



中学基础知识补习丛书

数学

复习与题解 (下)

北京市海淀区教师进修学校主编



THE UNIVERSITY OF CHINA PRESS

数学

数学与物理科学 (M) 1
中国科学院数学与物理研究所

中学基础知识补习丛书

数学复习与题解

下 册

北京市海淀区教师进修学校主编

编 者

北京第三师范学

北京立新学校:

北京工业学院附属中学: 关民乐

清华大学附属中学: 孔令颐

北京四十七中: 王健民

北京市海淀区教师进修学校:

张士充 赵大悌 陈宝民

尹秀盈 李纪良 王增民

毕德权

审 阅 者

北京师范大学第二附属中学:

金文清 李文英 古永喜

于广兴 金宝铮

北京铁路二中: 刘崇俊

华北电力学院:

刘国隆 宋文松 李洪敏

北京电力学校: 张齐金 王维锦

电 力 工 业 出 版 社

中学基础知识补习丛书

数学复习与题解(下)

北京市海淀区教师进修学校主编

*

电力工业出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京外文印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 16.75印张 372千字

1981年2月第一版 1981年2月北京第一次印刷

印数 000001—455400册 定价 1.45元

书号 15036·4183

目 录



第三篇 平面几何

第一章 直线	637
一、相交线与平行线	637
附：几何知识(一)	643
二、三角形	647
附：几何知识(二)	656
三、四边形	663
四、相似形	676
练习(A组)	685
练习(B组)	706
自我检查题(100分钟, 100分)	736
自我检查题解答	737
第二章 圆	742
一、圆的定义和性质	742
二、点和圆, 直线和圆, 圆和圆的位置 关系	742
三、角和圆的关系及其性质	745
四、圆和多边形的关系	746
附：几何知识(三)	759
练习(A组)	760
练习(B组)	778

自我检查题(100分钟, 100分)	802
自我检查题解答	804
第三章 综合练习	809

第四篇 立体几何

第一章 直线和平面	843
一、内容提要	843
二、例题与习题	851
练习(A组)	854
练习(B组)	859
练习(C组)	867
自我检查题(100分钟, 100分)	877
自我检查题解答	878
第二章 多面体与旋转体	884
一、内容提要	884
二、例题与习题	885
练习(A组)	890
练习(B组)	895
练习(C组)	903
自我检查题(100分钟, 100分)	910
自我检查题解答	911
第三章 综合练习	915
综合练习(A组)	915
综合练习(B组)	921

第五篇 解析几何

第一章 坐标概念和基本度量公式	936
一、坐标概念	936
二、基本度量公式	937

练习(A组)	940
练习(B组)	945
自我检查题(60分钟, 100分)	952
自我检查题解答	953
第二章 曲线与方程	956
一、曲线和方程的关系	956
二、两个基本问题	957
练习(A组)	962
练习(B组)	968
自我检查题(90分钟, 100分)	976
自我检查题解答	977
第三章 直线	981
一、倾角和斜率	981
二、直线方程	981
练习(A组)	986
练习(B组)	991
自我检查题(100分钟, 100分)	1001
自我检查题解答	1002
第四章 圆锥曲线	1007
一、圆	1007
练习一(A组)	1010
练习一(B组)	1015
二、抛物线	1023
三、椭圆和双曲线	1025
四、圆锥曲线的切线和法线	1027
练习二(A组)	1029
练习二(B组)	1033
练习三(A组)	1038
练习三(B组)	1044

自我检查题一(90分钟,100分)	1049
自我检查题二(90分钟,100分)	1050
自我检查题一解答	1051
自我检查题二解答	1056
第五章 坐标变换	1060
一、坐标轴的平移	1060
二、坐标轴的旋转	1061
练习(A组)	1063
练习(B组)	1069
自我检查题(100分钟,100分)	1075
自我检查题解答	1076
第六章 极坐标和参数方程	1079
一、极坐标	1079
二、参数方程	1082
练习(A组)	1085
练习(B组)	1090
自我检查题(100分钟,100分)	1099
自我检查题解答	1100
第七章 综合练习	1105
 附 录	
一、总复习测验题一(120分钟,100分)	1137
二、总复习测验题一解答及评分标准	1138
三、总复习测验题二(120分钟,100分)	1147
四、总复习测验题二解答及评分标准	1148
五、总复习测验题三(120分钟,100分)	1153
六、总复习测验题三解答及评分标准	1155

第三篇 平面几何

第一章 直 线

一、相交线与平行线

(一) 线段、射线和直线

1. 直线的基本性质: 过两点能引一条直线, 且只能引一条直线. 一条直线可以向两端无限伸长.

2. 射线: 在直线上某一点一侧的部分叫做射线; 它的一端有界, 另一端无界; 直线上的这一点叫射线的端点.

3. 线段: 直线上任意两点之间的部分叫做线段; 它的两端都是有界的; 直线上的这两点叫线段的端点.

在连接两点的线中(包括曲线或折线), 线段最短.

(二) 角

1. 定义:

从一点出发引出两条射线, 所组成的图形叫做角.

2. 角的度量:

1 周角 = 360° ; $1^\circ = 60'$; $1' = 60''$.

3. 角的分类:

锐角 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; 直角 $\alpha = 90^\circ$;

钝角 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; 平角 $\alpha = 180^\circ$.

4. 两角的关系:

(1) 余角和补角:

定义: 如果两个角的和等于一个直角, 这两个角叫做互

为余角，如（图3-1）中 $\angle A$ 和 $\angle B$ 。

定义：如果两个角的和等于一个平角，这两个角叫做互为补角，如（图3-2）中 $\angle C$ 和 $\angle D$ 。

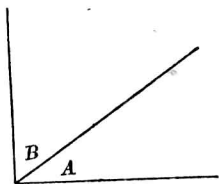


图 3-1

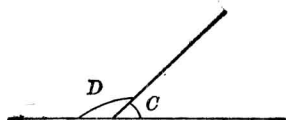


图 3-2

（2）对顶角：

定义：如果一个角的两边是另一个角的两边的反向延长线，则这两个角叫做互为对顶角。

定理：对顶角相等。

（3）对应边互相平行或垂直的两个角：

①如果两个角的两组对应边平行，从两个角的顶点出发，两组对应边的方向都相同或都相反，则这两个角相等。如果一组对应边方向相同，而另一组对应边方向相反，则这两个角互为补角，见（图3-3）。

②如果两个角的两组对应边互相垂直，两个角同为锐角

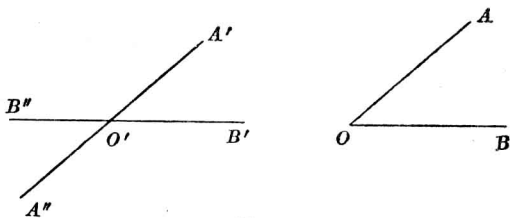


图 3-3

或同为钝角，则这两个角相等。
 如果这两个角中的一个为锐角，
 另一个为钝角，则这两个角互为
 补角，见（图3-4）。

5. 角的平分线：

（1）定义：从一个角的顶
 点出发的一条射线，如果把这个
 角分成两个相等的角，则这条射线叫做这个角的平分线。

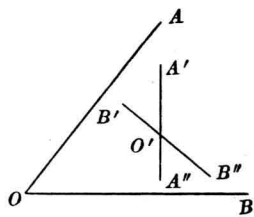


图 3-4

（2）性质：

- ①角的平分线上任意一点到这个角两边的距离相等。
- ②到一个角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上。

（三）同一平面内不重合的两条直线的位置关系

{	相交（有一个公共点）	{	斜交；
		}	垂直。
	平行（没有公共点）。		

1. 垂线和斜线：

（1）定义：两条直线相交成直角，则这两条直线叫做互相垂直，其中一条直线叫做另一条直线的垂线，其交点叫做垂足。

定义：如果相交的两条直线不是互相垂直，则其中一条叫做另一条的斜线，其交点叫做斜线足。

（2）性质：

- ①过平面上任意一点可以引已知直线的一条垂线，并且只能引一条垂线。
- ②从直线外一点与直线上的点所连的线段中，以垂线为最短。

2. 线段的垂直平分线:

(1) 定义: 垂直于一条线段, 并且平分这条线段的直线叫做这条线段的垂直平分线.

(2) 性质:

①线段的垂直平分线上的任意一点, 到线段两端的距离相等.

②到线段两端距离相等的点, 在这条线段的垂直平分线上.

3. 平行线:

(1) 定义: 同一平面内两条不相交的直线叫做平行线.

(2) 平行线公理: 过已知直线外的一点, 只能引一条直线与已知直线平行.

(3) 判定定理:

①两条直线与第三条直线相交, 且具有下列条件之一, 则这两条直线平行: 同位角相等; 内错角相等; 同旁内角互补.

②垂直于同一条直线的两条直线互相平行.

③平行于同一条直线的两条直线互相平行.

④与三角形两边相交, 且把这两边截成对应成比例的线段的直线平行于第三边.

(4) 性质:

①两条平行直线与第三条直线相交, 则有: 同位角相等; 内错角相等; 同旁内角互补.

②如果一条直线和两条平行线中的一条垂直, 它也和另一条垂直.

③夹在两条平行线间的平行线段相等.

④两条平行线间的距离处处相等。

⑤角的两边被一组平行线所截，若在角的一边上截出相等的线段，那么在角的另一边上也截出相等的线段（平行线截割定理）。

⑥如果角的两边被一组平行线所截，那么，这个角的两边被截成比例线段（平行线截割比例线段定理），如（图3-5），

若 $AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\text{则 } \frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF},$$

$$\text{或 } OA:AC:CE \\ = OB:BD:DF.$$

（四）几个距离的概念

1. 两点间的距离：连结两点的线段的长。

2. 点到直线的距离：从直线外一点向这条直线引垂线，点到垂足之间线段的长。

3. 平行线间的距离：从两条平行线中一条上的任意一点向另一条引垂线，这点到垂足之间线段的长。

（五）基本作图题

会用尺、规完成下列作图：

1. 作一条线段和已知线段相等。
2. 作一个角和已知角相等。
3. 作已知线段的垂直平分线。
4. 作已知角的平分线。
5. 过已知点作已知直线的垂线。
6. 过已知点作已知直线的平行线。

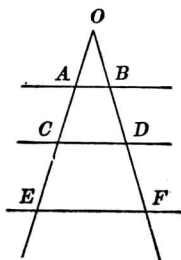


图 3-5

7. 按照已知比内分一条已知线段.

8. 等分已知线段.

例1. 已知: 如图3-6, $OA \perp OB$, $OC \perp OD$, $\angle COB = 2\angle AOD$.

求证: (1) $\angle 1 = \angle 2$; (2) $\angle AOD = 60^\circ$.

证明: (1) $\because OA \perp OB$,

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$$

(垂线定义),

$$\therefore \angle 1 = 90^\circ - \angle 3.$$

同理, 由 $OC \perp OD$ 得

$$\angle 2 = 90^\circ - \angle 3,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 \text{ (等量代换)}.$$

(2) 由已知 $\angle COB = 2\angle AOD$,

$$\text{即 } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2\angle 3.$$

$$\text{于是 } (90^\circ - \angle 3) + (90^\circ - \angle 3) + \angle 3 = 2\angle 3,$$

故 $\angle 3 = 60^\circ$, 即 $\angle AOD = 60^\circ$.

说明: (1) 对于几何证明题, 首先要进行分析, 掌握证题的思考方法, 但分析过程不必写出. (2) 在情况相同时, 若已推证了其一, 可使用“同理”直接写出其二、其三, 这是数学上常用的手段, 既省时, 又免于出错, 是一种十分重要的方法.

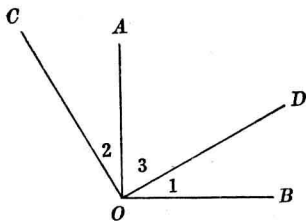


图 3-6

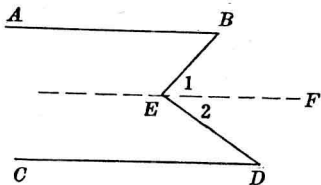


图 3-7

例2. 如(图3-7), 已知: $AB \parallel CD$.

求证: $\angle BED = \angle ABE + \angle EDC$.

证明: 过E作 $EF \parallel AB$,

则 $\angle ABE = \angle 1$ (两直线平行, 内错角相等)。

又 $AB \parallel CD$,

$\therefore EF \parallel CD$ 。

同理, $\angle EDC = \angle 2$ 。

于是 $\angle BED = \angle 1 + \angle 2 = \angle ABE + \angle EDC$ 。

说明: 本题还可以有多种解法, 如可以延长 BE 交 CD 于 F (如图3-8所示), 根据三角形外角的性质推出 $\angle BED = \angle 1 + \angle D$, 再结合已知条件 $AB \parallel CD$ 推出 $\angle 1 = \angle B$, 从而证出 $\angle BED = \angle ABE + \angle EDC$ 。

也可以连结 BD (如图3-9所示), 根据 $AB \parallel CD$ 得 $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$, 再由三角形的内角和等于 180° , 从而证出 $\angle BED = \angle ABE + \angle EDC$ 。

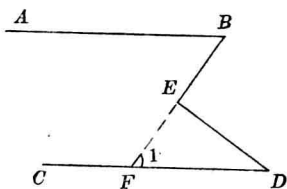


图 3-8

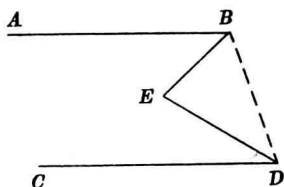


图 3-9

这三种不同证法, 都必须添加辅助线, 其目的是创造条件使未知条件和已知条件联系起来, 从而找到解决问题的方法。而过定点作定直线的平行线是添加辅助线的常用方法之一。

附: 几何知识 (一)

“命题”: 叙述一个判断的语言叫做命题。

“定义”: 凡是说明名词或术语意义的命题, 叫做定

义。

“公理”：不加证明而采用的命题叫做公理。

“定理”：由公理或已经推证具有正确性的命题经推断得到的具有正确性的命题叫做定理。

1. 关于命题的四种形式和相互关系：

(1) 如果将原命题的条件和结论的次序逆转，所成的命题，叫做原命题的逆命题。

(2) 如果将原命题的条件和结论“是、否”对调，所成的命题，叫做原命题的否命题。

(3) 如果将原命题的条件和结论的次序逆转，而又“是、否”对调，所成的命题，叫做原命题的逆否命题。

如果用 A 表示原命题的条件，用 B 代表原命题的结论，那么命题的四种形式可以表示成：

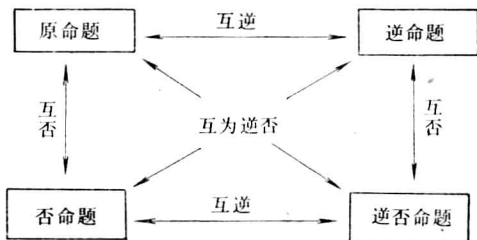
原命题：如果有 A ，就有 B 。

逆命题：如果有 B ，就有 A 。

否命题：如果没有 A ，就没有 B 。

逆否命题：如果没有 B ，就没有 A 。

因此四种命题之间具有互逆、互否、互逆否的三种关系，现列表说明如下：



[注意] 当一个命题真实时, 它的逆否命题也一定真实。
如果原命题正确, 它的逆命题不一定正确。例如:

(1) 如果两个角是对顶角, 那么这两个角相等。(正确)

(2) 如果两个角相等, 那么这两个角是对顶角。(不正确)

(3) 如果两个角不是对顶角, 那么这两个角不相等。(不正确)

(4) 如果两个角不相等, 那么这两个角不是对顶角。(正确)

可知原定理成立, 则它的逆否定理必定成立。在数学上, 对于两个命题中一个真实则另一个必然真实的这种关系, 叫做等效关系(或叫等价的命题)。

因此, 对于原命题与逆否命题的两个命题中, 我们只要证明了其中的一条正确, 另一条就跟着正确, 可以不必证明。

2. 等量公理:

(1) 任何一个量等于它的自身 $a=a$ 。(反身性)

(2) 第一个量等于第二个量, 则第二个量一定等于第一个量, 即若 $a=b$, 则 $b=a$ 。(对逆性)

(3) 等于同一个量的两个量相等, 即若 $a=b$, $b=c$, 则 $a=c$ 。(传递性)

(4) 等量加等量, 其和相等, 若 $a=b$, $c=d$, 则 $a+c=b+d$ 。

(5) 等量减等量, 其差相等, 即若 $a=b$, $c=d$, 则 $a-c=b-d$ 。

(6) 等量乘以等数, 其积相等, 即若 $a=b$, 则 $na=nb$ 。