

高等院校教材同步辅导及考研复习用书



主 编 张天德 叶 宏

概率论与数理统计 辅导及习题精解

(浙大·第四版)

教材习题全解 指导同步学习
考研真题精讲 剖析考研重点

全国百佳图书出版单位



时代出版传媒股份有限公司
安徽人民出版社

概率论与数理统计 辅导及习题精解

(浙大·第四版)

主 编 张天德 叶 宏
副主编 李 勇 乔 凤

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导及习题精解：浙大第4版 / 张天德主编. —
合肥：安徽人民出版社，2013.6

ISBN 978-7-212-06605-5

I. ①概… II. ①张… III. ①概率论—高等学校—
教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 123649 号

概率论与数理统计辅导及习题精解(浙大第4版)

张天德 主编

出版人：胡正义

责任编辑：杜宇民 吴筠

封面设计：燎原视觉设计中心

出版发行：时代出版传媒股份有限公司 <http://www.press-mart.com>

安徽人民出版社 <http://www.ahpeople.com>

合肥市政务文化新区翡翠路 1118 号出版传媒广场八楼

邮 编：230071

营销部电话：0551-63533258 0551-63533292(传真)

印 刷：恒台县方正印务有限公司

(如发现印装质量问题，影响阅读，请与印刷厂商联系调换)

开本：880×1230 1/32

印张：15

字数：360 千

版次：2013 年 6 月第 1 版

2013 年 6 月第 1 次印刷

标准书号：ISBN 978-7-212-06605-5

定价：19.80 元

版权所有，侵权必究

前言

《概率论与数理统计》是专门研究随机现象及其数量规律的一个数学分支,在生物、医学、金融以及其他技术领域存在着广泛的应用。这门课程是高等院校理工科专业和部分文科专业一门重要的基础课程,也是历年硕士研究生入学考试的重点科目。

为了帮助广大高校在校生的和正在准备考研的学子学好、复习好这门课程,我们本着“选好教材、做好辅导”的宗旨,以浙江大学盛骤、谢式千、潘承毅编写的《概率论与数理统计》(第四版)为针对教材,编写了这本与之章节、内容完全同步的《概率论与数理统计辅导及习题精解》配套辅导用书,为您系统梳理知识结构、清晰提炼重点考点、深入讲解解题思路和技巧、权威提供课后习题答案,让您学深、吃透教材知识,打好基础。同时,又注意紧密联系考研、精研历年真题,设计同步自测、提供高效练习,让您在学好教材的同时积极准备考研。

全书章节内容设置与教材完全同步,共分十四章,每一章又分为若干节,按照教材顺序对每个章节内容进行清晰梳理、深入讲解,每一章内容讲完后,再对整章内容重点进行回顾和加深,然后设计该章同步自测题。全部十四章教材内容辅导完毕后,还给出了教材上所有习题的详细解答。

讲解结构三大部分

一、教材内容讲解 这部分由两块组成:教材知识全解、典型例题解析。

1. 教材知识全解 包括两部分:本节知识结构图解、重点及常考点突破

(1) 本节知识结构图解 这一部分用直观、形象的图表形式,将该节知识结构、相互联系、逻辑关系清晰地展示给读者。便于读者对比各个概念、性质和定理,在比较中加深理解,使知识更加系统化。

(2) 重点及常考点突破 这一部分将该节重要的知识点、考点清晰、准确地提炼出来,并用简洁的语言对学习这些重点、考点时需要注意的问题一一指明,让读者抓住重点、有针对性地进行复习。

2. 典型例题解析 这一部分是每一节讲解中的核心内容,也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题研究的经验,将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点,归纳为一个一个的在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出大量的精选例题深入讲解,使您对每一个知识点扎实掌握,并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破,从而获得实际应用应试能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”,更是巧妙点拨,让您举一反三、触类旁通。

前言

二、本章知识整合 这部分由三部分组成:本章知识图解、本章知识总结、本章同步自测。

1. 本章知识图解 用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系,以便于读者从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

2. 本章知识总结 对本章所学的知识进行系统的回顾,帮助读者更好的复习与总结。

3. 本章同步自测 精选部分有代表性、测试价值高的题目(部分题目选自历年全国研究生入学考试试题),以此检测、巩固读者的学习效果,提高应试水平。

三、教材习题详解 该部分放在全书的书末,并对教材中的全部习题作了详细解答,有的习题还给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维能力。

内容编写三大特色

一、知识梳理清晰、简洁 直观、形象的条目总结,精练、准确的考点提炼,权威、独到的方法归纳,将教材内容抽丝剥茧、层层展开,呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构,便于读者快速复习、高效掌握,形成稳固、扎实的知识网,为提高解题能力和思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续 所有重点、难点、考点,统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出丰富的精选例题、考研真题,举一反三、深入讲解,真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、一举完成。

三、联系考研密切、实用 本书既是一本教材同步辅导书,也是一本考研复习用书,书中处处联系考研:例题中有考研试题,同步自测中也有考研试题,更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等,为的就是让同学们同步完成考研备考,达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限,书中疏漏与不妥之处,在所难免,敬请广大读者提出宝贵意见,以便再版时更正、改进。

编者

读者反馈表

姓名 _____ 院 系 _____
地 址 _____ 邮 编 _____
E-mail _____ 电 话 _____
老师姓名 _____ 邮 箱 _____

概率论与数理统计辅导及习题精解(浙大第四版)

1. 您是从何处购买到本书的?
校内及周边书店 民营书店
大型零售书店 新华书店
网上书城
其他 _____
2. 您购买此书的原因(可多选):
品牌信任 封面设计
正文内容 答案详尽
印刷质量 图书价格
网上书评
其他(请指明) _____
3. 您购买此书的目的是:
辅导课程学习 考研
应付作业考试
其他(请指明) _____
4. 您身边同学会购买同步辅导书的比例大约为:
20%以下 20%至50%
5. 请根据您对本书的满意程度选择相应等级标准,填在括号内:
满意程度:A. 很满意 B. 比较满意
C. 一般 D. 不满意 E. 很不满意
封面设计[] 图书内文[]
图书版式[] 印刷质量[]
图书价格[] 图书纸张[]
图书总体评价[]
结合上述答案,请提出您对本书的改进建议

6. 您认为本书的哪些板块还需改进?(可多选)
知识结构 同步自测题
考点分析 本章内容小结
例题讲解 习题解答

您的改进建议_____

7. 您认为本书的优点和缺点是什么？

优点是_____

缺点是_____

8. 您还有哪些课程在市场上买不到相关辅导书,或者市面上现有的辅导书不能满足您的要求?您希望这些辅导书包括哪些内容?

9. 其他建议或意见

请将本反馈表寄至:

山东省济南市高新开发区舜华路 2000 号舜泰广场 8 号楼 15 层

山东星火国际传媒集团 读者服务部(收)

邮编:250101 电话:400-623-1860

您也可以通过电子邮件的方式和我们的编辑直接交流,我们的邮箱地址是:

qxtp2008@sina.com

教材知识全解

第一章 概率论的基本概念	(1)
第一节 随机试验(略)	(1)
第二节 样本空间、随机事件	(1)
第三节 频率与概率	(3)
第四节 等可能概型(古典概型)	(7)
第五节 条件概率	(13)
第六节 独立性	(18)
本章整合	(23)
本章知识图解	(23)
本章知识总结	(23)
本章同步自测	(25)
第二章 随机变量及其分布	(30)
第一节 随机变量(略)	(30)
第二节 离散型随机变量及其分布律	(30)
第三节 随机变量的分布函数	(36)
第四节 连续型随机变量及其概率密度	(39)
第五节 随机变量的函数的分布	(48)
本章整合	(54)
本章知识图解	(54)
本章知识总结	(55)
本章同步自测	(55)
第三章 多维随机变量及其分布	(63)
第一节 二维随机变量	(63)
第二节 边缘分布	(67)
第三节 条件分布	(72)
第四节 相互独立的随机变量	(75)
第五节 两个随机变量的函数的分布	(82)
本章整合	(90)
本章知识图解	(90)
本章知识总结	(91)
本章同步自测	(91)

目 录

教材知识全解+教材习题详解

第四章 随机变量的数字特征	(100)
第一节 数学期望	(100)
第二节 方差	(109)
第三节 协方差及相关系数	(120)
第四节 矩、协方差矩阵	(129)
本章整合	(130)
本章知识图解	(130)
本章知识总结	(131)
本章同步自测	(131)
第五章 大数定律及中心极限定理	(138)
第一节 大数定律	(138)
第二节 中心极限定理	(140)
本章整合	(144)
本章知识图解	(144)
本章知识总结	(144)
本章同步自测	(145)
第六章 样本及抽样分布	(150)
第一节 随机样本	(150)
第二节 直方图和箱线图(略)	(151)
第三节 抽样分布	(151)
本章整合	(161)
本章知识图解	(161)
本章知识总结	(162)
本章同步自测	(162)
第七章 参数估计	(168)
第一节 点估计	(168)
第二节 基于截尾样本的最大似然估计	(175)
第三节 估计量的评选标准	(176)
第四节 区间估计	(183)
第五节 正态总体均值与方差的区间估计	(183)
第六节 $(0-1)$ 分布参数的区间估计	(189)
第七节 单侧置信区间	(189)
本章整合	(191)
本章知识图解	(191)

本章知识总结	(191)
本章同步自测	(192)
第八章 假设检验	(199)
第一节 假设检验	(199)
第二节 正态总体均值的假设检验	(201)
第三节 正态总体方差的假设检验	(203)
* 第四节 置信区间与假设检验之间的关系(略)	(206)
* 第五节 样本容量的选取(略)	(206)
* 第六节 分布拟合检验	(207)
* 第七节 秩和检验	(209)
第八节 假设检验问题的 p 值法	(210)
本章整合	(212)
本章知识图解	(212)
本章知识总结	(212)
本章同步自测	(214)
第九章 方差分析及回归分析	(218)
第一节 单因素试验的方差分析	(218)
第二节 双因素试验的方差分析	(221)
第三节 一元线性回归	(227)
第四节 多元线性回归	(231)
本章整合	(234)
本章知识图解	(234)
本章知识总结	(234)
本章同步自测	(235)
第十章 bootstrap 方法	(238)
本章整合	(238)
本章知识图解	(238)
本章知识总结	(238)
第十一章 在数理统计中应用 Excel 软件	(240)
本章整合	(240)
本章知识图解	(240)
本章知识总结	(240)

目 录

教材知识全解+教材习题详解

第十二章 随机过程及其统计描述	(242)
本章整合	(242)
本章知识图解	(242)
本章知识总结	(242)
第十三章 马尔可夫链	(243)
本章整合	(246)
本章知识图解	(246)
本章知识总结	(246)
本章同步自测	(247)
第十四章 平稳随机过程	(250)
本章整合	(250)
本章知识图解	(250)
本章知识总结	(250)

教材习题详解

第一章 概率论的基本概念	(252)
第二章 随机变量及其分布	(267)
第三章 多维随机变量及其分布	(286)
第四章 随机变量的数字特征	(310)
第五章 大数定律及中心极限定理	(332)
第六章 样本及抽样分布	(338)
第七章 参数估计	(344)
第八章 假设检验	(359)
第九章 方差分析及回归分析	(377)
第十二章 随机过程及其统计描述	(398)
第十三章 马尔可夫链	(403)
第十四章 平稳随机过程	(411)
选做习题	(423)
概率论部分	(423)
数理统计部分	(449)
随机过程部分	(469)

第一章 概率论的基本概念

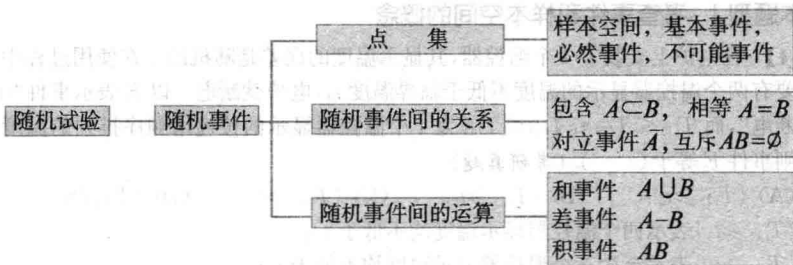
本章介绍了随机试验、随机事件的概念,事件间的关系及其运算,主要给出了古典概型、条件概率的定义,概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式,同时对独立性和伯努利概型进行了重点论述.该章内容是整个概率论的基础,对理解整个概率论起到极大的作用.

第一节 随机试验(略)

第二节 样本空间、随机事件

教材知识全解

本节知识结构图解



重点及常考点突破

1. 随机事件的相关概念

(1) 随机试验:在概率论中将具备下列三个特点的试验称为随机试验,简称试验:

- ① 在相同条件下可重复进行;
- ② 每次试验的结果具有多种可能性;
- ③ 在每次试验之前不能准确预言该次试验将出现何种结果,但是所有结果明确可知.

(2) 样本空间:随机试验的所有可能结果构成的集合,常用 Ω 或 S 表示.

(3) 随机事件:大量随机试验中具有某种规律性的事件.

(4) 基本事件:不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件.

(5) 必然事件:每次试验中一定发生的事件.

(6) 不可能事件:每次试验中一定不发生的事件,常用 \emptyset 表示.

2. 互斥事件与对立事件的区别与联系

(1) 互斥事件: 在试验中, 若事件 A 与 B 不能同时发生, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A, B 为互斥事件. 显然, 基本事件间是互斥的.

(2) 对立事件: 每次试验中, “事件 A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件. A 的对立事件常记为 \bar{A} .

容易看出: 对立事件一定是互斥事件, 但互斥事件不一定是对立事件.

3. 事件间的运算律:

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$.

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3) 分配律 $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$, $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$.

(4) 摩根律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(5) 对减法运算满足 $A - B = A\bar{B}$.

上述五条运算规律非常重要, 特别是(4), (5)两条, 希望读者熟练掌握. 对于较复杂的事件运算, 可采用文氏图帮助分析和理解.

典型例题解析

基本题型 I : 考查事件和样本空间的概念

【例 1】 在电炉上安装了 4 个温控器, 其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中, 只要有二个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0 , 电炉就断电. 以 E 表示事件“电炉断电”, 而 $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq T_{(3)} \leq T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值, 则事件 E 等于(). (考研真题)

(A) $\{T_{(1)} \geq t_0\}$ (B) $\{T_{(2)} \geq t_0\}$ (C) $\{T_{(3)} \geq t_0\}$ (D) $\{T_{(4)} \geq t_0\}$

解: $\{T_{(1)} \geq t_0\}$ 表示四个温控器显示温度均不低于 t_0 ;

$\{T_{(2)} \geq t_0\}$ 表示至少三个温控器显示温度均不低于 t_0 ;

$\{T_{(3)} \geq t_0\}$ 表示至少二个温控器显示温度均不低于 t_0 ;

$\{T_{(4)} \geq t_0\}$ 表示至少一个温控器显示温度不低于 t_0 .

故应选(C).

基本题型 II : 考查事件间的关系和运算

【例 2】 抛掷一颗骰子, 观察其出现的点数. 设事件 A = “掷出偶数点”, B = “掷出奇数点”, C = “掷出 1 点”, D = “掷出 2 点”, 讨论这些事件的相容关系和对立关系.

解: 两随机事件对立当且仅当它们有且仅有一个发生, 所以 A 与 B 对立. 两随机事件不相容(互斥)等价于它们不能同时发生, 故 A 与 B, A 与 C, B 与 D, C 与 D 均互不相容.

方法点击: 从事件互斥与事件对立的定义出发来检验两事件的关系. 从本题结论中可看出对立事件是互斥事件, 而互斥事件不一定是对立事件.

【例3】 设 A, B, C 表示三个随机事件, 试用其表示下列各事件:

- (1) A 出现, B, C 都不出现; (2) 三个事件中至少有一个出现;
 (3) 不多于一个事件出现; (4) A, B, C 中恰好有两个出现.

解: (1) \overline{ABC} 或 $A - B \cup C$ (2) $A + B + C$ 或 \overline{ABC}

(3) $\overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$ 或 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$

(4) $AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C$

方法点击: 对于事件的表示, 可直接求也可间接来求: 即先求对立事件, 再求原事件.

【例4】 对于任意两事件 A 和 B , 与 $A \cup B = B$ 不等价的是 _____ . (考研真题)

- (A) $A \subset B$ (B) $\overline{B} \subset \overline{A}$ (C) $A\overline{B} = \emptyset$ (D) $\overline{AB} = \emptyset$

解: 由 $A \cup B = B$ 知 $A \subset B$, 故 \overline{AB} 非空, 故选(D).

方法点击: 本题还可以通过举例或画图的方式来辅助分析.

【例5】 事件 A, B 为任意两个事件, 则() 不成立.

(A) $(A+B) - B \subset A$ (B) $(A-B) + B = A$

(C) $(A+B) - B = A - B$ (D) $(A-B) + B = A + B$

解: 由事件的运算律得 $(A+B) - B = (A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset = A \cap \overline{B}$, 所以选项(A)、(C)均成立. 同样地 $(A-B) + B = (A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$, 所以选项(D)成立, (B)不成立. 故应选(B).

第三节 频率与概率

教材知识全解

本节知识结构图解



重点及常考点突破

1. 概率的统计定义

在相同的条件下, 重复进行 n 次试验, 事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动. 且一般说来, n 越大, 摆动幅度越小, 则称常数 p 为事件 A 的概率, 记作 $P(A)$.

概率的统计定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的, 但这个定义不能用来计算 $P(A)$. 事实上, 人们往往采用一次大量试验的频率或一系列频率的均值作为 $P(A)$ 的近似值.

2. 概率的公理化定义

设 Ω 是一样本空间, 称满足下列三条公理的集合函数 $P(\cdot)$ 为定义在 Ω 上的概率:

- (1) 非负性 对任意事件 $A, P(A) \geq 0$;

(2) 规范性 $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性 若两两互不相容的事件列 $\{A_n\}$ 是可列的, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

3. 概率的性质

(1) $P(\emptyset)=0$;

(2) 有限可加性 若 n 个事件 A_1, \dots, A_n 两两互不相容, 则

$$P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n);$$

(3) 相互对立两事件概率之和为 1, 即

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1;$$

大家应该注意上式的一个变形 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, 这是一个非常重要的表达式, 在今后的解题中经常被用到.

(4) 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A);$$

(5) 若 A, B 是任意两个事件, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

此式又被称为广义加法法则.

上式还能推广到多个事件的情况. 例如, 设 A_1, A_2, A_3 为任意三个事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).$$

一般, 对于任意 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 可以用归纳法证得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

典型例题解析

基本题型: 与概率基本性质、加法公式有关的问题

【例 1】 设当事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则 ().

(A) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$

(B) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$

(C) $P(C) = P(AB)$

(D) $P(C) = P(A \cup B)$

解: 由题意“当 A, B 发生时, C 必然发生”, 从而 $AB \subset C$, 所以 $P(AB) \leq P(C)$, 那么

$$P(C) \geq P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B)$$

$$\geq P(A) + P(B) - 1,$$

$$P(A \cup B) \leq 1$$

故应选(B).

方法点击: 此题考查概率的“单调性”, 即若 $A \subset B$ 是两个随机事件, 则

$$0 \leq P(A) \leq P(B) \leq 1,$$

事实上, 因为 $A \subset B$, 所以 $B-A$ 与 A 互不相容, 并且满足 $B = (B-A) + A$, 由概率的非负性和加法公式得

$$P(B) = P(B-A) + P(A).$$

从而 $0 \leq P(A) \leq P(B)$.

【例2】 设 A, B, C 是随机事件, A, C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C}) =$ _____ . (考研真题).

解: 由条件概率的定义, $P(AB|\bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}$, 其中 $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

$$P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC) = \frac{1}{2} - P(ABC),$$

由于 A, C 互不相容, 即 $AC = \emptyset, P(AC) = 0$, 又 $ABC \subset AC$, 得 $P(ABC) = 0$, 代入得 $P(AB\bar{C}) = \frac{1}{2}, P(AB|\bar{C}) = \frac{3}{4}$. 故应填 $\frac{3}{4}$.

【例3】 设随机事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 $0.4, 0.3, 0.6$. 若 \bar{B} 表示 B 的对立事件, 那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B}) =$ _____ .

解: 因为 $A\bar{B} = A(\Omega - B) = A - AB$, 所以

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}) &= P(A - AB) = P(A) - P(AB) \\ &= P(A \cup B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.3. \end{aligned}$$

方法点击: 充分运用加法公式的各种变形. 特别注意以下方法在解决此类问题中的应用.

设 A, B 是任意两个随机事件, $A - B = A - AB = A(\Omega - B) = A\bar{B}$. 事实上, 这是一个很容易理解的变形, 不妨按下列方式理解: $A - B$ 表示事件“ A 发生 B 不发生”, $A - AB$ 表示事件“在 A 发生的事件中除掉 AB 一起发生的事件”, $A\bar{B}$ 表示事件“ A 发生 B 不发生”, 很明显这三个事件是一样的.

【例4】 已知事件 A, B 仅发生一个的概率为 0.4 , 且 $P(A) + P(B) = 0.6$, 则 A, B 至少有一个不发生的概率为 _____ .

【思路探索】 由摩根律, 要求 $P(\bar{A} + \bar{B})$, 只需求 $P(\bar{A}\bar{B})$.

解: 由题意知, $P(A\bar{B} + \bar{A}B) = 0.4$, 且 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 是互斥的, 所以

$$\begin{aligned} P(A\bar{B} + \bar{A}B) &= P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A - AB) + P(B - AB) \\ &= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(AB) = 0.4, \end{aligned}$$

则 $P(AB) = 0.1$, 那么

$$P(\bar{A} + \bar{B}) = P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.1 = 0.9.$$

【例5】 设事件 A 与事件 B 互不相容, 则(). (考研真题)

- (A) $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$ (B) $P(AB) = P(A)P(B)$
(C) $P(A) = 1 - P(B)$ (D) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$

解: 因为 A, B 互不相容, 所以 $P(AB) = 0$.

则 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB) = 1$.

故应选(D).

【例6】 设 A, B 是任意两个随机事件, 则

$$P(\overline{A+B})(A+B)(\overline{A+B})(A+B) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解: 注意到

$$\begin{aligned}(A+B)(\overline{A+B}) &= A(\overline{A+B}) + B(\overline{A+B}) = \overline{A+B} + \overline{A+B}, \\ (\overline{A+B})(A+B) &= \overline{A+B}(A+B) + \overline{A+B}(A+B) = \overline{A+B} + \overline{A+B},\end{aligned}$$

那么

$$(\overline{A+B})(A+B)(\overline{A+B})(A+B) = (\overline{A+B} + \overline{A+B})(\overline{A+B} + \overline{A+B}) = \emptyset,$$

则

$$P(\overline{A+B})(A+B)(\overline{A+B})(A+B) = P(\emptyset) = 0.$$

方法点击: 在有关事件运算或者是化简的问题中, 要学会熟练应用事件的运算法则. 尤其是关系式 $A = AB + \overline{A}B, A\overline{A} = \emptyset$.

【例7】 某奶厂生产 A, B, C 三种奶, 经过调查, 一城市居民中订购 A 奶的占 45%, 订购 B 奶的占 35%, 订购 C 奶的占 30%, 同时订购 A, B 两种奶的占 10%, 同时订购 A, C 两种奶的占 8%, 同时订购 B, C 两种奶的占 5%, 同时订购 A, B, C 三种的占 3%. 试计算下列各事件的概率:

- (1) 仅订购 A 奶的;
- (2) 仅订购 A, B 奶的;
- (3) 仅订购一种奶的;
- (4) 恰好订购两种奶的;
- (5) 至少订购一种奶的;
- (6) 不订购任何奶的;
- (7) 最多订购一种奶的.

解: 由题意知 $P(A) = 0.45, P(B) = 0.35, P(C) = 0.30, P(AB) = 0.10,$

$$P(AC) = 0.08, P(BC) = 0.05, P(ABC) = 0.03.$$

- (1) $P(A\overline{B}\overline{C}) = P(A\overline{B} \cup \overline{C}) = P(A - A(B+C))$
 $= P(A) - P(A(B+C)) = P(A) - P(AB+AC)$
 $= P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$
 $= 0.45 - 0.10 - 0.08 + 0.03 = 0.30.$
- (2) $P(AB\overline{C}) = P(AB - ABC) = P(AB) - P(ABC)$
 $= 0.10 - 0.03 = 0.07.$
- (3) $P(A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C)$
 $= P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C)$
 $= 0.30 + P(B - B(A+C)) + P(C - C(A+B))$
 $= 0.30 + P(B) - P(AB) - P(BC) + P(ABC) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
 $= 0.30 + 0.35 - 0.10 - 0.05 + 0.03 + 0.30 - 0.08 - 0.05 + 0.03$
 $= 0.73.$
- (4) $P(A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C) = P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C)$
 $= P(AB) + P(AC) + P(BC) - 3P(ABC)$
 $= 0.10 + 0.08 + 0.05 - 3 \times 0.03 = 0.14.$
- (5) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
 $= 0.45 + 0.35 + 0.30 - 0.10 - 0.08 - 0.05 + 0.03$
 $= 0.90.$