=2.$$

$c=\frac{1}{2}$，$d=2$，因此。

$$I=\iint\limits_G x^2/y^2dxdy=\int_{1/2}^1\frac{dy}{y^2}\int_{\frac{1}{y}}^{2}x^2dx+\int_1^2\frac{dy}{y^2}\int_y^2 x^2dx$$

$$=2\frac{1}{4}.$$

这里第一种方法显然比第二种方法简便些

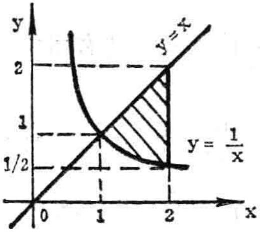

图81

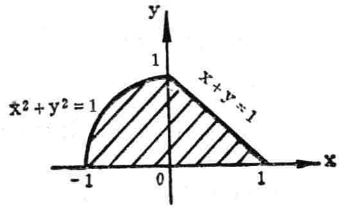

图82

例2 将下列累次积分改变积分的顺序。

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)dx.$$

解 先按积分限：$\psi_1(y)=-\sqrt{1-y^2}$，$\psi_2(y)=1-y$，$y=0$，$y=1$（图82）作出积分区域G. 在区域G的上方是曲线

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

而下方是直线$y=0$. 因此有

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)dx=\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)dy+$$
$$+\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,\ y)dy \quad ∎$$

1.1. 利用二重积分的定义证明它的下列性质：

a) 线性：

$$\iint_G (f(x,\ y)\pm g(x,\ y))dxdy=\iint_G f(x,\ y)dxdy \pm\iint_G g(x,\ y)dxdy$$

和 $$\iint_G \lambda f(x,\ y)dxdy=\lambda\iint_G f(x,\ y)dxdy.\quad (\lambda\in R)$$

б) 可加性：如果$G=G_1+G_2$，那么

$$\iint\limits_{G} f(x,\ y)dxdy=\iint\limits_{G_1} f(x,\ y)dxdy+\iint\limits_{G_2} f(x,\ y)dxdy.$$

计算累次积分

1.2. $\int_0^1 dx\int_0^2 (x^2+y)dy$ **1.3.** $\int_0^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}} \dfrac{xdy}{x^2+y^2}$.

1.4. $\int_1^3 dy\int_2^5 \dfrac{dx}{(x+2y)^2}$.

1.5. $\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} rdr$ **1.6.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^3dr$.

对于给出的累次积分写出围成积分区域的曲线方程，并作出这个积分区域：

1.7. $\int_1^2 dx\int_x^{x+3} f(x,y)dy$ **1.8.** $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^{2-x^2} f(x,\ y)dy$.

1.9. $\int_0 dy\int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,\ y)dx$.

1.10. $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,\ y)dy$.

对下列各题化二重积分$\iint\limits_{G} f(x,\ y)dxdy$ 为累次积分，按给定的区域G 依两个不同的顺序配置累次积分的上、下限：

1.11. G是顶点为$A(1,\ 2)$，$B(5,\ 2)$，$C(5,\ 4)$，$D(1,4)$的矩形。

1.12. G 是由直线 $y=x$，$y=x-3$，$y=2$，$y=4$. 围成的平行四边形。

1.13. G 是由曲线$x^2+y^2=2a^2$，$x^2=ay$，$(a>0,\ y>0)$围成的区域。

1.14. G是由曲线 $y^2=ax$，$x^2+y^2=2ax$，$y=0$，$(a>0,\ y>0)$ 围成的区域。

1.15. G 是由曲线$x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ ($a>0$, $y>0$) 围成的区域。

1.16. 在累次积分$\int_1^2\int_{-\sqrt{x}}^{x^2}f(x, y)dydx$ 中按哪个变量求外层积分？并求其积分区域。

对下列累次积分变换其积分顺序：

1.17. $\int_{-2}^{6}dx\int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}}f(x, y)dy$。

1.18. $\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2-1}^{1-y^2}f(x, y)dx$。

1.19. $\int_0^4 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}f(x, y)dy$。

1.20. $\int_0^1 dy\int_{y^2/9}^{y}f(x, y)dx+\int_1^3 dy\int_{y^2/9}^{1}f(x, y)dx$。

1.21. $\int_{-2}^{2}dx\int_0^{\frac{x+2}{2}}f(x, y)dy+\int_2^{10/3}dx\int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}}f(x, y)dy$。

1.22. $\int_0^a dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}}f(x, y)dy$

1.23. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int_{y^2-1}^{y^2/2}f(x,y)dx$。

1.24. $\int_3^7 dx\int_{9/x}^{3}f(x, y)dy+\int_7^9 dx\int_{9/x}^{10-x}f(x, y)dy$。

1.25. 证明 $\int_0^a dx\int_0^x f(x, y)dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x, y)dx$。

利用这个公式，证明狄利克莱公式。

$$\int_0^t dx\int_0^x f(y)dy=\int_0^t (t-y)f(y)dy.$$

计算下列积分：

1.26. $\iint\limits_G(x^2+y^2)dxdy$ 区域G 由直线$y=x$, $x+y=2a$,

$x=0$围成。

1.27. $\iint\limits_G \sqrt{xy-y^2}\,dxdy$。区域$G$是顶点为$A(1,1)$ $B(5,1)$，$C(10,2)$，$D(2,2)$的梯形。

1.28. $\iint\limits_G xydxdy$，区域 G由直线 $x+y=2$ 及曲线 $x^2+y^2=2y$围成。

1.29. $\iint\limits_G ydxdy$。区域G是顶点$O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(0,1)$的三角形。

1.30. $\iint\limits_G (x+2y)dxdy$。区域$G$由曲线$y=x^2$及 $y=\sqrt{x}$围成。

1.31. $\iint\limits_G (4-y)dxdy$。区域G由曲线$x^2=4y$。及直线$y=1$，$x=0$ $(x>0)$围成。

1.32. $\iint\limits_G \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$。区域$G$由曲线$y=x\text{tg}x$，及直线 $y=x$ 围成。

1.33. $\iint\limits_G \sqrt{a^2+x^2}\,dxdy$。区域$G$由曲线 $y^2-x^2=a^2$ 及直线$x=a$，$x=0$，$y=0$。$(y>0)$围成。

1.34. $\iint\limits_G e^{x+y}dxdy$。区域$G$由曲线 $y=e^x$及直线$x=0$，$y=2$围成。

1.35*. $\iint\limits_G x^2ydxdy$。区域G由Ox轴和椭圆弧$x=a\cos t$，$y=$