

高等代数教程

庄瓦金 编著



科学出版社

013045349

015
106

高等代数教程

庄瓦金 编著



科学出版社

北京



北航

C1653470

015
106

013042348

内 容 简 介

本书阐述了高等代数中的基本思想、代数结构及其方法. 全书共 10 章, 内容包括: 矩阵, 行列式, 线性方程组解的理论, 多项式代数, 群、环、域的概念, 向量空间, 线性算子, 相似、合同标准形, Euclid 空间与酉空间, 双线性度量空间. 书前有绪论、预备章, 各章节末附有精选习题, 某些章节后增加了“应用参考”, 以拓宽学生视野.

本书可作为普通高等院校数学各专业高等代数基础课教材或教学参考书, 也可作为数学各专业考研参考书, 还可供相关专业和科技人员学习线性代数基础时参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数教程/庄瓦金编著. —北京: 科学出版社, 2013

ISBN 978-7-03-037371-7

I. ①高… II. ①庄… III. ①高等代数-高等学校-教材 IV. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 084268 号

责任编辑: 姚莉丽 / 责任校对: 赵桂芬

责任印制: 阎磊 / 封面设计: 陈敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京九天志诚印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 4 月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2013 年 4 月第一次印刷 印张: 29 1/2

字数: 60 9000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

本书第一稿曾在漳州师范学院使用7年,得到省内外一些同行的认可,并经同行专家成果鉴定后获得了2005年福建省优秀教学成果二等奖。

期间,教育部本科教育质量工程实施,国内外一些优秀教材^①相继出版,福建省“高等代数”与“线性代数”课程建设研讨会也每年举行两次,作者应邀在会上连续作了九次大会报告,因而也对第一稿的修改进行了反复探索,促成了本书的问世。

本书在围绕突出教学主线^②、展现代数本性、提升本科教学水平方面做了一些努力。

受相关教材^③启发,在讲授向量空间之前增设了“第五章 群、环、域的概念”,不仅使得其后的阐述可以在更一般的域上讨论,而且也为前四章的矩阵代数、多项式代数注入了一般性的活力。总之,使全书更好地贯穿了一条教学主线,显现代数本性。当然,学生接受得了吗?我们的实践是肯定的,因为一般性思想,始终是高等代数的思想,早在1964年,王湘浩院士与谢邦杰教授就这样做了。在当代,代数学在整个数学科学中有着极其重要的地位,打好代数基础对本科教学十分必要,这个任务就由高等代数、抽象代数来完成,像莫斯科大学的力度^④,时下的中国显然做不到。但吸纳其有益之点滴应该是值得探索的,不然,我们就难以进入数学强国之列。

本书加强了向量空间及其线性映射理论的系统性与深广度。例如,书中阐述了商空间的概念、线性映射基本定理、线性算子的张量积。考虑到各高校教学水平的差异与学生素质有别,有些节、小节加了“*”号,以供教师选讲或学生选读用。作者认为,应该鼓励普通高校的优秀学生选读课堂上老师没讲的深刻内容,以开拓视野。

由于质量工程建设的开展,网上的教育功能得到了广泛认同,所以第一稿中的辅线就没有设立的必要。注意到应用仍然是国内教材的弱项,高等代数的教学价值始终是其教学中应当足够重视的理念。因此,本书加强了高等代数有用的资料供给,一是在前7章,尤其是第1章,增加了“应用参考”的介绍,供教师点讲或学生参考用;二是从第8章起删去“应用参考”的篇幅,但在参考文献中增添了有关的参考书,并在本书的适当处加入注记,点述应用。

重视术语、符号表述,其中术语与国内教材有别的是“线性变换”采用了《代数学

① 姚慕生,2003;丘维声,2003;万哲先,2004;张贤科等,2004;施武杰等,2005;牛凤文等,2006;李尚志,2006;柯斯特利金,2006,2008a,2008b;蓝以中,2007

② 丘维声,2005;蓝以中,2007

③ 王湘浩等,1964;柯斯特利金,2006,2008a

④ 柯斯特利金,2006,2008a,2008b

引论》^①的做法,改为“线性算子”,这除了注意到《代数学引论》的先进性外,也有利于向认识无限维空间过渡.符号的表述在全书之首增加了“符号表”,这将使教与学更为方便.

本书面向所有本科高校数学各专业.教学时数 170 学时(每周 5 学时(含习题课),讲授一年)的学校,可以讲授完书中不加“*”号的内容,并可选讲加“*”号的少部分内容;教学时数 204 学时(每周 6 学时(含习题课),讲授一年)的学校,原则上可以讲授完本书的绝大部分内容.本书各节末附有数量充足的精选习题,大多是作者 30 多年来讲授此课程的课外作业与习题课上的练习,同时酌情精选了这些年来一些高校硕士研究生招生的高等代数试题,因而不仅覆盖了一些经典教材^②的绝大部分习题,而且还有一定剩余,可供各校教学各环节酌情选用.

本书是作者主持的福建省精品课程——漳州师范学院“高等代数”的建设成果,得到了漳州师范学院(将更名为“闽南师范大学”)优秀教材出版基金的资助.本书的出版也得到科学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢.

由于作者学识所限,编著工作条件较为艰辛,书中定有不足之处,敬请各位专家及广大读者批评指正.

庄瓦金

2012 年 8 月 1 日于海西漳州

① 柯斯特利金,2008a

② 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组,2003;张禾瑞等,2007

符 号 表

$\mathbf{N}$	非负整数集	$\mathbf{A}^{-1}$	可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵
$\mathbf{N}^*$	自然数集(正整数集)	$\mathbf{P}_{ij}$	互换矩阵
$\mathbf{Z}$	整数集(整数环)	$\mathbf{D}_i(k)$	倍法矩阵
$\mathbf{Q}$	有理数集(有理数域)	$\mathbf{T}_{ij}(k)$	消法矩阵
$\mathbf{R}$	实数集(实数域)	$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$	对角元素为 $a_1, \dots, a_n$ 的对角矩阵
$\mathbf{C}$	复数集(复数域)	$\text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k)$	对角块为 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ 的块对角矩阵
Σ	连加号	$\mathbf{C}_r(a_1, a_2, \dots, a_n)$	由 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 确定的循环矩阵
Π	连乘号	$\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$	n 排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的逆序数
$\emptyset$	空集	$ \mathbf{A} (\det \mathbf{A})$	n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式
$a \in A$	a 是集合 A 的元素	$\mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的 i_1 行、 i_2 行、 $\dots$ 、 i_k 行与 j_1 列、 j_2 列、 $\dots$ 、 j_k 列交叉处元素所成的子式
$a \notin A$	a 不是集合 A 的元素	$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}, k=1, \dots, n$	$\mathbf{A}$ 的 n 个顺序主子式
$B \subseteq A$	B 是 A 的子集	$\mathbf{A}_c \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$	$\mathbf{A}$ 中 $\mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ 的余子式
$B \subset A$	B 是 A 的真子集	$\hat{\mathbf{A}}_c \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$	$\mathbf{A}$ 中 $\mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式
$B \not\subseteq A$	B 不是 A 的子集	$\mathbf{A}_{ij}$	$\mathbf{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式
$P(A)(2^A)$	A 的幂集合	$\tilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$	$\mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ 所相应的子矩阵
$A \cap B$	A 与 B 的交集	$\tilde{\mathbf{A}}_c \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$	$\mathbf{A}_c \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ 所相应的子矩阵
$A \cup B$	A 与 B 的并集	$\text{adj} \mathbf{A}$	$\mathbf{A}$ 的伴随矩阵
$A - B$	A 与 B 的差集		
$A \times B$	A 与 B 的 Descartes 积		
$\sigma: A \rightarrow B$	σ 是 A 到 B 的一个映射		
1_A	A 的恒等映射(变换)		
F	域		
$\mathbb{F}_q(\text{GF}(q))$	含 q 个元素的有限域		
$\text{ch} F$	域 F 的特征		
$\mathbf{I}_n$	n 阶单位矩阵		
$F^{m \times n}$	F 上 $m \times n$ 矩阵的集合		
$M_n(F)$	F 上 n 阶矩阵全体		
$\text{GL}_n(F)$	F 上 n 阶可逆矩阵全体		
$\text{SL}_n(F)$	F 上行列式为 1 的 n 阶矩阵全体		
δ_{ij}	Kronecker 符号		
$\bar{a}$	a 的共轭复数		
$\mathbf{A}^T$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置		
$\mathbf{A}^H = (\bar{\mathbf{A}}^T)$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的共轭转置		
$\text{tr} \mathbf{A}$	n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的迹		

- $\text{rank} A$ 矩阵 A 的秩
 $\text{rank} T(\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\})$ 向量组 $T(\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\})$ 的秩
 $A \cong B$ 矩阵 A 与矩阵 B 相抵
 $A \simeq B$ n 阶矩阵 A 与 B 合同
 $A \sim B$ n 阶矩阵 A 与 B 相似
 T/A 分块矩阵 T 中可逆子块 A 的 Schur 补
 $\mathbb{F}^n$ 数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维列(行)向量全体
 0 零向量
 $-\alpha$ 向量 α 的负向量
 $R(A)$ 矩阵 A 的列空间
 $N(A)$ 矩阵 A 的零空间
 $L(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ 由向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ 生成的子空间
 $\tilde{A}=(A, \beta)$ 线性方程组 $AX=\beta$ 的增广矩阵
 $\gamma+W \subseteq V$ 向量空间 V 的子空间 W 关于向量 γ 的线性流形
 $A^{(i, \dots, j)}$ 矩阵 A 的 $\{i, \dots, j\}$ -逆
 A^+ 矩阵 A 的 Moore-Penrose 逆
 A^d n 阶矩阵 A 的 Drazin 逆
 $A^\#$ n 阶矩阵 A 的群逆
 $A\{i, \dots, j\}$ A 的 $\{i, \dots, j\}$ -逆全体
 $\mathbb{F}[x]$ $\mathbb{F}$ 上关于未定元 x 的一元多项式全体
 $\mathbb{F}[x]_n$ $\mathbb{F}[x]$ 中次数小于 n 及零多项式的全体
 $\deg f(x)$ 多项式 $f(x)$ 的次数
 $(f(x), g(x))$ 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首 1 的最大公因式(若 $f(x)=0, g(x)=0$, 约定 $(f(x), g(x))=0$)
 $(f(x), g(x))=1$ 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素
 $[f(x), g(x)]$ 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首 1 的最小公倍式
 $f(x) | g(x)$ $f(x)$ 整除 $g(x)$
 $f(x) \nmid g(x)$ $f(x)$ 不整除 $g(x)$
 $f'(x)$ 多项式 $f(x)$ 的形式导数
 $f^{(k)}(x)$ 多项式 $f(x)$ 的 k 阶导数
 $R(f, g)$ 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式
 $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_m]$ $\mathbb{F}$ 上关于独立未定元 $x_1, \dots, x_m$ 的多项式全体
 U_n n 次单位根乘法群
 U_∞ 所有单位根所成的乘法群
 e_L 左单位元
 e_R 右单位元
 a_L^{-1} a 的左逆元
 a_R^{-1} a 的右逆元
 a^{-1} a 的逆元
 K_4 Klein 四元群
 $H \leq G$ H 是 G 的子群
 $\langle a \rangle$ a 生成的循环子群
 $C_G(K)$ 群 G 中 K 的中心化子
 $N_G(K)$ 群 G 中 K 的正规化子
 $\mathbb{Z}[i]$ Gauss 整数环
 $\mathbb{Z}_m$ 模 m 的剩余类环
 $\mathbb{Z}_p$ (p 是素数) 模 p 的剩余类域
 $\mathbb{H}$ 实四元数除环
 $A \xrightarrow{\sigma} \tilde{A}$ σ 是代数系统 A 到代数系统 $\tilde{A}$ 的同构映射
 $A \cong \tilde{A}$ 代数系统 A 与代数系统 $\tilde{A}$ 同构
 $A/\sim$ ($\sim$ 是 A 的等价关系) A 关于 $\sim$ 的商集合
 $\dim V$ 向量空间 V 的维数
 $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_t$ 子空间 $V_1, V_2, \dots, V_t$ 的交空间
 $V_1 + V_2 + \dots + V_t$ 子空间 $V_1, V_2, \dots, V_t$ 的和空间
 $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_t$ 子空间 $V_1, V_2, \dots, V_t$ 的直和
 V/W V 对子空间 W 的商空间
 $\text{Codim}_V W$ W 在 V 中的余维数
 $\text{Hom}(V, W)$ 向量空间 V 到 W 的线性映射全体
 $\text{End} V$ 向量空间 V 的线性算子全体
 $\text{Im} \sigma$ ($\sigma \in \text{Hom}(V, W)$) 线性映射 σ 的值域
 $\text{Ker} \sigma$ (σ 同上) 线性映射 σ 的核
 $\text{rank} \sigma$ 线性映射 σ 的秩
 $\text{Coker} \sigma$ ($=V/\text{Im} \sigma$) 线性映射 σ 的余核
 $\dim \text{Ker} \sigma$ 线性映射 σ 的零度
 $\mathbb{F}[\sigma]$ $\mathbb{F}$ 上关于线性算子 σ 的多项式环

$f_{\sigma}(\lambda)$	线性算子 σ 的特征多项式	$G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$	向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的 Gram 行列式
$f_A(\lambda)$	n 阶矩阵 A 的特征多项式	σ_W	在子空间 W 上的正交投影
$m_{\sigma}(\lambda)$	线性算子 σ 的最小多项式	τ_W	向量空间 V 关于子空间 W 的反射
$m_A(\lambda)$	n 阶矩阵 A 的最小多项式	T_{ij}	初等旋转矩阵
V_{λ_0}	特征值 λ_0 的特征子空间	σ^*	σ 的共轭算子
$\sigma _W$	线性算子 σ 在不变子空间 W 上的导出算子	$V = W_1 \perp W_2 \perp \dots \perp W_k$	V 是子空间 $W_1, W_2, \dots, W_k$ 的正交直和
$\mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$	$\mathbb{F}$ 上的关于 λ 的多项式为元素的 $m \times n$ 矩阵的集合	$U(n)$	n 维酉空间的酉群
$M_n(\mathbb{F}[\lambda])$	$\mathbb{F}$ 上的以 λ 的多项式为元素的 n 阶矩阵的集合	$V^* (= T_1(V))$	向量空间 V 的对偶空间
$A(\lambda) \cong B(\lambda)$	λ -矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵	$\sigma^*: V^* \rightarrow U^*$	线性映射 σ 的对偶映射
$\lambda I_n - A$	A 的特征矩阵	$\text{rad}_L U$	双线性函数的左根
$F_A (A \in M_n(\mathbb{F}))$	A 的有理标准形	$\text{rad}_R V$	双线性函数的右根
$J_A (A \in M_n(\mathbb{C}))$	A 的 Jordan 标准形	$T_2(V)$	V 的所有双线性函数的集合
$\langle \alpha, \beta \rangle$	向量 α 与 β 的内积	$S_2(V)$	V 的所有对称双线性函数的集合
$ \alpha $	向量 α 的长度	$\Lambda_2(V)$	V 的所有斜对称双线性函数的集合
$\alpha \perp \beta$	向量 α 与 β 正交	$V \otimes W$	向量空间 V 与 W 的张量积
$V \stackrel{E}{\cong} W$	Euclid 空间 V 与 W 同构	$\sigma \otimes \tau$	线性算子 σ 与 τ 的张量积
$W^{\perp}$	W 的正交补	$A \otimes B$	矩阵 A 与 B 的张量积

目 录

前言

符号表

绪论 高等代数的内容、方法和意义 …

…………… 1

* 预备章 集论语言 数域 …… 5

0.1 集合…………… 5

习题 0.1 …………… 7

0.2 映射…………… 7

0.2.1 映射的概念 …………… 7

0.2.2 映射的合成 …………… 8

习题 0.2 …………… 10

0.3 数学归纳法 …………… 10

习题 0.3 …………… 13

0.4 整数算术 …………… 13

0.4.1 整除的概念 …………… 13

0.4.2 最大公因数 …………… 14

0.4.3 算术基本定理 …………… 15

习题 0.4 …………… 16

0.5 数环和数域 …………… 16

习题 0.5 …………… 18

第 1 章 矩阵…………… 19

1.1 消元法 …………… 19

1.1.1 例引 …………… 19

1.1.2 线性方程组的概念 …………… 20

1.1.3 化为梯形形 …………… 21

1.1.4 线性方程组解的讨论 …………… 22

习题 1.1 …………… 23

应用参考 CT 机应用时的线性方程组

问题 …………… 24

1.2 矩阵的运算 …………… 25

1.2.1 矩阵的实例和记号 …………… 25

1.2.2 矩阵的运算 …………… 27

1.2.3 矩阵的转置与共轭 …………… 30

习题 1.2 …………… 32

应用参考 矩阵乘法在高科技中的应用

…………… 33

1.3 可逆矩阵 初等矩阵 …… 34

1.3.1 可逆矩阵的概念 …………… 34

1.3.2 初等变换与初等矩阵 …… 35

1.3.3 求逆矩阵的初等变换法 …… 38

习题 1.3 …………… 39

应用参考 矩阵编制密码简介 …… 40

1.4 分块矩阵 …………… 41

1.4.1 矩阵的分块形式 …………… 42

1.4.2 分块矩阵的运算 …………… 42

1.4.3 分块矩阵的初等变换 …… 45

习题 1.4 …………… 46

应用参考 电力系统潮流计算中节

点阻抗矩阵的分块公式 …………… 47

第 2 章 行列式…………… 51

2.1 行列式的定义 …………… 51

2.1.1 排列的奇偶性 …………… 51

2.1.2 n 阶行列式的定义 …………… 53

习题 2.1 …………… 55

2.2 行列式的性质 …………… 55

习题 2.2 …………… 59

2.3 行列式的定理 …………… 60

2.3.1 乘法定理 …………… 60

2.3.2 按一行(列)展开定理 …… 61

2.3.3 Laplace 展开定理 …………… 64

习题 2.3 …………… 66

应用参考 Laplace 展开显“灵” …… 68

2.4 行列式的计算 …………… 69

2.4.1 基本算法 …………… 69

2.4.2 化简技巧 …………… 72

2.4.3 辅助算法 …………… 73

习题 2.4 …………… 75

2.5 行列式的应用 …………… 78

2.5.1 逆矩阵的行列式公式 …… 78

2.5.2 Cramer 法则 …………… 79

习题 2.5	81	习题 3.5	120
应用参考 三角形面积的行列式公式	82	* 3.6 广义逆矩阵	121
2.6 矩阵的秩	84	3.6.1 Moore-Penrose 型广义逆	121
2.6.1 矩阵秩的概念	85	3.6.2 $\{1\}$ -逆对线性方程组的应用	124
2.6.2 矩阵秩的分块方法	86	习题 3.6	125
习题 2.6	88	第 4 章 多项式代数	127
第 3 章 线性方程组解的理论	89	4.1 一元多项式环	127
3.1 n 维列(行)向量张成的向量空间	89	4.1.1 一元多项式环的概念	127
3.1.1 向量空间 F^n	89	4.1.2 多项式的次数	129
3.1.2 F^n 的线性子空间	92	习题 4.1	130
习题 3.1	93	4.2 整除的概念	130
3.2 向量的线性相关性	93	4.2.1 带余除法	130
3.2.1 线性相关与线性无关的概念	93	4.2.2 整除的概念	132
3.2.2 替换定理	96	习题 4.2	134
习题 3.2	97	4.3 最大公因式	134
3.3 维数、秩及其应用	98	4.3.1 两个多项式的最大公因式	135
3.3.1 基和维数	98	4.3.2 多个多项式的最大公因式	137
3.3.2 矩阵的行秩和列秩	100	4.3.3 互素多项式	138
3.3.3 线性方程组解的两个基本问题	100	习题 4.3	139
习题 3.3	102	4.4 因式分解定理	140
3.4 线性方程组解的结构	104	4.4.1 不可约多项式的概念	140
3.4.1 齐次线性方程组情形	104	4.4.2 唯一分解定理	141
3.4.2 非齐次线性方程组情形 · 线性流形	107	4.4.3 重因式	143
习题 3.4	109	习题 4.4	145
应用参考 经济学中的齐次线性方程组	110	4.5 多项式函数	146
应用参考 平板的受热问题	113	4.5.1 一元多项式函数	146
* 3.5 线性方程组的几何应用	115	4.5.2 多项式的根	148
3.5.1 诸平面过一条直线问题	115	4.5.3 函数定义与形式定义的一致性	149
3.5.2 四点共圆问题	115	习题 4.5	149
3.5.3 一般二次曲线方程的求解	117	应用参考 多项式在建模中的应用	150
3.5.4 空间五点的 Cayley 定理与应用	117	4.6 复数域和实数域上多项式	153
		4.6.1 $\mathbb{C}$ 上的多项式的因式分解	153
		4.6.2 $\mathbb{R}$ 上的多项式的因式分解	

.....	155	5.4.1 无零因子环	206
4.6.3 Viète 定理	157	5.4.2 除环 域	208
习题 4.6	159	5.4.3 关于矩阵、多项式的注记	212
4.7 有理数域上多项式	160	习题 5.4	214
4.7.1 可约性及其判别	160	5.5 同构 等价关系	214
4.7.2 有理根的求解	163	5.5.1 代数系统的同构	215
习题 4.7	165	5.5.2 等价关系	218
4.8 多元多项式环	165	习题 5.5	222
4.8.1 多元多项式环的概念	166	第 6 章 向量空间	223
4.8.2 多元多项式的表示	168	6.1 向量空间的概念	223
4.8.3 多元多项式函数	171	6.1.1 定义公理与例子	223
* 4.8.4 多元多项式的因式分解	173	6.1.2 简单性质	225
习题 4.8	174	6.1.3 子空间	226
4.9 对称多项式	175	习题 6.1	227
4.9.1 对称多项式的基本定理	175	6.2 有限维向量空间的基与维数	228
4.9.2 一元多项式根的对称多项式	180	6.2.1 向量的线性相关性	228
习题 4.9	181	6.2.2 基	231
4.10 二元高次方程组	182	6.2.3 维数	234
4.10.1 结式的概念	182	习题 6.2	236
4.10.2 二元高次方程组的求解	184	6.3 坐标及其变换公式	237
习题 4.10	187	6.3.1 坐标	237
* 第 5 章 群、环、域的概念	188	6.3.2 基变换	238
5.1 具有代数运算的集合	188	6.3.3 坐标变换公式	240
5.1.1 二元代数运算	188	习题 6.3	241
5.1.2 半群	190	应用参考 Dürer 魔方	242
习题 5.1	192	6.4 子空间代数	244
5.2 群	192	6.4.1 交与和	244
5.2.1 定义与例子	193	6.4.2 直和	247
5.2.2 刻画定理	194	* 6.4.3 子空间格	250
5.2.3 子群的概念	196	习题 6.4	251
习题 5.2	199	6.5 向量空间的同构	252
5.3 环	199	6.5.1 基本概念	252
5.3.1 定义与例子	200	* 6.5.2 同构的运用	255
5.3.2 环的乘法半群	203	* 6.5.3 商空间	256
5.3.3 子环的概念	204	习题 6.5	259
习题 5.3	205	应用参考 线性码	259
5.4 除环、域	206	第 7 章 线性算子	262
		7.1 线性映射的概念	262
		7.1.1 定义与例子	262

7.1.2 值域与核	265	8.2.3 Frobenius 定理	324
* 7.1.3 线性映射基本定理	267	习题 8.2	325
习题 7.1	268	8.3 Jordan 标准形	326
7.2 线性算子代数	269	8.3.1 初等因子	326
7.2.1 基本运算及其代数系统	269	8.3.2 Jordan 标准形	328
7.2.2 线性算子的多项式环	271	8.3.3 与空间分解的关系	330
7.2.3 线性算子的矩阵表示	273	习题 8.3	332
7.2.4 矩阵相似的概念	276	8.4 二次型的化简与矩阵的合同	333
习题 7.2	277	8.4.1 二次型及其矩阵合同的概念	333
7.3 特征值与特征向量	278	8.4.2 二次型与对称矩阵的合同化简	336
7.3.1 定义与求法	278	8.4.3 复二次型的规范型	342
7.3.2 Hamilton-Cayley 定理	282	习题 8.4	343
7.3.3 特征向量的性质	284	8.5 Sylvester 惯性定理及正定二次型	344
7.3.4 可对角化的线性算子	285	8.5.1 Sylvester 惯性定理	344
习题 7.3	288	8.5.2 正定二次型的概念	346
应用参考 可对角化矩阵的应用两例	290	8.5.3 正定矩阵	347
7.4 不变子空间	293	8.5.4 其他类型的实二次型注记	349
7.4.1 定义与例子	294	习题 8.5	350
7.4.2 线性算子在基下矩阵的化简	294	* 8.6 Hermite 型与 Hermite 矩阵	350
* 7.4.3 不变子空间的存在性	295	习题 8.6	352
* 7.4.4 商算子	297	第 9 章 Euclid 空间与酉空间	353
习题 7.4	299	9.1 Euclid 空间的概念	353
7.5 线性算子的结构定理	300	9.1.1 定义与例子	353
7.5.1 最小多项式	300	9.1.2 度量概念	355
* 7.5.2 向量空间的准素分解	303	9.1.3 n 维 Euclid 空间的度量矩阵	357
* 7.5.3 线性算子的 Jordan 分解	306	习题 9.1	358
* 7.5.4 幂零算子的结构	308	9.2 标准正交基与正交补	359
习题 7.5	311	9.2.1 标准正交基	359
第 8 章 相似、合同标准形	313	9.2.2 Euclid 空间的同构	363
8.1 λ -矩阵的相抵化简	313	9.2.3 正交补	364
8.1.1 λ -矩阵的概念	313	9.2.4 应用:最小二乘法	366
8.1.2 λ -矩阵的相抵标准形	314	习题 9.2	368
8.1.3 唯一性——不变因子	317	9.3 正交算子	370
习题 8.1	319	9.3.1 正交算子的概念	370
8.2 有理标准形	320		
8.2.1 矩阵相似的条件	320		
8.2.2 有理标准形	322		

9.3.2 n 维 Euclid 空间的正交算子	371	* 10.1.4 线性无关性的刻画	417
* 9.3.3 初等旋转、镜像反射及其应用	375	习题 10.1	419
习题 9.3	381	10.2 双线性函数	420
9.4 对称算子与正规算子	382	10.2.1 基本定义	420
9.4.1 对称算子的刻画	382	10.2.2 度量矩阵	422
9.4.2 对称算子的化简	383	10.2.3 根子空间与非退化双线性函数	424
9.4.3 应用:二次型的正交合同(相似)化简	386	10.2.4 对称、斜对称双线性函数	426
* 9.4.4 实正规矩阵及其线性算子	390	习题 10.2	429
习题 9.4	393	10.3 正交空间	430
9.5 酉空间	394	10.3.1 基本概念	430
9.5.1 酉空间的基本概念	394	10.3.2 正交基	431
9.5.2 酉空间的标准正交基	395	10.3.3 等距同构及正交算子	432
* 9.5.3 共轭算子与正规算子	397	* 10.3.4 Minkowski 空间	434
* 9.5.4 酉算子与 Hermite 算子	400	* 10.3.5 Witt 定理	437
习题 9.5	402	习题 10.3	439
* 9.6 谱分解及其应用	404	10.4 辛空间	439
* 9.6.1 谱分解定理	404	10.4.1 斜对称双线性函数的化简	440
* 9.6.2 半正定平方根与极分解	406	10.4.2 辛空间的基本概念	441
* 9.6.3 复矩阵的奇异值分解	407	10.4.3 辛正交补	442
习题 9.6	409	* 10.4.4 辛算子	444
第 10 章 双线性度量空间	411	习题 10.4	447
10.1 对偶空间	411	* 10.5 张量积	448
10.1.1 线性函数	411	10.5.1 向量空间的张量积	448
10.1.2 对偶空间	413	10.5.2 线性算子的张量积	451
10.1.3 自反性	415	习题 10.5	453
		参考文献	455

绪论 高等代数的内容、方法和意义

高等代数是大学数学各专业的一门主干基础课. 学生在高等代数中将学习哪些基础理论? 如何学好这门课程? 学之为何用? 注意到 21 世纪对数学人才素质的要求, 我们将对这些问题作简要的回答.

一、代数学的起源与发展

代数学起源于人们熟悉的自然数的加法、乘法的计算艺术. 公元 3 世纪希腊人 Diophantus 的《算术》对代数思想和符号已有重要影响. “代数”一词来源于阿拉伯数学家、天文学家 Mohammed ibn Mūsā al-Khwarizmi 的著作《Al-jabr w' al muqābala》(约公元 825 年), 其原义是还原、化简的科学. 代数的进步依赖于较好符号体系的建立. 15 世纪结束时, 开始使用现代符号“+”和“-”; 16 世纪末, 法国数学家 F. Viète 首先用拉丁字母表示常数和变数, 大多数代数符号到 17 世纪中叶已经知道. 这标志着代数学的“史前时期”的结束, 代数学的真正发展是在以后的三个多世纪. 期间, 随着历史进程, 代数学的主要研究对象和内容经历了三次根本的变革.

初等代数 与算术(对数字进行计算)不同, 在 17~18 世纪中, 代数学相当于现在人们观念上的初等代数, 被理解为在代数符号上进行计算的科学, 即字母计算、字母变换、解方程的学科. 反映这一时期的代表作是 1770 年出版的 18 世纪最著名数学家 L. Euler 的《代数学引论》.

方程分析 多项式的根曾是数学研究的一个热点. 18 世纪和 19 世纪的代数学处理的主要对象是多项式, 即代数方程. 多项式研究的一个突出问题是代数基本定理的证明, 1799 年, Gauss 在他的博士论文中在不依赖于“理想”根存在的假设下证明了这个定理(严格的证明到 1920 年才完成; The Amer. Math. Monthly(2003, 110(7): 620~623)还给出一个完全线性代数框架下的证明). 由于实际应用和科学研究的需要, 高次多项式根的计算与分布是当时许多数学家关注的问题之一, C. F. Gauss, J. L. Lagrange, P. Ruffini, C. Sturm 等对其都作出过贡献. 历史上多项式根的最引人注目的问题是一元高次代数方程的根式求解问题. 16 世纪, 意大利数学家发现了解三次代数方程的 Cardano 公式和解四次代数方程的 Ferrari 方法. 因此, 人们关心高于四次的代数方程可否用根式求解. 三个世纪的探索, 仍然找不到求根公式. 于是, 根式求解不存在的证明引起了关注, A. Girard, J. L. Lagrange, P. Ruffini, Gauss 对此都作过研究. 1824 年, 挪威青年数学家 N. H. Abel 证明了高于四次的方程一般不能用根式求解; 1830 年, 法国青年数学家 E. Galois 给出了一元代数方程可以用根式求解的一个一般的判别法, 圆满地解决了长达三百多年的数学难题. 因此, 18~19

世纪,代数学被理解为方程分析的学科. 1866 年出版的 J. Serret 的《高等代数教程》反映了这一认识.

抽象代数(近世代数) 从 19 世纪中叶以后,代数学从方程式论转向代数运算的研究. 首先,Galois 在解决代数方程用根式求解问题时开创了群的研究. 此后,A. Cayley, C. Jordan, M. S. Lie, F. Frobenius, F. Klein, H. Poincare 等对群的研究都作出了贡献;1882 年,Klein 的学生 W. von Dyck 引进了抽象群的概念. 其次,德国数学家 E. E. Kummer, P. G. L. Dirichlet, L. Kronecker, R. Dedekind, D. Hilbert 在代数数论的研究中引进了域、环、理想等概念. 在 19 世纪,线性代数和代数的研究十分活跃,1843 年爱尔兰数学家、天文学家 W. R. Hamilton 发现了四元数,1844 年德国数学家 H. G. Grassmann 发表了《线性扩张论》,1847 年 A. Cayley 给出了八元数非结合代数,从而推进了线性代数、结合代数、非结合代数的进一步研究. 此间,英国数学家 G. Boole 在研究思维规律中建立了 Boole 代数;1855 年 A. Cayley 引进了矩阵的简化记号,较系统地研究了矩阵代数,J. Sylvester, A. L. Cauchy, C. Jordan 和 F. Frobenius 等对矩阵的研究都颇有成果.

以上研究为代数学在 19 世纪末向现代发展阶段转移开辟了道路. 20 世纪初,在 D. Hilbert, E. Noether 和 E. Artin 影响下,抽象代数应运而生,1930~1931 年荷兰数学家 B. L. van der Waerden 的两卷本《近世代数》出版,代数学成为研究代数运算规律和各种代数结构的学科,即抽象代数学科.

20 世纪 30 年代以来,代数学继续向纵深发展,不仅产生了同调代数、范畴论、代数 K-理论等新分支,而且代数学的一些成果和方法直接应用到自然科学、工程技术和科学技术的诸多领域,并产生了代数编码学、语言代数学、代数自动机理论、计算机代数等应用代数分支. 代数学在整个数学中的地位显得越来越重要,代数方法已成为现代数学的基本方法,因而与拓扑学一起成了 20 世纪抽象数学的两大领域,如 1994 年,著名的 Fermat 大定理的解决就深受代数学的影响.

二、高等代数的研究对象

张禾瑞等(2007)指出:“作为大学数学基础课的代数,是中学代数的继续和提高.”具体地说,中学数学介绍过二元、三元一次方程组;高等代数则要学习一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

对此,中学数学着重于具体求解;而在高等代数中,首先要回答的是方程组(1)是否有解,即回答解的存在性问题. 方程组(1)的解可能不止一个,因而要回答方程组(1)的解有多少;是唯一,还是有无穷多个;最后才给出解的表示. 又如在中学数学中,大家

已经学过不少一元二次方程、二次多项式以及因式分解的知识;在高等代数中,将学习一般的一元多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a. \quad (2)$$

什么称为因式分解? 中学数学未能给予回答,在高等代数中,将建立一元多项式因式分解的整体理论.

根据新的《普通高中数学课程标准》,高中数学已经在必修课程中介绍了平面上的向量,在选修系列 2 中介绍了空间中的向量与立体几何. 在高等代数中,将此一般化,介绍一般向量空间的概念,揭示向量空间的结构及其度量,这些将构成高等代数的主体. 高中数学选修系列 4 中还介绍过矩阵与变换,将其推广,矩阵将成为研究向量空间之间的线性映射、线性算子的极其有用的工具,而且矩阵本身有清晰的代数结构,也是高等代数的基本内容.

综上,向量空间、矩阵、多项式成了高等代数研究的三大对象.

三、高等代数的思想与方法

怎样处理高等代数中的三大研究对象? 20 世纪二三十年代形成的抽象代数的思想就是处理高等代数的思想,具体地,就是一般性的思想,前苏联著名代数学家 A. Г. 库洛什的著作《一般代数学讲义》的书名就有这个意思. 例如,线性方程组(1),其系数 a_{ij} , 常数项 b_i 在高等代数中都属于一般数域 $\mathbb{F}$; 多项式(2)的 a_i 也在 $\mathbb{F}$ 中. 因此,高等代数中所建立的线性方程组理论、多项式的代数结构都对一般数域论述,对矩阵的代数结构也不例外;同时随着学习的深入,当阐述群、环、域概念之后,回过头来又可以用 20 世纪建立起来的一般代数概念刻画矩阵代数、多项式代数,并进而阐述域上向量空间及其线性算子的理论,阐述向量空间的度量基础. 这种一般性的思想使得高等代数的教学贯串一条主线:三大研究对象的代数运算规律及其代数结构.

一般性思想是与高等代数的方法联系在一起的. 其方法主要有两种.

形式表示方法 如线性方程组(1)就是采用形式表示的,称为线性方程组的一般形式,记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix},$$

则方程组(1)就分别有如下的向量表示、矩阵表示:

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = \beta, \quad (1')$$

$$AX = \beta, \quad \text{其中 } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (1'')$$

这样多种形式表示联系在一起,方便阐述线性方程组解的理论,圆满回答前面说过的线性方程组解的三个基本问题.又如一元多项式(2)也采用了形式表示,其中 x 是未定元.通过这样一般的形式表示,引进运算、初等变换,建立起矩阵代数、多项式代数的整体理论.

公理化方法 高等代数的主体——向量空间及其线性算子:其向量空间就是采用纯公理定义的.这样定义有别于《几何基础》的做法,它是作为代数系统之一来处理的,也就是采用如抽象代数中群、环的处理.这样处理来之不易,如前面对历史的简述,群、环、域等代数系统在19世纪已有许多成果,但还没有形成抽象代数这棵大树.在19世纪、20世纪之交,特别是在20世纪20年代,在E. Noether等的统一性思想及哥廷根、汉堡的系列讲学活动基础上,代数公理化方法才成熟,其大树也随之成长.因此,逐步深入地认识公理化方法非常重要,这方面尤其要加强联系思维,如线性算子与矩阵的联系蕴涵着丰富的表示论思想与方法.

四、高等代数的学习价值

打好基础 增进素质 高等代数的基础理论和方法,不仅是学习代数后继课程的基础,而且也是学习基础数学、计算数学、应用数学、随机数学等分支学科相关课程的基础,这些课程包括微分方程、计算数学、数学模型、泛函分析、微分几何、微分流形、一般拓扑学、概率统计、线性规划等.因此,理解高等代数的思想,掌握其基础理论和方法,在学习中加强辩证思维、抽象思维和逻辑推理的训练,学生不仅能够打好基础,而且还能增进自身的数学素质,使自己在将来成为一个名副其实的数学工作者.

联系中数 服务未来 高等代数与中学数学的联系使得它的一些内容对中学数学教学有居高临下的指导作用,中学数学中的某些原型对于克服代数概念抽象、证题难以入手等难点有时也颇有价值,在学习中要注意加强这方面的联系,这对于将来从事中小学数学教学工作的学生来说是十分有益的.

起飞平台 开拓发展 美国国家研究委员会的调研报告《人人关心数学教育的未来》中有这么一句话:“大学数学为许多领域的专业提供坚实的起飞平台.”在21世纪,大学数学不再是纯粹为培养未来数学家而设立的专业,更主要的是为培养各级各类数学教师和高层次人才打基础的.掌握大学数学的人,将在计算机、自动控制、系统规划、现代经济管理等诸多领域发挥积极作用,随着知识产业化的进程,高等代数的知识,数学的理论和方法将越来越显示出强大的经济效用和社会效益.

美化心灵 和谐文明 数学是美的,作为数学各专业基础课的高等代数也是美的,在教学中学生将感受到简洁、清晰、对称、奇异的代数“画面”,享受学习过程中的快乐.为此,重视标准形等的运用和学习引导,可以加强数学美的效果.数学的美是心灵深处的美,它对于培养人们美的情操、开发个人智能、构建现代和谐文明都将发挥积极的作用.

总之,学习高等代数有着深刻的基础、应用、素质的意义和价值.