中小学和幼儿园教师资格考试学习参考书系列

适用于初级中学教师资格申请者

数学

学科知识与教学能力

国试书业／教育部考试中心教材研究所　组织编写

刘　兼　朱文芳　本册主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

中小学和幼儿园教师资格考试学习参考书系列

数学

学科知识与教学能力

适用于初级中学教师资格申请者

Shuxue Xueke Zhishi yu Jiaoxue Nengli

Shiyong yu Chuji Zhongxue Jiaoshi Zige Shenqingzhe

国试书业／教育部考试中心教材研究所　组织编写
刘　兼　朱文芳　本册主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

数学学科知识与教学能力/国试书业/教育部考试中心教材研究所组织编写;刘兼,朱文芳分册主编. --北京:高等教育出版社,2011.11

(中小学和幼儿园教师资格考试学习参考书系列)

适用于初级中学教师资格申请者

ISBN 978-7-04-033587-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①国…②刘…③朱… Ⅲ.①中学数学课-教学法-中学教师-聘用-资格考试-自学参考资料 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 223887 号

策划编辑 王宏凯　　责任编辑 雷旭波　　封面设计 陈 方　　版式设计 范晓红

责任校对 杨凤玲

出　　版	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	710mm × 1000mm 1/16	版　　次	2011 年 11 月第 1 版
印　　张	18	印　　次	2011 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	330 千字	定　　价	35.00 元

物 料 号 33587-00

编者的话

为加快我国教师队伍建设，推进教育事业健康发展，严把教师从业资质，自2011年起，我国开始实行由国家统一命题的教师资格国家标准化考试，并着手建立“国标、省考、县聘、校用”的教师准入和管理制度。新标准的出台，是贯彻落实教育规划纲要的重要举措，是建设高素质专业化教师队伍的重要任务，是建立健全中国特色教师管理制度的重要内容，对于提升教师队伍的整体素质，提高教师社会地位，吸引优秀人才从教，推动教育改革发展，具有重要意义。

为帮助并指导参加教师资格考试的人员以及即将从事教师职业的群体迅速适应新标准所带来的新变化，达到考试大纲规定的理论与实际能力水平，形成符合教师职业从业要求的教育教学能力与素养，教育部考试中心教材研究所、国试书业有限公司严格依据教育部最新出台的相关考试标准及考试大纲，总结之前各地实施教师资格考试的经验，针对我国教师队伍建设的实际要求和广大参考人员的实际需要，聘请教育改革及师资培训的国内资深专家学者策划、组织编写了本套《中小学和幼儿园教师资格考试学习参考书系列》丛书。

本套丛书以权威性、实用性、时效性、应试性为基本原则，紧扣考纲三级指标，全面解读考核知识点；采用实用的知识结构模式，以考核模块为单位，运用纲要式结构，以点带面标明各部分知识的内在关联，同时采用整体记忆，快速建立层次分明的知识体系；注重教师教育教学知识体系的构建、规律的探索和思路的创新，使学生在知识、能力、综合素质等方面都得到提高和发展；大量精选案例均来自一线老师多年的教学实践，突出对学习者实际教学能力的培养；章末小结具有内容梳理和重点复习的作用；模块自测严格模拟大纲样题，旨在帮助考生提前演练，查漏补缺。

本书为丛书之一，是为初中数学教师资格申请者编写的笔试用书。根据《中小学教师资格考试标准（试行）》与初级中学教师资格考试《数学学科知识与教学能力考试大纲》的要求，全书分为学科知识、课程知识、教学知识、教学技能四大模块。通过考纲提要、内容详解、模块自测等形式，向打算成为初中数学教师的考生详细地介绍了初中数学教师应该具备的数学基础理论知识以及初中数学课程及教学的

基础知识与基本技能。

本书注重考生的系统训练与提高解决实际问题的能力，结构严谨，要点突出，请每位参加考试的教师资格申请者务必认真阅读，通过模块自测题检验自己的学习效果，及时强化，从而达到学习要求，以期顺利通过资格申请的笔试。

由于时间及知识水平所限，本书在编写过程中难免有不足之处，恳请社会各界人士和广大考生批评指正，以便我们继续努力改进。

编　者

2011 年 11 月

目　录

模块一　学科知识

模块二　课程知识

模块三 教学知识

模块一　学 科 知 识

考试目标

掌握大学专科数学专业基础课程的知识、中学数学的知识.具有在初中数学教学实践中综合而有效地运用这些知识的能力.

内容详解

第一章　数与代数领域的基础知识

考纲提要

1. 准确掌握基本定义,数系的扩充原则及每一次数系扩充的原因,各个数集的性质及数集里的各种代数运算,函数概念的三种定义及函数的相关性质,多项式的因式分解方法,不等式的有关性质及不等式的证明方法,一元三次方程和一元四次方程的解法,高次方程的根与系数的关系,方程组的解法,数列的求和方法,等差数列与等比数列所具有的性质等.

2. 了解数、函数、方程的发展史.

第一节　数　　系

“数”这个概念的历史几乎和人类的历史一样久远.人类在蒙昧时代就已经具

有识别事物多寡的能力，从这种原始的“数觉”到抽象的“数”概念的形成，是一个缓慢的渐进的过程.“数”概念的形成可能与火的使用一样古老，大约可以追溯到30万年以前，而它对于人类文明的意义也绝不亚于火的使用.但是，人类对数系的研究，直到19世纪末、20世纪初才有了严格的基础.数系的扩充过程中，由计数产生了自然数，这也是人类最初认识的数；由分物产生了分数；由刻画相反意义的量产生负数；由线段不可公度引进无理数；后又因数学本身提出的问题，引进了虚数，使数系最后发展为复数系.

一、自然数系

自然数是最简单的、也是人类最早发现和使用的“数”.自然数是一切其他数系逐步扩充并得以实现的基础.

（一）自然数的定义

关于自然数，我们似乎很熟悉.如表示一个人的数是1，表示一辆汽车的数是1……那么究竟什么是1呢？下面借助集合给出1乃至任意自然数的定义.

一个集合若不能与其任一真子集建立一个双射，则称该集合为**有限集**.称非空有限集合的基数（即集合中元素的个数）为**自然数**.一切自然数组成的集合叫做**自然数集**，记为$\mathbf{N}$.

若非空有限集合A不含有非空的真子集，则称集合A的基数为1，即$\overline{\overline{A}}=1$.例如，若$A=\{a\}$，则$\overline{\overline{A}}=1$.

有限集合$\{a,b\}$的基数记做2；

有限集合$\{a,b,c\}$的基数记做3；

……

“自然数”这一术语首先被罗马学者波伊修斯（A. Boethius）使用.但是早期所说的自然数只是正整数序列.无论是基数理论，还是序数理论，事实上都没有涉及0.皮亚诺公理（1）（见后文）告诉我们1是一个自然数，而公理（3）说1不是任何自然数的后继.因此，皮亚诺公理中1是最小的自然数，0不是自然数.

我国数学教材在20世纪90年代之前一直没有把0作为自然数，自然数从1开始.但是1993年颁布的国家标准《物理科学和技术中使用的数学符号》（GB 3102.11—1993）中规定自然数包括0.因此，近年编写的中小学数学教材中，都根据上述国家标准进行了修改.具体表述为：用“0”表示“一个物体也没有”所对应的计数，因而0从此也作为自然数.

实际上，关于0是否是自然数有不少的争议.主张自然数包含0的理由包括：首先，尽早引入0，有利于学生对自然数的理解.$2-2=0$，很自然，儿童容易理

解，没有0，反而显得不方便. 其次，数0对于数的扩充来说十分重要. 不仅由于它的实际应用价值，而且它起到了联系正负数的桥梁作用，使得数的顺序关系得以延续，0是数系得以完善的必不可少的部分. 自然数如果不包含0，要将自然数系扩充到整数系，必须先添加0，然后再加入正整数的相反数，而0不是任何正整数的相反数. 最后，从集合论的角度看，把0作为自然数比较合理，因为0与空集的基数相对应.

但是从另一个方面看，自然数包含0会带来一些行文的不便. 例如在小学阶段"整除"部分，仍然不考虑自然数0，在约数、倍数等概念中都不包括0. 另外，一般情况下我们不讨论数0是几位数. 不把0作为自然数并不会对数学内容产生实质的影响，也不会对国际数学交流产生妨碍，所以许多人不赞成把0归为自然数这一修改.

实际上，0是否是自然数可以看做是一个规定而已. 由于皮亚诺公理中1是最小的自然数，为后文叙述方便，本书约定自然数从1开始.

（二）自然数的运算

1. 自然数的加法定义

设非空有限集 A,B,C，其各自的基数分别为：

$$\overline{\overline{A}}=a,\quad \overline{\overline{B}}=b,\quad \overline{\overline{C}}=c,\quad A\cap B=\varnothing.$$

若 $C=A\cup B$，那么 c 叫做 a 与 b 之和，记做 $c=a+b$，a 叫做**被加数**，b 叫做**加数**，求和的运算叫做**加法**.

根据集合运算的性质，容易证明自然数的加法满足交换律和结合律.

（1）加法交换律：$a+b=b+a$.

（2）加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$.

证 这里只证明加法交换律.

因为集合的并集运算满足交换律，即 $A\cup B=B\cup A$. 这里 $A\cup B$ 的基数是 $a+b$，$B\cup A$ 的基数是 $b+a$，由两个等价集合的基数相同，即得 $a+b=b+a$.

2. 自然数减法的定义

设 a,b,c 是自然数，若 $c=a+b$，那么 a 叫做 c 与 b 的**差**，记做 $a=c-b$，c 叫做**被减数**，b 叫做**减数**，求差的运算叫做**减法**.

3. 自然数乘法的定义

设 b 个等势集合 $A_1,A_2,\cdots,A_b$，其中任何两个集合的交集是空集. 设

$$\overline{\overline{A_1}}=\overline{\overline{A_2}}=\cdots=\overline{\overline{A_b}}=a,$$

若

$$C=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b,\overline{\overline{C}}=c,$$

那么 c 叫做 a 与 b 的**积**，记做 $c=ab$，a 叫做**被乘数**，b 叫做**乘数**，求积的运算叫做

乘法.

根据集合运算的性质,可以证明自然数的乘法满足以下运算律:

(1) 乘法交换律:$mn=nm$.

(2) 乘法对加法的分配律:$(a+b)c=ac+bc$.

(3) 乘法结合律:$(ab)c=a(bc)$.

4. 自然数的除法定义

设 a,b,c 是自然数,若 $a=bc$,那么 c 叫做 a 与 b 的**商**,记做 $c=\frac{a}{b}$或 $c=a\div b$,a 叫做**被除数**,b 叫做**除数**,求商的运算叫做**除法**.

自然数可以进行加减乘除四则运算.减法是加法的逆运算,除法是乘法的逆运算.显然,在自然数集中,并不是任意两个自然数都能做减法或者除法运算的.

(三) 自然数的序数理论

序数理论采用公理化方法,是从不加定义的“集合”、“后继”等原始概念出发,以 5 条公理为基础建立起来的.即:

任何一个非空集合 $\mathbf{N}$ 的元素叫做**自然数**,如果在这个集合里的某些元素之间有一个基本关系“后继”(用符号“$^+$”表示),满足下面的公理:

(1) $1\in\mathbf{N}$.即 $\mathbf{N}$ 中存在一个元素 1.

(2) 任给 $a\in\mathbf{N}$,有 $a^+\neq1$.即 1 不是 $\mathbf{N}$ 中任何元素的后继.

(3) 任给 $a\in\mathbf{N}$,则存在 a^+,有 $a^+\in\mathbf{N}$.即对于 $\mathbf{N}$ 中的任何元素 a,在 $\mathbf{N}$ 中存在一个后继 a^+.

(4) 若 $a^+=b^+$ $(a,b\in\mathbf{N})$,则 $a=b$.即 $\mathbf{N}$ 中任何元素不能作为 $\mathbf{N}$ 中多于一个元素的后继.

(5) **归纳公理** 设 $\mathbf{N}$ 的一个子集 M 具有下列两个性质:

① $1\in M$.

② 若 $a\in M$,则 $a^+\in M$.

那么,M 就含有一切自然数,即 $M=\mathbf{N}$.

上述公理系统是意大利数学家皮亚诺在 1889 年建立的,通常称为**皮亚诺公理系统**.有了这组公理,就把自然数集里的元素完全确定下来.例如,从 1 出发,$1^+=2$,$2^+=3$,…,如此继续下去,便得到自然数列 1,2,3,4,….也可以用公理化方法来定义自然数的加法、乘法运算及顺序关系.

(四) 自然数集的性质

性质 1 1 是自然数中最小的数,即对于任何自然数 a,有 $a\geqslant1$.

证 若 $a\neq1$,依皮亚诺公理(4),a 必为某一自然数 b 的后继,因此

$$a=b^+=b+1=1+b>1.$$

性质 2(自然数集的离散性)　在任意两个相继的自然数 a 与 a^+ 之间不存在自然数 b,使 $a<b<a^+$.

证　若 $a<b$,则有 $k\in\mathbf{N}$,使 $b=a+k$,注意到 $k\geqslant 1$,即得 $b=a+k\geqslant a+1=a^+$. 因此,b 不能小于 a^+.

性质 3　自然数集是有序集.

证　有序集即为这样的集合,在此集合中的任意两个元素之间存在着次序关系,并且具有全序性和传递性. 自然数集中已经定义了次序关系,并知其满足全序性和传递性,因此,自然数集是一个有序集.

性质 4　自然数集是良序集.

证　若一个有序集 A 的任意非空子集都有首元素,那么这样的有序集叫做良序集. 自然数集的良序性质可用最小数原理来表述,即"自然数集的任一非空子集中必存在一个最小数".

设 $A\subseteq\mathbf{N}$,且 $A\neq\varnothing$. 若 $1\in A$,根据性质 1,1 就是 A 的最小数. 若 $1\notin A$,考虑所有不大于 A 中任何一个数的自然数构成的集合,即作集合

$$M=\{x\mid x\in\mathbf{N},x\leqslant b,\forall b\in A\}.$$

显然,$1\in M$,且 $M\subset\mathbf{N}$. M 中必存在自然数 a,使 $a^+\notin M$. 因若不然,根据归纳公理就有 $M=\mathbf{N}$,这与 $M\subset\mathbf{N}$ 矛盾. 按集合 M 的构成方法,必有 $a\leqslant b$ $(\forall b\in A)$,且 $a\in A$. 事实上,若 $a\notin A$,则由 $\forall b\in A$,应有 $a<b$,从而 $a^+\leqslant b$,即 $a^+\in M$,与上面的结论矛盾. 因此,a 是 A 的最小数.

性质 5(阿基米德原理)　设 a,b 为任意两个自然数,则存在自然数 n,使得 $na>b$.

证　因为 $a\geqslant 1$,取 $n>b$(如 $n=b+1$),则 $na>ba\geqslant b\cdot 1=b$.

(五) 数学归纳法

对于与自然数有关的命题,一般都可以用数学归纳法证明. 数学归纳法的理论根据是自然数的定义及其性质,常用的有第一数学归纳法和第二数学归纳法.

1. 第一数学归纳法

设 $P(n)$ 是一个含有自然数 n 的命题,若:

(1) $P(1)$ 成立.

(2) 假设 $P(k)$ 成立,则 $P(k+1)$ 即 $P(k^+)$ 也成立.

那么,$P(n)$ 对任意自然数 n 都成立.

证　设 M 是使得命题成立的所有自然数的集合,则由(1)知,$1\in M$. 又由(2)知,若 $k\in M$,则 $k^+\in M$. 于是,根据归纳公理,有 $M=\mathbf{N}$. 即对于一切自然数 n,命题 $P(n)$ 都成立.

2. 第二数学归纳法

设 $P(n)$ 是一个含有自然数 n 的命题,若:

(1) $P(1)$ 成立.

(2) 假设 $P(m)$ 对于所有适合 $m<k$ 的自然数 m 成立,则 $P(k)$ 成立.

那么,$P(n)$ 对任意自然数 n 都成立.

证 假定 $P(n)$ 不是对所有自然数都成立,那么,使得 $P(n)$ 不成立的一切自然数的集合 A 不是空集. 根据最小数原理,A 中必含有最小数 a. 根据(1),$P(1)$ 成立,所以 $1\notin A$,即 $a>1$. 这样对于所有适合 $1\leqslant m<a$ 的自然数 m,$P(m)$ 成立. 所以由(2)知,$P(a)$ 成立. 这与前面假设 a 是使 $P(n)$ 不成立的所有自然数的集合 A 中的最小数矛盾. 这个矛盾证明了 $P(n)$ 对于任意自然数 n 都成立.

知识窗

扩大的自然数集

在基数理论中,通常把“0”定义为空集的基数;在序数理论中,把“0”作为唯一的“1”前面的数而引入自然数列. $\{0\}$ 与自然数集的并集,叫做扩大的自然数集,记做 $\mathbf{Z}^{+}$. 扩大的自然数集中的任何元素,叫做非负整数.

在扩大的自然数集里,关于顺序关系和四则运算的定义,与原有的自然数集一样,并补充以下定义:

(1) 0 小于任何自然数.

(2) $0+a=a+0\ (a\in\mathbf{N}$ 或 $a=0)$.

(3) $a\cdot 0=0\cdot a=0\ (a\in\mathbf{N}$ 或 $a=0)$.

在扩大的自然数集里,原有的基本顺序律和基本运算律仍然成立,但有些也需作适当的改变. 如 $a+b>a$ 应改为 $a+b\geqslant a$,$a>b\Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$ 应改为 $a>b\Rightarrow a\cdot c\geqslant b\cdot c$,等等.

二、整数系

在自然数集中,总能进行两个基本运算:加法与乘法,但是其逆运算:减法与除法并不总是可行的. 先看减法,在 $\mathbf{Z}^{+}$ 中方程 $a+x=b$ 就不是总能求解的. 所以有必要把数集 $\mathbf{Z}^{+}$ 扩充到较大的整数集 $\mathbf{Z}$,即,必须引入负数.

(一) 整数的定义

在 $\mathbf{Z}^{+}\times\mathbf{Z}^{+}=\{(m,n)\mid m,n\in\mathbf{Z}^{+}\}$ 上定义一个关系 R:

$$(m_1,n_1)R(m_2,n_2)\Leftrightarrow m_1+n_2=m_2+n_1,$$

则 R 是一个等价关系.

证　所谓等价关系,即设 R 是集合 A 上的一个关系,它具有自反性、对称性和传递性,则称 R 为一个等价关系. 下面证明 R 是一个等价关系.

自反性:$\forall(m,n)\in\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$,因为 $m+n=m+n$,故 $(m,n)R(m,n)$.

对称性:若 $(m_1,n_1)R(m_2,n_2)$,即有

$$m_1+n_2=m_2+n_1,\text{则 } m_2+n_1=m_1+n_2,$$

故 $(m_2,n_2)R(m_1,n_1)$.

传递性:若 $(m_1,n_1)R(m_2,n_2)$,$(m_2,n_2)R(m_3,n_3)$,由定义有

$$m_1+n_2=m_2+n_1,\quad m_2+n_3=m_3+n_2,$$

两式相加可得

$$m_1+n_2+m_2+n_3=m_2+n_1+m_3+n_2,$$

由此得 $m_1+n_3=m_3+n_1$,即 $(m_1,n_1)R(m_3,n_3)$,所以,R 是 $\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$ 中的一个等价关系.

由于 R 是 $\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$ 中的一个等价关系,因此可以用 R 把 $\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$ 分成等价类,从而可以得到商集 $\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+/R$. 此商集我们称之为**整数集** $\mathbf{Z}$,即 $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+/R$.

我们记 $[m,n]=\{(k,l)\in\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+\mid(k,l)R(m,n)\}$,于是

$$\mathbf{Z}=\{[m,n]\mid(m,n)\in\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+\}.$$

例如:

$$[2,1]=\{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),\cdots\},$$
$$[1,3]=\{(0,2),(1,3),(2,4),(3,5),\cdots\}.$$

如图 1-1-1 所示,同一条线上的各点的坐标属于同一等价类,这个等价类表示一个整数.

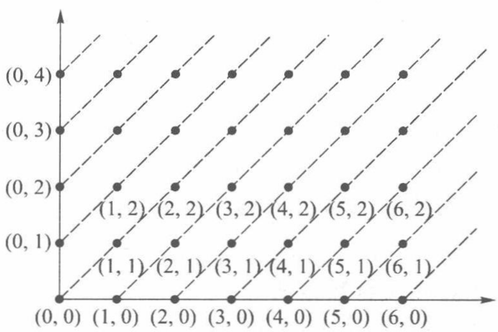

图 1-1-1

(二) 整数的运算

1. 整数加法的定义

整数 $z=[m+p,n+q]$ 叫做整数 $z_1=[m,n]$ 与整数 $z_2=[p,q]$ 的**和**，即

$$[m,n]+[p,q]=[m+p,n+q].$$

求两个整数和的运算叫做**整数加法**.

2. 整数乘法的定义

整数 $z=[mp+nq,mq+np]$ 叫做整数 $z_1=[m,n]$ 与整数 $z_2=[p,q]$ 的**积**，即

$$[m,n]\cdot[p,q]=[mp+nq,mq+np].$$

求两个整数积的运算叫做**整数乘法**.

对于两个整数 $[m,n]$ 和 $[p,q]$，它们的乘积可以记做 $[m,n]\cdot[p,q]$ 或 $[m,n]\times[p,q]$ 或 $[m,n][p,q]$.

上面定义的运算是对于等价类定义的运算. 由于等价类是一个集合，而在实际运算中，我们只能在其中选取代表元进行计算. 所以，上述类运算的结果与代表元的选择无关，并且整数的加法与乘法的结果存在且唯一.

3. 整数减法的定义

为了定义减法，先证明下面的定理.

定理 对于 $[m,n],[p,q]\in\mathbf{Z}$，存在唯一的 $[x,y]\in\mathbf{Z}$，使

$$[m,n]+[x,y]=[p,q].$$

证 首先证明存在性.

因为

$$\begin{aligned}&[m,n]+[x,y]=[p,q]\\ \Leftrightarrow&[m+x,n+y]=[p,q]\\ \Leftrightarrow&m+x+q=n+y+p\\ \Leftrightarrow&x+(m+q)=y+(n+p)\\ \Leftrightarrow&[x,y]=[n+p,m+q]\in\mathbf{Z},\end{aligned}$$

存在性得证. 下面证明唯一性.

设 $[k,l]\in\mathbf{Z}$，也满足 $[m,n]+[k,l]=[p,q]$. 如同上面的证明一样，有 $[k,l]=[n+p,m+q]$，此即表明 $[x,y]=[k,l]$，唯一性得证.

整数 $[n+p,m+q]$ 叫做整数 $[p,q]$ 与整数 $[m,n]$ 的**差**，记做

$$[p,q]-[m,n]=[n+p,m+q].$$

求两个整数差的运算叫做**整数减法**.

显然，减法运算在整数集 $\mathbf{Z}$ 中是封闭的.

4. 整数除法的定义

对于 $[m,n],[p,q],[k,l]\in\mathbf{Z}$ $(m\neq n)$，若 $[m,n][k,l]=[p,q]$，则 $[k,l]$ 叫做 $[p,q]$ 与 $[m,n]$ 的**商**，记做 $[k,l]=[p,q]\div[m,n]$，$[p,q]$ 叫做**被除数**，$[m,n]$ 叫做**除**

数,求商的运算叫做**除法**.

显然,在整数集中,除法运算并不是总可以施行的.

对于整数的四则运算,我们关心其是否具有自然数所具有的性质.

由整数的加减法的定义,容易证明整数的运算具备如下的运算律及性质:

(1) 加法交换律:$[m,n]+[p,q]=[p,q]+[m,n]$.

事实上,有

$$[m,n]+[p,q]=[m+p,n+q]=[p+m,q+n]=[p,q]+[m,n].$$

(2) 加法结合律:$([m,n]+[k,l])+[p,q]=[m,n]+([k,l]+[p,q])$.

(3) 存在零元:对整数加法来说,$\mathbf{Z}$ 有零元存在.

事实上,任意的整数$[p,q]$,有整数$[m,m]$,使得

$$[m,m]+[p,q]=[m+p,m+q]=[p,q].$$

所以由相同自然数组成的数对$[m,m]$就是 $\mathbf{Z}$ 中零元的代表.

对于加法运算,在自然数集中,任一元素均无逆元;在扩大的自然数集 $\mathbf{Z}^{+}$中,仅数 0 存在逆元;但在整数集中,每个元素都有逆元,这里称其为负元素.

(4)存在负元素:对整数加法来说,$\mathbf{Z}$ 中的每一个元素都有负元素存在.

因为$[n,m]+[m,n]=[n+m,n+m]$是零元,所以$[n,m]$是$[m,n]$的负元素,或称为相反数,记做$[n,m]=-[m,n]$.

$[n,m]$与$[m,n]$互为相反数.

(5) 在整数加减法运算中,减去一个整数等于加上这个整数的相反数.

事实上,有

$$[p,q]-[m,n]=[n+p,m+q]=[p,q]+[n,m]=[p,q]+(-[m,n]).$$

进一步地,由$[m,n]=-(-[m,n])$,我们有

$$[p,q]+[m,n]=[p,q]+(-(-[m,n]))=[p,q]-(-[m,n]).$$

对于乘法,容易证明整数的运算具备如下的运算律及性质:

(1) 交换律:$[m,n]\cdot[p,q]=[p,q]\cdot[m,n]$.

(2) 结合律:$([m,n]\cdot[k,l])\cdot[p,q]=[m,n]\cdot([k,l]\cdot[p,q])$.

(3) 乘法对于加法的分配律:$[m,n]([k,l]+[p,q])=[m,n][k,l]+[m,n][p,q]$.

(4) 存在单位元:在整数中存在$[1,0]$,使得对于任意的整数$[m,n]$,有$[m,n][1,0]=[m,n]$.

(5) $(-[m,n])[p,q]=-([m,n][p,q])$,

$(-[m,n])\cdot(-[p,q])=[m,n][p,q]$,

$-(-[k,l])=-[l,k]=[k,l]$.