高等代数教程

庄瓦金 编著

科学出版社

高等代数教程

庄瓦金　编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书阐述了高等代数中的基本思想、代数结构及其方法. 全书共 10 章，内容包括：矩阵，行列式，线性方程组解的理论，多项式代数，群、环、域的概念，向量空间，线性算子，相似、合同标准形，Euclid 空间与酉空间，双线性度量空间. 书前有绪论、预备章，各章节末附有精选习题，某些章节后增加了"应用参考"，以拓宽学生视野.

本书可作为普通高等院校数学各专业高等代数基础课教材或教学参考书，也可作为数学各专业考研参考书，还可供相关专业和科技人员学习线性代数基础时参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数教程/庄瓦金编著. —北京：科学出版社，2013
ISBN 978-7-03-037371-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①庄… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 084268 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：赵桂芬
责任印制：阎　磊 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京九天志诚印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2013 年 4 月第　一　版　　开本：720×1000 B5
2013 年 4 月第一次印刷　　印张：29 1/2
字数：60 9000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书第一稿曾在漳州师范学院使用 7 年，得到省内外一些同行的认可，并经同行专家成果鉴定后获得了 2005 年福建省优秀教学成果二等奖.

期间，教育部本科教育质量工程实施，国内外一些优秀教材[①]相继出版，福建省“高等代数”与“线性代数”课程建设研讨会也每年举行两次，作者应邀在会上连续作了九次大会报告，因而也对第一稿的修改进行了反复探索，促成了本书的问世.

本书在围绕突出教学主线[②]、展现代数本性、提升本科教学水平方面做了一些努力.

受相关教材[③]启发，在讲授向量空间之前增设了“第五章 群、环、域的概念”，不仅使得其后的阐述可以在更一般的域上讨论，而且也为前四章的矩阵代数、多项式代数注入了一般性的活力. 总之，使全书更好地贯穿了一条教学主线，显现代数本性. 当然，学生接受得了吗？我们的实践是肯定的，因为一般性思想，始终是高等代数的思想，早在 1964 年，王湘浩院士与谢邦杰教授就这样做了. 在当代，代数学在整个数学科学中有着极其重要的地位，打好代数基础对本科教学十分必要，这个任务就由高等代数、抽象代数来完成，像莫斯科大学的力度[④]，时下的中国显然做不到. 但吸纳其有益之点滴应该是值得探索的，不然，我们就难以进入数学强国之列.

本书加强了向量空间及其线性映射理论的系统性与深广度. 例如，书中阐述了商空间的概念、线性映射基本定理、线性算子的张量积. 考虑到各高校教学水平的差异与学生素质有别，有些节、小节加了“*”号，以供教师选讲或学生选读用. 作者认为，应该鼓励普通高校的优秀学生选读课堂上老师没讲的深刻内容，以开拓视野.

由于质量工程建设的开展，网上的教育功能得到了广泛认同，所以第一稿中的辅线就没有设立的必要. 注意到应用仍然是国内教材的弱项，高等代数的教学价值始终是其教学中应当足够重视的理念. 因此，本书加强了高等代数有用的资料供给，一是在前 7 章，尤其是第 1 章，增加了“应用参考”的介绍，供教师点讲或学生参考用；二是从第 8 章起删去“应用参考”的篇幅，但在参考文献中增添了有关的参考书，并在本书的适当处加入注记，点述应用.

重视术语、符号表述，其中术语与国内教材有别的是“线性变换”采用了《代数学

---

① 姚慕生，2003；丘维声，2003；万哲先，2004；张贤科等，2004；施武杰等，2005；牛凤文等，2006；李尚志，2006；柯斯特利金，2006，2008a，2008b；蓝以中，2007

② 丘维声，2005；蓝以中，2007

③ 王湘浩等，1964；柯斯特利金，2006，2008a

④ 柯斯特利金，2006，2008a，2008b

引论》[1]的做法，改为“线性算子”，这除了注意到《代数学引论》的先进性外，也有利于向认识无限维空间过渡. 符号的表述在全书之首增加了“符号表”，这将使教与学更为方便.

本书面向所有本科高校数学各专业. 教学时数 170 学时(每周 5 学时(含习题课)，讲授一年)的学校，可以讲授完书中不加“ * ”号的内容，并可选讲加“ * ”号的少部分内容；教学时数 204 学时(每周 6 学时(含习题课)，讲授一年)的学校，原则上可以讲授完本书的绝大部分内容. 本书各节末附有数量充足的精选习题，大多是作者 30 多年来讲授此课程的课外作业与习题课上的练习，同时酌情精选了这些年来一些高校硕士研究生招生的高等代数试题，因而不仅覆盖了一些经典教材[2]的绝大部分习题，而且还有一定剩余，可供各校教学各环节酌情选用.

本书是作者主持的福建省精品课程——漳州师范学院“高等代数”的建设成果，得到了漳州师范学院(将更名为“闽南师范大学”)优秀教材出版基金的资助. 本书的出版也得到科学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢.

由于作者学识所限，编著工作条件较为艰辛，书中定有不足之处，敬请各位专家及广大读者批评指正.

庄瓦金

2012 年 8 月 1 日于海西漳州

① 柯斯特利金，2008a

② 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组，2003；张禾瑞等，2007

符 号 表

$\mathbb{N}$　非负整数集

$\mathbb{N}^*$　自然数集(正整数集)

$\mathbb{Z}$　整数集(整数环)

$\mathbb{Q}$　有理数集(有理数域)

$\mathbb{R}$　实数集(实数域)

$\mathbb{C}$　复数集(复数域)

Σ　连加号

Π　连乘号

$\varnothing$　空集

$a\in A$　a 是集合 A 的元素

$a\notin A$　a 不是集合 A 的元素

$B\subseteq A$　B 是 A 的子集

$B\subset A$　B 是 A 的真子集

$B\nsubseteq A$　B 不是 A 的子集

$P(A)(2^A)$　A 的幂集合

$A\cap B$　A 与 B 的交集

$A\cup B$　A 与 B 的并集

$A-B$　A 与 B 的差集

$A\times B$　A 与 B 的 Descartes 积

$\sigma:A\rightarrow B$　σ 是 A 到 B 的一个映射

1_A　A 的恒等映射(变换)

$\mathbb{F}$　域

$\mathbb{F}_q(\mathrm{GF}(q))$　含 q 个元素的有限域

$\mathrm{ch}\mathbb{F}$　域 $\mathbb{F}$ 的特征

$\boldsymbol{I}_n$　n 阶单位矩阵

$\mathbb{F}^{m\times n}$　$\mathbb{F}$ 上 $m\times n$ 矩阵的集合

$\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$　$\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵全体

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$　$\mathbb{F}$ 上 n 阶可逆矩阵全体

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$　$\mathbb{F}$ 上行列式为 1 的 n 阶矩阵全体

δ_{ij}　Kronecker 符号

$\bar{a}$　a 的共轭复数

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=(\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})$　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置

$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹

$\boldsymbol{A}^{-1}$　可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵

$\boldsymbol{P}_{ij}$　互换矩阵

$\boldsymbol{D}_i(k)$　倍法矩阵

$\boldsymbol{T}_{ij}(k)$　消法矩阵

$\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$　对角元素为 $a_1,\cdots,a_n$ 的对角矩阵

$\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_k)$　对角块为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 的块对角矩阵

$C_r(a_1,a_2,\cdots,a_n)$　由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 确定的循环矩阵

$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$　n 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数

$|\boldsymbol{A}|(\det\boldsymbol{A})$　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 i_1 行、i_2 行、$\cdots$、i_k 行与 j_1 列、j_2 列、$\cdots$、j_k 列交叉处元素所成的子式

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix},k=1,\cdots,n$　$\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式

$\boldsymbol{A}_c\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{A}$ 中 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的余子式

$\hat{\boldsymbol{A}}_c\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{A}$ 中 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式

$\boldsymbol{A}_{ij}$　$\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式

$\widetilde{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 所相应的子矩阵

$\widetilde{\boldsymbol{A}}_c\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{A}_c\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 所相应的子矩阵

$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$　$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

rank$\boldsymbol{A}$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

rank$T$(rank$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$) 向量组 $T(\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\})$的秩

$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相抵

$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$ n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似

$\boldsymbol{T}/\boldsymbol{A}$ 分块矩阵 $\boldsymbol{T}$ 中可逆子块 $\boldsymbol{A}$ 的 Schur 补

$\mathbb{F}^n$ 数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维列(行)向量全体

$\mathbf{0}$ 零向量

$-\boldsymbol{\alpha}$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量

$R(\boldsymbol{A})$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间

$N(\boldsymbol{A})$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间

$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)$ 由向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$生成的子空间

$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的增广矩阵

$\boldsymbol{\gamma}+W\subseteq V$ 向量空间 V 的子空间 W 关于向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的线性流形

$\boldsymbol{A}^{(i,\cdots,j)}$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i,\cdots,j\}$-逆

$\boldsymbol{A}^+$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆

$\boldsymbol{A}^d$ n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆

$\boldsymbol{A}^\#$ n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的群逆

$\boldsymbol{A}\{i,\cdots,j\}$ $\boldsymbol{A}$ 的$(i,\cdots,j)$-逆全体

$\mathbb{F}[x]$ $\mathbb{F}$ 上关于未定元 x 的一元多项式全体

$\mathbb{F}[x]_n$ $\mathbb{F}[x]$中次数小于 n 及零多项式的全体

$\deg f(x)$ 多项式 $f(x)$的次数

$(f(x),g(x))$ 多项式 $f(x)$与 $g(x)$的首 1 的最大公因式(若 $f(x)=0,g(x)=0$,约定 $(f(x),g(x))=0$)

$(f(x),g(x))=1$ 多项式 $f(x)$与 $g(x)$互素

$[f(x),g(x)]$ 多项式 $f(x)$与 $g(x)$的首 1 的最小公倍式

$f(x)\mid g(x)$ $f(x)$整除 $g(x)$

$f(x)\nmid g(x)$ $f(x)$不整除 $g(x)$

$f'(x)$ 多项式 $f(x)$的形式导数

$f^{(k)}(x)$ 多项式 $f(x)$的 k 阶导数

$R(f,g)$ 多项式 $f(x)$与 $g(x)$的结式

$\mathbb{F}[x_1,\cdots,x_m]$ $\mathbb{F}$ 上关于独立未定元 $x_1,\cdots,x_m$ 的多项式全体

U_n n 次单位根乘法群

U_∞ 所有单位根所成的乘法群

e_L 左单位元

e_R 右单位元

a_L^{-1} a 的左逆元

a_R^{-1} a 的右逆元

a^{-1} a 的逆元

K_4 Klein 四元群

$H\leqslant G$ H 是 G 的子群

$\langle a\rangle$ a 生成的循环子群

$C_G(K)$ 群 G 中 K 的中心化子

$N_G(K)$ 群 G 中 K 的正规化子

$\mathbb{Z}[i]$ Gauss 整数环

$\mathbb{Z}_m$ 模 m 的剩余类环

$\mathbb{Z}_p$(p 是素数) 模 p 的剩余类域

$\mathbb{H}$ 实四元数除环

$A\overset{\sigma}{\cong}\widetilde{A}$ σ 是代数系统 A 到代数系统 $\widetilde{A}$ 的同构映射

$A\cong\widetilde{A}$ 代数系统 A 与代数系统 $\widetilde{A}$ 同构

$A/\sim$($\sim$是 A 的等价关系) A 关于$\sim$的商集合

$\dim V$ 向量空间 V 的维数

$V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_t$ 子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_t$ 的交空间

$V_1+V_2+\cdots+V_t$ 子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_t$ 的和空间

$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_t$ 子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_t$ 的直和

V/W V 对子空间 W 的商空间

$\mathrm{Codim}_V W$ W 在 V 中的余维数

$\mathrm{Hom}(V,W)$ 向量空间 V 到 W 的线性映射全体

$\mathrm{End}V$ 向量空间 V 的线性算子全体

$\mathrm{Im}\sigma$ ($\sigma\in\mathrm{Hom}(V,W)$)线性映射 σ 的值域

$\mathrm{Ker}\sigma$ (σ 同上)线性映射 σ 的核

$\mathrm{rank}\sigma$ 线性映射 σ 的秩

$\mathrm{Coker}\sigma$ ($=V/\mathrm{Im}\sigma$)线性映射 σ 的余核

$\dim\mathrm{Ker}\sigma$ 线性映射 σ 的零度

$\mathbb{F}[\sigma]$ $\mathbb{F}$ 上关于线性算子 σ 的多项式环

$f_\sigma(\lambda)$ 线性算子 σ 的特征多项式

$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$m_\sigma(\lambda)$ 线性算子 σ 的最小多项式

$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式

V_{λ_0} 特征值 λ_0 的特征子空间

$\sigma|_W$ 线性算子 σ 在不变子空间 W 上的导出算子

$\mathbb{F}[\lambda]^{m\times n}$ $\mathbb{F}$ 上的关于 λ 的多项式为元素的 $m\times n$ 矩阵的集合

$\mathrm{M}_n(\mathbb{F}[\lambda])$ $\mathbb{F}$ 上的以 λ 的多项式为元素的 n 阶矩阵的集合

$\boldsymbol{A}(\lambda)\cong\boldsymbol{B}(\lambda)$ λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵

$\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵

$F_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{F}))$ $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形

$J_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形

$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积

$|\boldsymbol{\alpha}|$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度

$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交

$V\overset{\mathrm{E}}{\cong}W$ Euclid 空间 V 与 W 同构

$W^\perp$ W 的正交补

$G(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的 Gram 行列式

σ_W 在子空间 W 上的正交投影

τ_W 向量空间 V 关于子空间 W 的反射

$\boldsymbol{T}_{ij}$ 初等旋转矩阵

σ^* σ 的共轭算子

$V=W_1\perp W_2\perp\cdots\perp W_k$ V 是子空间 W_1，$W_2,\cdots,W_k$ 的正交直和

$U(n)$ n 维酉空间的酉群

$V^*(=T_1(V))$ 向量空间 V 的对偶空间

$\sigma^*:V^*\to U^*$ 线性映射 σ 的对偶映射

$\mathrm{rad}_L U$ 双线性函数的左根

$\mathrm{rad}_R V$ 双线性函数的右根

$T_2(V)$ V 的所有双线性函数的集合

$S_2(V)$ V 的所有对称双线性函数的集合

$\Lambda_2(V)$ V 的所有斜对称双线性函数的集合

$V\otimes W$ 向量空间 V 与 W 的张量积

$\sigma\otimes\tau$ 线性算子 σ 与 τ 的张量积

$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的张量积

目　录

绪论　高等代数的内容、方法和意义

高等代数是大学数学各专业的一门主干基础课.学生在高等代数中将学习哪些基础理论?如何学好这门课程?学之为何用?注意到21世纪对数学人才素质的要求,我们将对这些问题作简要的回答.

一、代数学的起源与发展

代数学起源于人们熟悉的自然数的加法、乘法的计算艺术.公元3世纪希腊人Diophantus的《算术》对代数思想和符号已有重要影响."代数"一词来源于阿拉伯数学家、天文学家Mohammed ibn Mûsâal-Khowarizmî的著作《Al-jabrw′al muqâbala》(约公元825年),其原义是还原、化简的科学.代数的进步依赖于较好符号体系的建立.15世纪结束时,开始使用现代符号"+"和"−";16世纪末,法国数学家F. Viète首先用拉丁字母表示常数和变数,大多数代数符号到17世纪中叶已经知道.这标志着代数学的"史前时期"的结束,代数学的真正发展是在以后的三个多世纪.期间,随着历史进程,代数学的主要研究对象和内容经历了三次根本的变革.

初等代数　与算术(对数字进行计算)不同,在17~18世纪中,代数学相当于现在人们观念上的初等代数,被理解为**在代数符号上进行计算的科学,即字母计算、字母变换、解方程的学科**.反映这一时期的代表作是1770年出版的18世纪最著名数学家L. Euler的《代数学引论》.

方程分析　多项式的根曾是数学研究的一个热点.18世纪和19世纪的代数学处理的主要对象是多项式,即代数方程.多项式研究的一个突出问题是代数基本定理的证明,1799年,Gauss在他的博士论文中在不依赖于"理想"根存在的假设下证明了这个定理(严格的证明到1920年才完成;The Amer. Math. Monthly(2003,110(7):620~623)还给出一个完全线性代数框架下的证明).由于实际应用和科学研究的需要,高次多项式根的计算与分布是当时许多数学家关注的问题之一,C. F. Gauss,J. L. Lagrange,P. Ruffini,C. Sturm等对其都作出过贡献.历史上多项式根的最引人注目的问题是一元高次代数方程的根式求解问题.16世纪,意大利数学家发现了解三次代数方程的Cardano公式和解四次代数方程的Ferrari方法.因此,人们关心高于四次的代数方程可否用根式求解.三个世纪的探索,仍然找不到求根公式.于是,根式求解不存在的证明引起了关注,A. Girad,J. L. Lagrange,P. Ruffini,Gauss对此都作过研究.1824年,挪威青年数学家N. H. Abel证明了高于四次的方程一般不能用根式求解;1830年,法国青年数学家E. Galois给出了一元代数方程可以用根式求解的一个一般的判别法,圆满地解决了长达三百多年的数学难题.因此,18~19

世纪，代数学被理解为**方程分析的学科**. 1866 年出版的 J. Serret 的《高等代数教程》反映了这一认识.

抽象代数(近世代数)　从 19 世纪中叶以后，代数学从方程式论转向代数运算的研究. 首先，Galois 在解决代数方程用根式求解问题时开创了群的研究. 此后，A. Cayley，C. Jordan，M. S. Lie，F. Frobenius，F. Klein，H. Poincare 等对群的研究都作出了贡献；1882 年，Klein 的学生 W. von Dyck 引进了抽象群的概念. 其次，德国数学家 E. E. Kummer，P. G. L. Dirichlet，L. Kronecker，R. Dedeκind，D. Hilbert 在代数数论的研究中引进了域、环、理想等概念. 在 19 世纪，线性代数和代数的研究十分活跃，1843 年爱尔兰数学家、天文学家 W. R. Hamilton 发现了四元数，1844 年德国数学家 H. G. Grassmann 发表了《线性扩张论》，1847 年 A. Cayley 给出了八元数非结合代数，从而推进了线性代数、结合代数、非结合代数的进一步研究. 此间，英国数学家 G. Boole 在研究思维规律中建立了 Boole 代数；1855 年 A. Cayley 引进了矩阵的简化记号，较系统地研究了矩阵代数，J. Sylvester，A. L. Cauchy，C. Jordan 和 F. Frobenius 等对矩阵的研究都颇有成果.

以上研究为代数学在 19 世纪末向现代发展阶段转移开辟了道路. 20 世纪初，在 D. Hilbert，E. Nöether 和 E. Artin 影响下，抽象代数应运而生，1930～1931 年荷兰数学家 B. L. van der Waerden 的两卷本《近世代数》出版，代数学成为**研究代数运算规律和各种代数结构的学科**，即**抽象代数**学科.

20 世纪 30 年代以来，代数学继续向纵深发展，不仅产生了同调代数、范畴论、代数 K-理论等新分支，而且代数学的一些成果和方法直接应用到自然科学、工程技术和社会科学的诸多领域，并产生了代数编码学、语言代数学、代数自动机理论、计算机代数等应用代数分支. 代数学在整个数学中的地位显得越来越重要，代数方法已成为现代数学的基本方法，因而与拓扑学一起成了 20 世纪抽象数学的两大领域，如 1994 年，著名的 Fermat 大定理的解决就深受代数学的影响.

二、高等代数的研究对象

张禾瑞等(2007)指出："作为大学数学基础课的代数，是中学代数的继续和提高."具体地说，中学数学介绍过二元、三元一次方程组；高等代数则要学习一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

对此，中学数学着重于具体求解；而在高等代数中，首先要回答的是方程组(1)是否有解，即回答解的存在性问题. 方程组(1)的解可能不止一个，因而要回答方程组(1)的解有多少；是唯一，还是有无穷多个；最后才给出解的表示. 又如在中学数学中，大家

已经学过不少一元二次方程、二次多项式以及因式分解的知识;在高等代数中,将学习一般的一元多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a. \tag{2}$$

什么称为因式分解? 中学数学未能给予回答,在高等代数中,将建立一元多项式因式分解的整体理论.

根据新的《普通高中数学课程标准》,高中数学已经在必修课程中介绍了平面上的向量,在选修系列 2 中介绍了空间中的向量与立体几何. 在高等代数中,将此一般化,介绍一般向量空间的概念,揭示向量空间的结构及其度量,这些将构成高等代数的主体. 高中数学选修系列 4 中还介绍过矩阵与变换,将其推广,矩阵将成为研究向量空间之间的线性映射、线性算子的极其有用的工具,而且矩阵本身有清晰的代数结构,也是高等代数的基本内容.

综上,向量空间、矩阵、多项式成了高等代数研究的三大对象.

三、高等代数的思想与方法

怎样处理高等代数中的三大研究对象? 20 世纪二三十年代形成的抽象代数的思想就是处理高等代数的思想,具体地,就是**一般性**的思想,前苏联著名代数学家 A. Г. 库洛什的著作《一般代数学讲义》的书名就有这个意思. 例如,线性方程组(1),其系数 a_{ij},常数项 b_i 在高等代数中都属于一般数域 $\mathbb{F}$;多项式(2)的 a_i 也在 $\mathbb{F}$ 中. 因此,高等代数中所建立的线性方程组理论、多项式的代数结构都对一般数域论述,对矩阵的代数结构也不例外;同时随着学习的深入,当阐述群、环、域概念之后,回过头来又可以用 20 世纪建立起来的一般代数概念刻画矩阵代数、多项式代数,并进而阐述域上向量空间及其线性算子的理论,阐述向量空间的度量基础. 这种**一般性的思想**使得高等代数的教学贯串一条主线:**三大研究对象的代数运算规律及其代数结构**.

一般性思想是与高等代数的方法联系在一起的. 其方法主要有两种.

形式表示方法　如线性方程组(1)就是采用形式表示的,称为线性方程组的一般形式,记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix},$$

则方程组(1)就分别有如下的向量表示、矩阵表示:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}, \tag{1$'$}$$

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta},\quad \text{其中 } \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1$''$}$$

这样多种形式表示联系在一起，方便阐述线性方程组解的理论，圆满回答前面说过的线性方程组解的三个基本问题. 又如一元多项式(2)也采用了形式表示，其中 x 是未定元. 通过这样一般的形式表示，引进运算、初等变换，建立起矩阵代数、多项式代数的整体理论.

公理化方法 高等代数的主体——向量空间及其线性算子：其向量空间就是采用纯公理定义的. 这样定义有别于《几何基础》的做法，它是作为代数系统之一来处理的，也就是采用如抽象代数中群、环的处理. 这样处理来之不易，如前面对历史的简述，群、环、域等代数系统在 19 世纪已有许多成果，但还没有形成抽象代数这棵大树. 在 19 世纪、20 世纪之交，特别是在 20 世纪 20 年代，在 E. Nöether 等的统一性思想及哥廷根、汉堡的系列讲学活动基础上，代数公理化方法才成熟，其大树也随之成长. 因此，逐步深入地认识公理化方法非常重要，这方面尤其要加强联系思维，如线性算子与矩阵的联系蕴涵着丰富的表示论思想与方法.

四、高等代数的学习价值

打好基础 增进素质 高等代数的基础理论和方法，不仅是学习代数后继课程的基础，而且也是学习基础数学、计算数学、应用数学、随机数学等分支学科相关课程的基础，这些课程包括微分方程、计算数学、数学模型、泛函分析、微分几何、微分流形、一般拓扑学、概率统计、线性规划等. 因此，理解高等代数的思想，掌握其基础理论和方法，在学习中加强辩证思维、抽象思维和逻辑推理的训练，学生不仅能够打好基础，而且还能增进自身的数学素质，使自己在将来成为一个名副其实的数学工作者.

联系中数 服务未来 高等代数与中学数学的联系使得它的一些内容对中学数学教学有居高临下的指导作用，中学数学中的某些原型对于克服代数概念抽象、证题难以入手等难点有时也颇有价值，在学习中要注意加强这方面的联系，这对于将来从事中小学数学教学工作的学生来说是十分有益的.

起飞平台 开拓发展 美国国家研究委员会的调研报告《人人关心数学教育的未来》中有这么一句话："大学数学为许多领域的专业提供坚实的起飞平台."在 21 世纪，大学数学不再是纯粹为培养未来数学家而设立的专业，更主要的是为培养各级各类数学教师和高层次人才打基础的. 掌握大学数学的人，将在计算机、自动控制、系统规划、现代经济管理等诸多领域发挥积极作用，随着知识产业化的进程，高等代数的知识，数学的理论和方法将越来越显示出强大的经济效用和社会效益.

美化心灵 和谐文明 数学是美的，作为数学各专业基础课的高等代数也是美的，在教学中学生将感受到简洁、清晰、对称、奇异的代数"画面"，享受学习过程中的快乐. 为此，重视标准形等的运用和学习引导，可以加强数学美的效果. 数学的美是心灵深处的美，它对于培养人们美的情操、开发个人智能、构建现代和谐文明都将发挥积极的作用.

总之，学习高等代数有着深刻的基础、应用、素质的意义和价值.