

● 高等学校理工科参考丛书 ●

GAODENGXUEXIAOLIGONGKECANKAOCONGS

吉米多维奇
数学 5000 题
〈附解答〉

第二卷



高等学校理工科参考丛书

吉米多维奇数学 5000 题
(附 解 答)

第 二 卷

米天林 许康 何灿芝 陈强
罗金云 胡锡炎 郭忠 译

湖南科学技术出版社

湘新登字004号

高等学校理工科参考丛书
吉米多维奇数学5000题
(附解答)
第二卷

[俄] B·A·波尔戈夫

米天林 许康 何灿芝 陈强 译
罗金云 胡锡炎 郭忠

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版发行
(长沙市展览馆路14号)
湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1992年3月第1版第2次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：14.5 字数：332,000

印数：29,201—32,200

ISBN 7—5357—1168—5

O·106 定价：8.10元

地科123—57

目 录

第二卷序言	(1)
第八章 重积分	(3)
§ 1. 二重积分	(3)
1. 二重积分的性质及其在笛卡儿坐标系中的计算 (3)	
2. 二重积分的变量代换 (10)	
3. 二重积分的应用 (15)	
§ 2. 三重积分	(24)
1. 三重积分及其在笛卡儿直角坐标系中的计算 (24)	
2. 三重积分的变量代换 (26)	
3. 三重积分的应用 (29)	
§ 3. 广义重积分	(33)
1. 无穷区域的积分 (33)	
2. 间断函数的积分 (35)	
§ 4. 含参变量的积分的计算	(36)
1. 含参变量的常义积分 (36)	
2. 含参变量的广义积分 (40)	
答案	(45)
第九章 微分方程	(53)
§ 1. 一阶方程	(53)
1. 基本概念 (53)	
2. 积分曲线的图解法 (等斜线法) (56)	
3. 可分离变量的方程 (57)	
4. 齐次方程 (59)	
5. 线性方程 (62)	
6. 伯努利方程 (65)	
7. 全微分方程 (67)	
8. 解的存在与唯一性定理. 奇解 (70)	
9. 关于导数不可解的方程 (72)	
10. 一阶微分方程的杂题 (76)	
11. 化为求解一阶微分方程的几何和物理问题 (78)	

§ 2. 高阶微分方程..... (84)

1. 基本概念, 柯西定理(84) 2. 可降阶的方程(87) 3. 线性齐次方程(95) 4. 线性非齐次方程(99) 5. 常系数线性齐次方程(103) 6. 常系数线性非齐次方程(106) 7. 欧拉方程(111) 8. 线性微分方程的边值问题(113) 9. 物理问题(115)

§ 3. 微分方程组..... (117)

1. 基本概念 与 n 阶微分方程的联系(117) 2. 正则方程组求积分的方法(121) 3. 正则方程组的物理意义(126) 4. 线性齐次方程组(127) 5. 线性非齐次方程组(133)

§ 4. 稳定性基础理论..... (139)

1. 基本概念(139) 2. 奇点的最简类型(141) 3. 李雅普诺夫函数法(145) 4. 按一次近似判定稳定性(147)

§ 5. *常微分方程的数值解法..... (163)

1. 柯西问题(163) 2. 线性方程的边值问题(174)

答案..... (149)、(176)

第十章 向量分析..... (185)

§ 1. 数量场与向量场、梯度..... (185)

1. 数量场与向量场的几何特征 (185) 2. 数量场的方向导数与梯度(186)

§ 2. 曲线积分与曲面积分..... (188)

1. 第一型曲线积分(188) 2. 第一型曲面积分(191) 3. 第二型曲线积分(194) 4. 第二型曲面积分(198)

§ 3. 数量场与向量场各种特征之间的关系..... (202)

1. 向量场的散度及高斯—奥斯特罗格拉德斯基定理(202) 2. 向量场的旋度, 斯托克斯定理 (204) 3. 哈密尔顿算子及其应用(207) 4. 二阶微分运算(209)

§ 4. 向量场的特殊类型..... (210)

1. 有势向量场(210)	2. 管式场(214)	3. 拉普拉斯场(即调和场)(215)
§ 5. 曲线坐标在向量分析中的应用.....(217)		
1. 曲线坐标, 基本关系式(217)		
2. 在曲线坐标系内向向量分析的微分运算(219)		
3. 有心的、有轴的及轴对称的数量场(222)		
答案.....(223)		

第十一章 复变函数的基本理论.....(228)

§ 1. 初等函数.....(228)

1. 复变函数的概念(228) 2. 复变函数的极限与连续性(230)

§ 2. 解析函数、柯西—黎曼条件.....(235)

1. 导数, 解析函数(235) 2. 解析函数的性质(239)

§ 3. 保形映射.....(241)

1. 导数的模和辐角的几何意义(241) 2. 保形映射, 线性函数与分式线性函数(243) 3. 幂函数(249) 4. 儒科夫斯基函数(252) 5. 指数函数(254) 6. 三角函数与双曲函数(256)

§ 4. 复变函数的积分.....(256)

1. 曲线积分及其计算(256) 2. 柯西定理, 柯西积分公式(259)

答案.....	(263)
---------	-------

第十二章 级数及其应用.....(273)

§ 1. 数项级数.....(273)

1. 级数的收敛性, 柯西准则(273) 2. 绝对收敛与条件收敛, 绝对收敛的判别法(276) 3. 条件收敛判别法(284)

§ 2. 函数项级数.....(288)

1. 函数项级数的收敛域(288) 2. 一致收敛(291) 3. 一致收敛

级数的性质(293)

§ 3. 幂级数.....(295)

1. 幂级数的收敛域与性质 (295) 2. 函数的泰勒级数展开式 (298) 3. 唯一性定理. 解析开拓(307)

§ 4. *幂级数的应用.....(309)

1. 函数值的计算(309) 2. 函数的积分(311) 3. 数项级数的求和. 加速收敛 (312) 4. 利用级数解微分方程 (317) 5. 贝塞尔方程与贝塞尔函数 (321)

§ 5. 罗朗级数.....(323)

1. 罗朗级数与罗朗定理 (323) 2. 孤立奇点的性质 (328)

§ 6. 残数及其应用.....(330)

1. 函数的残数及其计算 (330) 2. 应用残数计算闭路积分的有关定理 (333) 3. 应用残数计算定积分 (336) 4. 幅角原理 (340)

§ 7. 傅立叶级数与傅立叶积分.....(341)

1. 用三角级数表示函数的傅立叶展开式 (341) 2. 傅立叶二重级数 (346) 3. 傅立叶积分 (348) 4. 傅立叶级数与傅立叶积分的谱特征 (351) 5. *离散傅立叶变换 (353)

答案.....(354)、(376)

第十三章 运算微积分.....(396)

§ 1. 拉普拉斯变换.....(396)

1. 拉普拉斯变换的定义与性质 (396) 2. 象原函数类的扩充 (406)

§ 2. 反演公式. 展开定理.....(408)

§ 3. 应用运算微积分解微分方程.....(413)

1. 常系数线性微分方程和微分方程组的求解 (413) 2. 电路计算 (420) 3. 线性偏微分方程的积分法 (423)

§ 4. 脉冲函数.....(425)

1. 一阶脉冲函数 $\delta(t)$ (425) 2. 二阶脉冲函数 $\delta_1(t)$ (427)

3. 脉冲函数的象函数及其应用 (427)

§ 5. 应用运算微积解积分方程和积分—微分方程, 计算广义积分以及级数的和……………(429)

1. 解线性积分方程和积分—微分方程 (429) 2. 广义积分的计算 (430) 3. 级数求和 (433)

§ 6. 离散拉普拉斯变换及其应用……………(435)

1. Z-变换和离散拉氏变换 (435) 2. 解差分方程 (444)

答案……………(448)

(注意: 有 * 号的各节是数值计算并附FORTRAN程序)

第二卷序言

本卷包括以下各章：多元函数的积分学，向量分析，微分方程，复变函数论的基本概念，数项级数和函数项级数及其应用，运算微积分。习题集所提供的材料包含了一九七九年五月苏联高等教育部规定的高等数学课程教学大纲的相应内容。

与第一卷一样，本书每节的开始先作了简明的理论概述。在使读者能独立解题之前，又详尽地分析了例题。对所有计算题都给出了答案，而对标有单星号或双星号的问题，还分别给出了提示或解法。

本书的一个特点是，在许多章节中配有利用电子计算机求解的习题。其次，关于一般函数项级数和幂级数的理论，我们是用复变函数的理论来叙述的。我们认为，这种阐述方法更有利于理解幂级数的性质和用幂级数表示函数。考虑到有些工科院校将级数理论按实数域和复数域分开叙述，我们在第十二章 § 2 的相应段落的开头，配有实变函数项级数的习题，而在 § 3 的习题中，变量 z 也可看作实变量，即认为 $z = x$ 。

本书各作者的工作虽然是按章分配的，但每人作为编写集体的一员，都对全书负责。

作者同人借此机会再一次表达对莫斯科工程物理学院、莫斯科钢铁与合金学院、莫斯科动力学院数学教研室的勃里列伯

柯、特列诺金娜、博霍萨也娃主任以及这些教研室的成员们的谢意，感谢他们参加讨论本书原稿并提出一系列宝贵意见，使全书内容得到改进。

读者关于本书内容及习题选择方面的各种意见与希望，请按下列地址惠寄：117071，莫斯科，B-71，列宁大街，15，物理数学书籍编辑室。

第八章 重积分

§ 1. 二重积分

1. 二重积分的性质及其在笛卡儿坐标系中的计算 设函数 $f(x, y) = f(p)$ 在 Oxy 平面的有界闭区域 G 上有定义且连续, $\sigma_n = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n\}$ 是区域 G 的某一个分划, 基本子区域 $\Delta\sigma_k$ 的面积仍用 $\Delta\sigma_k$ 表示, 而直径用 d_k 表示, 固定一点 $p_k \in \Delta\sigma_k$, $k = 1, \dots, n$. 表达式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(p_k) \Delta\sigma_k$$

称为函数 $f(p)$ 在区域 G 上的一个积分和, 如果积分和 S_n 的序列当 $\max_{1 \leq k \leq n} d_k \rightarrow 0$ 时 (此时 $n \rightarrow \infty$) 极限存在, 且此极限不依赖于用基本子区域 $\Delta\sigma_k$ 对区域 G 的分划方法, 也不依赖于点 $p_k \in \Delta\sigma_k$ 的取法, 那么此极限就叫做函数 $f(x, y)$ 在区域 G 上的二重积分且记为 $\iint_G f(x, y) dx dy$.

于是, 我们有

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\max d_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(p_k) \Delta\sigma_k.$$

二重积分具有线性和可加性 (参看问题1.1)

二重积分的计算用下述方法化为累次积分的计算, 设区域 G 由曲线 $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ 及直线 $x = a$, $x = b$ 所围成 (图 79), 其中 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数, 并且 $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, 则

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (1)$$

先算出对 y 的内层积分 (视 x 为参数), 将得到的结果对 x 积分. 如果曲线 $\varphi_1(x)$ (或曲线 $\varphi_2(x)$) 在区间 $[a, b]$ 上由不同的解析表达式给出, 例如

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(x) & a \leq x \leq c, \\ \varphi_1^{(2)}(x) & c < x \leq b. \end{cases}$$

(1) 式右端的积分应表示为两积分之和的形式:

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy &= \int_a^c dx \int_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy + \\ &+ \int_c^b dx \int_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

类似地, 如果区域 G 由曲线 $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ 及直线 $y = c$, $y = d$ 围成 (图 80), 其中 $\psi_1(y)$ 和 $\psi_2(y)$ 都是 $[c, d]$ 上的连续函数, 并且 $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ 那么.

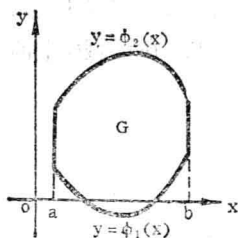


图 79

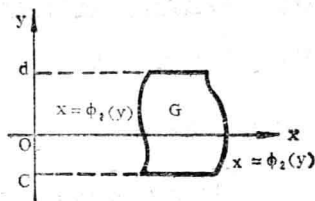


图 80

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (2)$$

二重积分表示为公式 (1) 或 (2) 的形式, 其右端都称为累次积分.

例1 如果积分区域 G 由 $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$ 围成, 用两种方法来配置积分限, 并计算二重积分: $I = \iint_G x^2/y^2 dx dy$.

解法1 区域 G 的形式 (图81) 允许应用公式 (1), 此时 $\varphi_1(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi_2(x) = x$, $a = 1$, $b = 2$.

$$\begin{aligned} I &= \iint_G x^2/y^2 dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{1/x}^x \frac{1}{y^2} dy \\ &= \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{y} \Big|_{\frac{1}{x}}^x \right) dx = \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 2\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

解法2 现在用公式 (2) 来计算给定的二重积分, 首先注意到

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ y, & 1 < y \leq 2. \end{cases} \quad \psi_2(y) = 2.$$

$c = \frac{1}{2}$, $d = 2$, 因此.

$$\begin{aligned} I &= \iint_G x^2/y^2 dx dy = \int_{1/2}^1 \frac{dy}{y^2} \int_{1/y}^2 x^2 dx + \int_1^2 \frac{dy}{y^2} \int_y^2 x^2 dx \\ &= 2\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

这里第一种方法显然比第二种方法简便些。

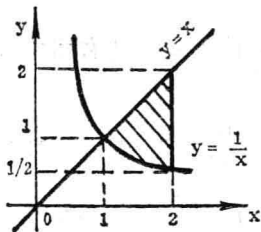


图81

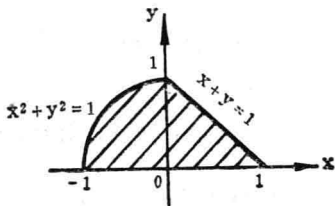


图82

例2 将下列累次积分改变积分的顺序。

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

解 先按积分限： $\psi_1(y) = -\sqrt{1-y^2}$ ， $\psi_2(y) = 1-y$ ， $y = 0$ ， $y = 1$ (图82) 作出积分区域 G 。在区域 G 的上方是曲线

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

而下方是直线 $y=0$ 。因此有

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx &= \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \\ &+ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.1. 利用二重积分的定义证明它的下列性质：

a) 线性：

$$\begin{aligned} \iint_G (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy &= \iint_G f(x, y) dx dy \\ &\pm \iint_G g(x, y) dx dy \end{aligned}$$

和
$$\iint_G \lambda f(x, y) dx dy = \lambda \iint_G f(x, y) dx dy, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

6) 可加性: 如果 $G = G_1 + G_2$, 那么

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy.$$

计算累次积分

$$1.2. \int_0^1 dx \int_0^2 (x^2 + y) dy \quad 1.3. \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{8}} \frac{xdy}{x^2 + y^2}.$$

$$1.4. \int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x + 2y)^2}.$$

$$1.5. \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r dr \quad 1.6. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr.$$

对于给出的累次积分写出围成积分区域的曲线方程, 并作出这个积分区域:

$$1.7. \int_1^2 dx \int_x^{x+3} f(x, y) dy \quad 1.8. \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y) dy.$$

$$1.9. \int_1^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$1.10. \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

对下列各题化二重积分 $\iint_G f(x, y) dx dy$ 为累次积分, 按给

定的区域 G 依两个不同的顺序配置累次积分的上、下限:

1.11. G 是顶点为 $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 4)$, $D(1, 4)$ 的矩形.

1.12. G 是由直线 $y = x$, $y = x - 3$, $y = 2$, $y = 4$. 围成的平行四边形.

1.13. G 是由曲线 $x^2 + y^2 = 2a^2$, $x^2 = ay$, ($a > 0$, $y > 0$) 围成的区域.

1.14. G 是由曲线 $y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$, ($a > 0$, $y > 0$) 围成的区域.

1.15. G 是由曲线 $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ ($a > 0$, $y > 0$) 围成的区域.

1.16. 在累次积分 $\int_1^2 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$ 中按哪个变量求外层积分? 并求其积分区域.

对下列累次积分变换其积分顺序:

$$1.17. \int_{-2}^8 dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$1.18. \int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx.$$

$$1.19. \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$1.20. \int_0^1 dy \int_{y^2/9}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{y^2/9}^1 f(x, y) dx.$$

$$1.21. \int_{-2}^2 dx \int_0^{\frac{x+2}{2}} f(x, y) dy + \int_2^{10/3} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y) dy.$$

$$1.22. \int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$$

$$1.23. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx.$$

$$1.24. \int_3^7 dx \int_{9/x}^3 f(x, y) dy + \int_7^9 dx \int_{9/x}^{10-x} f(x, y) dy.$$

$$1.25. \text{证明 } \int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx.$$

利用这个公式, 证明狄利克莱公式.

$$\int_0^t dx \int_0^x f(y) dy = \int_0^t (t-y) f(y) dy.$$

计算下列积分:

$$1.26. \iint_G (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{区域 } G \text{ 由直线 } y = x, x + y = 2a,$$

$x=0$ 围成.

1.27. $\iint_G \sqrt{xy-y^2} dx dy$. 区域G是顶点为A(1,1) B(5,1), C(10,2), D(2,2)的梯形.

1.28. $\iint_G xy dx dy$, 区域G由直线 $x+y=2$ 及曲线 $x^2+y^2=2y$ 围成.

1.29. $\iint_G y dx dy$. 区域G是顶点O(0,0), A(1,1), B(0,1)的三角形.

1.30. $\iint_G (x+2y) dx dy$. 区域G由曲线 $y=x^2$ 及 $y=\sqrt{x}$ 围成.

1.31. $\iint_G (4-y) dx dy$. 区域G由曲线 $x^2=4y$. 及直线 $y=1$, $x=0$ ($x>0$)围成.

1.32. $\iint_G \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$. 区域G由曲线 $y=x \operatorname{tg} x$, 及直线 $y=x$ 围成.

1.33. $\iint_G \sqrt{a^2+x^2} dx dy$. 区域G由曲线 $y^2-x^2=a^2$ 及直线 $x=a$, $x=0$, $y=0$. ($y>0$)围成.

1.34. $\iint_G e^{x+y} dx dy$. 区域G由曲线 $y=e^x$ 及直线 $x=0$, $y=2$ 围成.

1.35. $\iint_G x^2 y dx dy$. 区域G由Ox轴和椭圆弧 $x = a \cos t$, $y =$