

中学教师继续教育丛书

初中数学 应用题的类型与解法

王岳庭 等编著



杭州大学出版社

初中数学应用题的 类型与解法

王岳庭等编著

杭州大学出版社

初中数学应用题的类型与解法

王岳庭 等编著

*

杭州大学出版社出版发行

(杭州天目山路 34 号)

*

杭州大学出版社电脑排版部排版

浙江省新华书店发行 杭州大学印刷厂印刷

787×1092 毫米 1/32 7.25 印张 162 千字

1992年9月第1版 1996年1月第3次印刷

印数:20001—28000

ISBN 7-81035-365-9/O · 024

· 定 价:7.10 元

出版说明

为了配合中学教师继续教育的需要,在上海教育学院院长张家祥教授倡导下,北京、天津、上海、浙江、四川、辽宁、广东、陕西、湖北、江苏、武汉、杭州等十二省市教育学院联合发起,决定编写出版《中学教师继续教育丛书》。国家教委师范教育司对这项工作给予了热情的支持和具体的指导,并委托我社承担丛书的出版任务。

中学教师的继续教育,是指中学教师按现行学历规定合格后的非学历的着重于提高政治、业务、教育教学能力的教育,因此《丛书》不能照搬照抄大学本科生段和研究生段的课程内容,也不能等同于现行中学课本的备课资料。

《丛书》应具有科学性、先进性、适用性、针对性,应致力于学科前沿知识与基础知识同中国教育实际的结合,教育科学与心理学同中学学科教育实际的结合。

《丛书》书目大体分为三类:一、思想政治教育和道德修养类;二、专业知识的拓宽和更新类;三、学科教育和学科心理类。其中以第三类为重点。

《中学教师继续教育丛书》设编委会,负责领导和组织《丛书》的编写工作:上海教育学院院长张家祥教授任主编,杭州大学校务委员会副主任金锵教授任副主编。编委单位有下列院校:

天津教育学院
四川教育学院
湖北教育学院
杭州教育学院
广东教育学院
武汉教育学院
北京教育学院
陕西教育学院
辽宁教育学院
浙江教育学院
江苏教育学院
杭州大学

《中学教师继续教育丛书》的编写和出版,是一项新的探索性的工作,需要从事中学教师继续教育的同行和中学教育界的广泛支持。我们热切地期待着大家的批评、指正,以便把这套《丛书》编得更好,为提高中学教育质量,发展中学教育事业,贡献我们的一份力量。

杭州大学出版社

总 序

由京、津、沪、浙等全国十二省市教育学院协作编写的《中学教师继续教育丛书》陆续出版了。在更新教育观念、深化教育改革的今天,这套丛书的问世是很有意义的。

国家振兴,教育为本;教育振兴,教师为本。能否建设一支思想品德素质和文化业务素质精良的师资队伍,关系到社会主义教育事业的成败。而要加强师资队伍的建设,就得采取必要的措施,使他们能结合工作的需要,不断地再学习、再进修、再提高。

随着大部分中学教师逐步达到现阶段国家规定的合格学历,教师培训工作的重点必将有步骤地转移到开展继续教育上来。这种继续教育是指对已达国家规定学历的教师进行以提高政治思想素质和教育教学能力为主要目标的培训。它包括职务培训、新教师见习期培训、骨干教师培训和对部分骨干教师提高学历层次的培训等方面。做好这项工作,对于建设一支能够坚持社会主义方向,品德高尚,素质优良,结构合理,适应我国教育事业发展需要的教师队伍,有着十分重要的作用。

开展继续教育,不能没有教材。但我们的国家地域辽阔,人口众多,各地师资队伍建设的客观条件和实际需求很不一样,这就需要从实际出发设置相应的课程,编写不同的教材。这次,一些起步较早、条件相仿的教育学院,根据已有的实践,

发挥群体的优势,协作编写这套丛书,它既可作有关院校当前开展继续教育选用,又能兼顾中学教师自学进修的需要,这是切合时宜的。

中学教师继续教育这项工作目前尚处于探索、研究、实践的阶段,因此,可以说这套丛书的编撰工作也同样处于探索阶段,只能随着我国继续教育事业的发展而逐步改进、完善。但编委会和编写者在调查研究和从事中学教师继续教育的基础上确定丛书的选题和内容,努力把思想政治教育放在首位,致力于学科前沿知识与基础知识同中学教育实际的结合,教育科学与心理科学同中学学科教育实际的结合,这是可取的。丛书以科学性、先进性、适用性、针对性作为努力方向,这就把教师培训与提高教育质量有机地联系起来,我相信它将会受到广大教师的欢迎。

编写《中学教师继续教育丛书》是一项开创性的工作。我们希望参编院校发挥团结协作的精神,不断实践,不断提高,共同把这套丛书编好,为中学教师继续教育事业作出贡献。

金长泽

金长泽同志系国家教委师范教育司司长

目 录

第一章 列方程解应用题.....	(1)
第一节 列方程解应用题的意义.....	(1)
第二节 列方程解应用题的一般方法.....	(5)
第二章 数字问题与年龄问题	(19)
第一节 数字问题	(19)
第二节 年龄问题	(29)
第三章 速度问题(行程问题)	(37)
第一节 一般速度问题	(38)
第二节 追及与相遇问题	(44)
第三节 航行问题	(56)
第四节 时钟问题	(63)
第四章 工程问题	(70)
第一节 工作量问题	(71)
第二节 工程问题	(78)
第三节 水量问题	(86)
第五章 物理、化学问题.....	(97)
第一节 物理问题	(97)
第二节 化学问题.....	(106)
第六章 几何问题.....	(112)
第一节 边长问题.....	(113)
第二节 圆的问题.....	(129)

第三节 等积变换问题.....	(144)
第七章 经济问题.....	(160)
第一节 增长率问题.....	(160)
第二节 成本利润问题.....	(168)
第三节 生活经济问题.....	(178)
练习题答案与提示.....	(193)
后 记.....	(219)

□第一章

列方程解应用题

第一节 列方程解应用题的意义

我们从一个传说故事讲起。

相传,王母娘娘生日的那天,各路神仙应邀前去参加蟠桃会。断桥底下的白蛇,因为吃了仙丸而有千年修功,她摇身一变成了俊俏的“白娘子”,混在众仙之中一起来到天上的凌霄宝殿。

宴会上热闹非凡,这时白娘子坐在角落里听见何仙姑对王母娘娘说:

“今天请了 100 多人参加蟠桃会,怎么男仙比我们女仙多呀?”

王母娘娘问:“你数过啦!男仙有多少?女仙有多少?”

何仙姑故弄玄虚地说:“如果男仙中的一部分变成女仙,其余的男仙中又有上面那一部分的一半不来参加蟠桃会的话,则实际参加蟠桃会的女仙数目刚好等于男仙数目的两倍。如果女仙的三分之一变成男仙,而男仙的一半变成女仙,则实际在这里的男仙数就会比假设的男仙数多 11 位!”

王母娘娘听罢,高兴地说:“诸位仙长,你们替我算出女仙

和男仙的数目来!”

白娘子心想,这是个多有趣的问题啊!于是便算起来.隔了一会儿,白娘子高兴地喊起来:“算出来了,女仙 48,男仙 54,合计神仙 102 位.”

那么白娘子是怎样算出来的呢?

设实际参加蟠桃会的女仙数为 x ;男仙数为 y ;又设男仙中的一部分男仙数为 $2z$ (因为这些男仙数的一半应该仍是整数).

根据假设,男仙中的一部分变成女仙,则男仙数变为:

$$y-2z.$$

其余男仙中又有一部分的一半,即 $\frac{2z}{2}=z$ 不参加,则男仙数变为

$$y-3z.$$

此时实际参加蟠桃会的女仙数目刚好等于男仙数目的两倍,即是方程

$$x=2(y-3z). \quad ①$$

又假设女仙的三分之一,即 $\frac{x}{3}$ 变男仙,而男仙的一半,即 $\frac{y}{2}$ 变女仙,那么剩下一半男仙即 $\frac{y}{2}$. 则实际在这里的男仙数就会比假设的男仙数多 11 位,于是得另一方程为

$$y-11=\frac{x}{3}+\frac{y}{2}. \quad ②$$

解方程组

$$\begin{cases} x=2(y-3z), & ① \\ y-11=\frac{x}{3}+\frac{y}{2}. & ② \end{cases}$$

改写①,②式,得

$$\begin{cases} x=2y-6z, & \text{③} \\ x=\frac{3y}{2}-33. & \text{④} \end{cases}$$

消去 x , 得

$$y=12z-66. \quad \text{⑤}$$

将⑤代入④得

$$x=18z-132. \quad \text{⑥}$$

因为男仙比女仙多, 即 $y > x$, 则由⑤、⑥知

$$12z-66 > 18z-132.$$

整理得

$$66 > 6z,$$

$$\text{即 } z < 11. \quad \text{⑦}$$

又因为众仙数多于 100, 所以

$$x+y > 100,$$

即

$$(12z-66) + (18z-132) > 100.$$

整理得

$$30z > 298,$$

即

$$z > 9.9. \quad \text{⑧}$$

由⑦、⑧知

$$9.9 < z < 11.$$

因为 z 是整数, 故得 $z=10$, 代入 x, y 的表达式, 得

$$x=48; \quad y=54.$$

所以参加蟠桃会的神仙数为 102 位, 其中女仙 48 位, 男

仙为 54 位.

尽管我们上面解决的是一个传说中的故事,然而何仙姑提出的问题却是一个很基本的数学问题,涉及到三元一次不定方程组确定整数解的知识,这些知识对于具有初中数学知识基础的读者来说,应该都可以成为“白娘子”而顺利解决.

像这样通过布列方程的方法来解决用文字语言表达的实际问题(这些问题可以来自物理学、化学、生物学等各种学科,也可以来自现实的社会生活等),我们一般称之为列方程解应用题.

从小学一直到中学,列方程解应用题,都是数学课程中教学的重点和难点.说它重要,首先是由于“数学为大众”的教学目标,掌握数学知识的一个重要目的就在于应用.一个适应现代社会需要的新型劳动者,必须具备起码的数学知识以便解决工作、生活中遇到的实际问题.另一个重要原因是,初中数学应用题涉及的数学知识都是初中阶段最重要的内容,如关于方程、不等式等.

列方程解应用题又是难点,因为它不同于对现成的代数式进行恒等变形,也不同于解普通的一个代数方程或不等式.列方程解应用题首先要求有较强的文字语言的理解能力,同时又要求能够把用文字语言表达的实际问题,抽象成用数学语言(字母、代数式、方程、不等式等)表达的数学问题.这就是说还要求有语言转换能力、抽象思维能力.这对于初中学生,从其年龄特征、心理特征、思维特征来说,都是具有一定困难的.当然理解能力、转换能力、抽象思维能力是相辅相成的.除此之外,列方程解应用题的水平高低,还涉及到学生对实际问题所表达的意义理解是否准确,数学直觉判断能力的强弱,数

学基础知识的牢固程度等多方面因素.

数学方法中的方程观点,是解应用题的主要方法.也就是把应用问题中所包含的已知量与未知量(或参变量)之间的数量关系,运用数学的抽象语言(符号语言)转化为方程或方程组,或其它形式的数学模型,使问题获得解决.事实上,方程(包括不等式)是已知量与未知量构成的矛盾统一体,是从已知探索未知的桥梁.因此,从本质上讲,解应用题就是从对问题中数量关系的分析入手,运用数学语言将数量关系转化成用数学符号表达的关系式,使问题获解.

第二节 列方程解应用题的一般方法

初中数学中的应用题类型虽然不少,但就整体而言,解应用题还是有一个比较有规范的可供操作的方法,其一般步骤为:

(1)理解题意(或称审题)

理解题意是解应用题的首要条件,这里包含两方面意思:一是从用文字(普通日常)语言表述的应用题中,正确理解所提供的各种信息,包括已知量、未知量、已知量与未知量之间的关系等.有时为了帮助理解,可借助按题意画出的草图,把各种量分别用字母标在草图上;二是理解该应用题所表述的实际意义,这一点也很重要,因为有时忽略了问题本身的实际意义,则会导致与实际不符的错误结果.

例1 甲乙两人分别从相距 24 公里的 A 、 B 两地出发,相向而行.如果甲先出发 1 小时,那么他们在乙出发 2 小时后相遇;如果是同时出发,那么两人在离 A 地 9.6 公里处相遇,求

甲乙两人各自的速度.

在审题、理解题意时,首先理解本题是一个行程方面的问题,涉及速度、时间、路程三个基本量.从所给的问题中应该明确需分两种情况进行考察:

第一种情况,若甲先出发 1 小时,则在乙出发 2 小时后相遇;

第二种情况,若甲乙同时出发,则两人在离 A 地 9.6 公里处相遇.在此之前,则应由题目中所述获得下面一连串信息:

a) 甲是从 A 地出发,乙是从 B 地出发;

b) A、B 相距 24 公里(全程);

c) 甲、乙是相向而行;

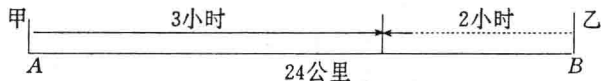
d) 由甲先出发 1 小时可知,两个相遇时,甲花的时间比乙多;

e) 由同时出发可知,甲、乙相遇所花时间相等;

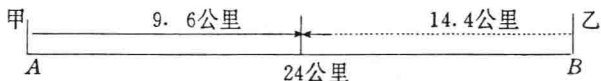
f) 由离 A 地 9.6 公里,可知离 B 地 14.4 公里.

为了充分利用数学直觉,还可借助图形语言使问题变得形象化,从而加深对题意的理解.

情况一示意图:



情况二示意图:



理解题意是在整个解题操作过程中反复进行的,透彻理

解题意可保证解题的顺利完成.

(2) 恰当设元

恰当设元,指的是在理解题意的基础上,确定问题中的未知量,并用字母(如 x)来表示它. 一般来说,确定其中一个未知量 x 后,其它未知量就可由用含 x 的代数式来表示. 有的应用题可能含有多个未知量,则也可设多个字母来表示这些未知量,但应该注意所设的未知数要尽可能避繁就简,使列出的代数式、方程等个数尽可能少且简单.

设未知量(设元)有直接设法和间接设法两种. 对比较简单的应用题,常用直接设元法,即问题中问什么就设什么;有几个未知数就设几个未知数. 对一些复杂的应用题,有时直接设元会造成列方程困难,则便可考虑间接设元,即根据题目中的条件,设定与其它未知数都有密切关系的未知数作为基本未知数,待问题解决后,再通过它间接地求出题目中所要求的结果. 如例 2.

例 2 大于 10 小于 100 的正整数中,当数字交换位置后所得的数比原数增加 9 的数共有几个? 这些数是几?

在设未知数时,我们不是直接把所求的这些数作为基本未知量进行设元,而是根据题意(即题目中的条件),理解到所求的这些数都是大于 10 小于 100 的二位正整数,因此,根据整数的多项表示法,设二位正整数的个位数字为 y ,十位数字为 x ,然后通过它们来表示二位数 $N=10x+y$. 这里的 x, y 即是两个间接的基本未知数,当 x, y 求出后,则本题所要求的结果便可用 x, y 的不同取值表示出来.

从例 2 的条件可列出方程:

$$10x+y+9=10y+x, (1 \leq x \leq 9, 1 \leq y \leq 9),$$

即

$$x+1=y.$$

则 x 可取 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; y 可取 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 于是间接所求的结果为:

$$12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.$$

例 3 一轮船从重庆驶到上海要 5 昼夜, 而从上海驶到重庆要 7 昼夜, 试问有一木排从重庆顺流漂到上海需要多少昼夜?

本题直接要求的是木排从重庆漂到上海的“时间”, 显然“时间”是本题的直接未知量. 但这个“时间”是受到“船速”、“水速”的影响, 因此可通过 s (重庆到上海的航程, 定值) 与船速、水速的关系来求出“时间”.

设轮船在静水中的速度为 v_1 , 水流速度为 v_2 , 则顺水时的船速 $v_{顺} = v_1 + v_2$, 逆水时的船速 $v_{逆} = v_1 - v_2$, 则根据题意可列出方程:

$$\begin{cases} s = 5(v_1 + v_2), \\ s = 7(v_1 - v_2). \end{cases} \quad (1)$$

消去 v_1 得

$$\frac{s - 5v_2}{5} = \frac{s + 7v_2}{7},$$

即

$$s = 35v_2.$$

于是得木排从重庆漂流到上海所需的昼夜数 t 为:

$$t = \frac{s}{v_2} = 35.$$

本题也可用设直接未知元的方法解, 这时可仿照解工程问题的方法, 将重庆到上海的航程(距离)当作 1, 设重庆到上