



海文考研

强化提分

海文考研辅导教材公开出版

2014考研数学

适合数学(一)(二)(三)

线性代数 辅导讲义

万学海文考试研究中心 编

主编：铁 军 叶盛标 张震峰 何先枝 鄂丽丽

主审：赵达夫

直击考试重点+强化提分+免费超值视频课程

◆万学海文强化辅导讲义详解版◆

- ✓ 权威名师扛鼎力作，理论解题全面突破
- ✓ 知识讲解透彻易懂，深度剖析重点热点
- ✓ 重点题型逐一细解，全面揭示应试技巧
- ✓ 一题多解拓展思路，同步练习巩固提高



中国时代经济出版社

购正版图书免费赠送：1. 最高可达300元的报名特惠代金券
2. 价值300元的超值网络精品课程学习卡（详见书中彩页）



海文考研

强
海文考

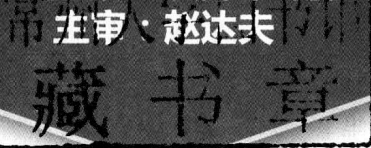
2014考研数学

适合数学(一)(二)(三)

线性代数 辅导讲义

万学海文考试研究中心 编

主编：铁军 叶盛标 张震峰 何先波 邬丽丽



直击考试重点+强化提分+免费超值视频课程

◆万学海文强化辅导讲义详解版◆



中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学线性代数辅导讲义 / 铁军等主编 ; 万学海
文考试研究中心编. —北京 : 中国时代经济出版社,
2013.6

ISBN 978-7-5119-1538-2

I. ①考… II. ①铁…②万… III. ①线性代数—研
究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 119843 号

书 名: 考研数学线性代数辅导讲义
作 者: 万学海文考试研究中心

出版发行: 中国时代经济出版社
社 址: 北京市丰台区玉林里 25 号楼
邮政编码: 100069
发行热线: (010)83910203
传 真: (010)83910203
网 址: www.cmepub.com.cn
电子邮箱: zgsdjj@hotmail.com
经 销: 各地新华书店
印 刷: 保定市中画美凯印刷有限公司
开 本: 787×1092 1/16
字 数: 280 千字
印 张: 13.25
版 次: 2013 年 6 月第 1 版
印 次: 2013 年 6 月第 1 次印刷
书 号: ISBN 978-7-5119-1538-2
定 价: 28.00 元

本书如有破损、缺页、装订错误,请与本社发行部联系更换
版权所有 侵权必究

万学海文图书编委会

总策划 万学海文考试研究中心

编委会 (以姓氏笔画为序)

丁 勇 叶盛标

邬丽丽 何先枝

张同斌 李 铮

苏德矿 张震峰

赵达夫 铁 军

本书编委会

马 媛 向定锋 朱 杰

吴志雄 张全军 张 燕

张 璐 李光华 李兰巧

李家雄 谷存昌 徐 婕

诸炜鑫 郭孝龙 绪玉珍

筵丽霞 赖邦城

内 容 简 介

本书是工学类、经济类和管理学类硕士研究生入学考试科目“线性代数”的复习指导书。本书作者多年来一直参加有关考研数学试卷的阅卷和考研辅导班的教学工作,具有丰富的教学经验,深知考生的疑难与困惑。作者把自己的教学经验结合考生与考试的实际情况加以细化、归纳和总结,整理成书奉献给广大读者,旨在提高考研者的数学水平与考试成绩。

本书紧扣数学考试大纲,贴近考试实际要求,内容丰富。全书共分为六章,内容包括:行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值和特征向量、二次型。本书结构新颖,每一章由五个栏目组成,分别为:知识结构拓扑图,重要概念、性质、定理和公式,重点题型精讲,精选练习题,练习题答案与解析。概念叙述简捷,解题思路清晰,对典型题目从多个侧面、不同角度、用多种解法进行讲解,注意对考生理解基本概念、求解多种类型基础题目和综合解题能力的培养,是考研者较好的复习指导书和良师益友。

本书可作为全国硕士研究生入学统一考试数学一、数学二、数学三的“线性代数”科目的复习指导书(对于仅针对数学一至三个别卷种适用的章节和题目,书中分别以上标“①”“②”“③”标注),对于在校的大学生、大专生及自学考试者,本书也是一本较好的学习参考用书。

编 者
2013 年 6 月

前 言

线性代数是硕士研究生入学统一考试数学试题的必考科目,其题型有客观题(包括填空题、选择题)和主观题(即解答题,包括计算题、证明题)两种。在考研数学试题中,线性代数的分数通常为34分,占数学试卷总分的22%。

线性代数具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性,大多数同学在考研复习过程中感到线性代数抽象难懂,对基本概念及定理、结论的理解感到困难,具体解题时,缺乏思路,难以下手。

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生在较短的时间内全面、系统地复习线性代数的内容,编者根据教育部制定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的有关要求,结合编者多年参加考研数学及有关考试的命题、阅卷和辅导所积累的经验,编写了《考研数学线性代数辅导讲义》。

《考研数学线性代数辅导讲义》一书是作者在多年来全国各地考研辅导班讲课的基础上整理而成的。本书自出版以来,深受全国广大考生的好评和厚爱,受到专家同行的肯定,认为本书在编写体例上有“特色”,在内容讲解、试题分析与解答上详尽、透彻、易懂,较适合考生的需要。

本书编写力求突出新颖、全面、精准、实用、高效的特点,以考研大纲为依据,以历年真题为依托,透视命题规律,力求准确阐释每一个考点,方法归纳详尽准确,突出重点,使读者在短期内掌握各类题型的解题方法和技巧,做到知识的融会贯通和解题的触类旁通。

本书每一章由以下五部分构成:

一、知识结构拓扑图。每一章都有一个详细的知识结构拓扑图,它可以帮助考生了解这一章的重要知识点,并掌握知识点间的逻辑关系及体系结构。

二、重要概念、性质、定理和公式。根据考试大纲的要求,将概念、性质、公式和定理进行简明扼要的叙述、归纳、总结和分析,同时指出考生在运用基本概念、性质、公式和定理等知识点时的注意事项,以加深考生对概念、性质、公式和定理等重要内容的理解,学会正确应用,透彻掌握每一章的基本概念、重要定理和重要公式及重点、难点内容,特别是考试中出现频率较高的核心内容。

三、重点题型精讲。通过对历年试题的归类分析,总结各章的常见典型题型,使考生能够在较短时间内清楚地了解重点、难点、热点问题,在考试时能够拿得出、用得上,这也是本书区别于其他考研辅导书的一大特点。本书的例题根据考研试题的典型性、综合性、启发性及新颖性加以选取和编排,注重做题效率,会做一道例题,就掌握了一种类型的题目,使考生获得实际应试能力的全面提升,真正将知识掌握和解题能力提升高效结合起来。

四、精选练习题。包括填空题、选择题、解答题。每题在内容上均采用全优化设计,涉及两个以上知识点,题型新颖、重点类型突出,几乎涵盖最新大纲的所有考查知识点。相信通过这些试题的训练,考生分析问题和解决问题的能力一定会迅速提高。建议考生有选择地做题,考查自己复习的效果。

五、练习题答案与解析。提供每一道题的详细、规范的解题过程,解题思路清晰,解题方法易于理解和掌握。

本书可作为参加全国硕士研究生入学考试数学一至数学三考生的复习指导书,对于在校的大学生、大专生及自学考试者,本书也是较好的学习参考书。

编写本书时参阅了有关书籍,引用了一些例子,在此特向有关作者致谢。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编者

2013年6月

万学海文图书邮购目录

序号	书 名	开本	定价	作者	出版时间	出版社
考研思想政治理论系列						
1	《考研早班车——整体规划及政治理论主干知识》	32开	23.8元	梁伟伟、赵宇、 金柳安、郭继承	已出版	中国时代经济出版社
2	《考研思想政治理论真题穿越》	16开	38.50元	赵宇、王瑞领、 金柳安、郭继承	已出版	中国时代经济出版社
3	《考研思想政治理论真题全解全析》	16开	35元	张子见、井宇虹、 郭继承、金柳安	已出版	中国时代经济出版社
4	《考研思想政治理论红宝书梯度题集》	16开	46元	张子见、井宇虹、 郭继承	已出版	中国时代经济出版社
5	《考研思想政治理论红宝书考点巧解》	16开	49元	赵宇、井宇虹、 郭继承	已出版	中国时代经济出版社
6	《考研思想政治理论形势与政策暨热点解读》	32开	拟 18元	万学海文名师	2013.10	中国时代经济出版社
7	《考研思想政治理论随身宝——速记周计划》	64开	拟 18元	张子见、井宇虹、 郭继承	2013.10	中国时代经济出版社
8	《考研思想政治理论冲刺大串讲》	32开	拟 28元	赵宇、井宇虹、 郭继承	2013.11	中国时代经济出版社
9	《考研思想政治理论点题预测》	32开	拟 18元	赵宇、井宇虹、 郭继承、金柳安	2013.11	中国时代经济出版社
10	《考研思想政治理论最后成功5套卷及18金鉴》	8开+ 16开	拟 28元	张子见、井宇虹、 郭继承、金柳安	2013.11	中国时代经济出版社
考研英语系列						
11	《考研英语写作高分进阶》(英语一、二)	16开	32元	付博	已出版	中国时代经济出版社
12	《考研英语新大纲核心词汇大全》(便携版)	64开	18.80元	李伟、吴本文	已出版	中国时代经济出版社
13	《考研英语分级词汇记忆宝典·周计划》 (核心级+拔高级+基础级)	16开	49.80元	李伟、吴本文	已出版	中国时代经济出版社
14	《考研英语基础综合手册——语法·阅读·写作· 词汇》	16开	45元	吴本文、毛利锋	已出版	中国时代经济出版社
15	《考研英语二复习指南+模拟真题》	16开	49元	周冰、蒋华	已出版	中国时代经济出版社
16	《考研英语历年真题超详解》	16开	49元	吴耀武	已出版	中国时代经济出版社
17	《考研英语历年真题来源报刊阅读120篇》	16开	拟 48元	钟平	2013.07	中国时代经济出版社
18	《考研英语必背范文30篇》(便携版)	64开	拟 18元	付博	2013.07	中国时代经济出版社
19	《考研英语阅读思路标准解读》	16开	拟 45元	吴耀武	2013.09	中国时代经济出版社
20	《考研英语易混常考词汇辨析手册》	16开	拟 35元	万学海文名师	2013.09	中国时代经济出版社
21	《考研英语最后成功五套题》(英语一)	8开	拟 22元	万学海文名师	2013.09	中国时代经济出版社
考研数学系列						
22	《考研数学概率论与数理统计基础教材》	16开	28元	张震峰	已出版	中国时代经济出版社
23	《考研数学基础必做880题》	16开	42元	张同斌、鄢丽丽、 丁勇	已出版	中国时代经济出版社
24	《考研数学高等数学基础教材》	16开	42元	李铮	已出版	中国时代经济出版社
25	《考研数学线性代数基础教材》	16开	30元	铁军	已出版	中国时代经济出版社
26	《考研数学真题大解析》(数学一)	16开	39.80元	何先枝	已出版	中国时代经济出版社

序号	书 名	开本	定价	作者	出版时间	出版社
27	《考研数学真题大解析》(数学二)	16开	39.80元	何先枝	已出版	中国时代经济出版社
28	《考研数学真题大解析》(数学三)	16开	39.80元	何先枝	已出版	中国时代经济出版社
29	《考研数学高等数学辅导讲义》	16开	40元	赵达夫等	已出版	中国时代经济出版社
30	《考研数学线性代数辅导讲义》	16开	28元	铁军等	已出版	中国时代经济出版社
31	《考研数学概率论与数理统计辅导讲义》	16开	18元	叶盛标等	已出版	中国时代经济出版社
32	《考研数学强化必做660题》	16开	拟42元	何先枝、铁军	2013.06	中国时代经济出版社
33	《考研数学强化复习全书》(数学一)	16开	拟50元	苏德矿、李铮、 铁军、张震峰	2013.09	中国时代经济出版社
34	《考研数学强化复习全书》(数学二)	16开	拟42元	苏德矿、李铮、 铁军	2013.09	中国时代经济出版社
35	《考研数学强化复习全书》(数学三)	16开	拟50元	苏德矿、李铮、 铁军、张震峰	2013.09	中国时代经济出版社
36	《考研数学考点归纳及最后成功150题》	16开	拟22元	叶盛标	2013.09	中国时代经济出版社

网址: www.wanxue.cn <http://shop.wanxue.cn>

电话: 010-82487358 传真: 010-82487450

地址: 北京市海淀区北四环西路66号中国技术交易大厦A座17层

邮编: 100080

郑重声明

本书版权属于北京万学教育科技有限公司所有, 违者必究!

读者意见调查表

亲爱的读者：

您好！非常感谢您对万学海文图书的信赖与支持。您的这份肯定将激励我们出版更多更好的精品图书。为充分了解您对考研数学图书的需求，以便今后为您提供更贴切、更优质、适用性更强的辅导书，万学海文图书部特推出读者意见有奖调查活动，请您抽出宝贵时间填写以下调查表。

万学海文图书拥有业内最多优异一线名师作者资源，汇集当前各个学科领域顶尖权威专家学者，紧密围绕教学考试要求，出版考研辅导各系列图书，编写体例与内容适用性最强，每一本都堪称权威精品。

为答谢您对我们的支持，我们将对反馈信息进行随机抽奖活动，每一位中奖者，我们都有精美礼品随之奉上！期待您的参与，再次感谢！

来信请寄：

1 0 0 0 8 0

北京市海淀区北四环西路 66 号中国技术交易大厦 A 座 17 层
万学海文图书部(收)

《考研数学线性代数辅导讲义》

① 姓名 _____ 年龄 _____ 职业 _____ 教育背景 _____
② 本科专业 _____ 拟报考专业 _____
③ 通讯地址 _____ 邮编 _____
④ 联系电话 _____ E-mail/ QQ _____

1. 您认为自己的数学基础：

好 一般 不好

2. 您是通过哪种渠道得知本书的？

辅导班推荐 在书店看到 朋友推荐 老师推荐
网上宣传 其他方式 _____

3. 您是如何得到本书的？

辅导班购买 书店购买 万学网店 网上书店 _____
报名赠送 其他方式 _____

4. 影响您购买此书的原因有(可多选):

- 万学海文品牌 图书作者 图书价格 编排结构
 内容质量 封面设计 广告宣传 网上书评
 其他 _____

5. 您认为本书的优点为(可多选):

- 体例完备 内容全面 紧扣大纲 难度适中
 题量适中 封面美观 版式清晰 印刷精美
 其他 _____

6. 您认为本书在哪些方面还有待改进(可多选):

- 结构安排 内容质量 难易程度 例题习题数量
 封面设计 版式设计 印刷质量 其他 _____

7. 请问您还需要哪些方面的考研数学辅导资料(可多选):

- 讲义类 题集类 方法类 手册类
 大纲解读类 重点题型类 真题类 模拟题类
 其他 _____

8. 请问您在购买考研数学辅导图书、资料时,主要考虑的因素有(可多选):

- 内容质量 图书定价 作者名气 出版社影响力
 图书设计 网络评价 他人推荐 其他 _____

9. 请问您会将本书推荐给:

- 5人以上 4~5人 2~3人 1人

10. 您所知道同类考研数学图书有:

11. 您对万学海文图书的其他意见和建议(可另附页)

更多考研资讯,请关注:

万学教育网址:<http://www.wanxue.cn>

图书频道:<http://kaoyan.wanxue.cn/book>

编辑部博客:<http://blog.sina.com.cn/uegbook>

编辑部微博:[@海文考研图书](http://weibo.com/uegbook)

[@海文考研图书](http://t.qq.com/uegbook)

图书增值 YY 频道:46769000

发行部 QQ:19777181

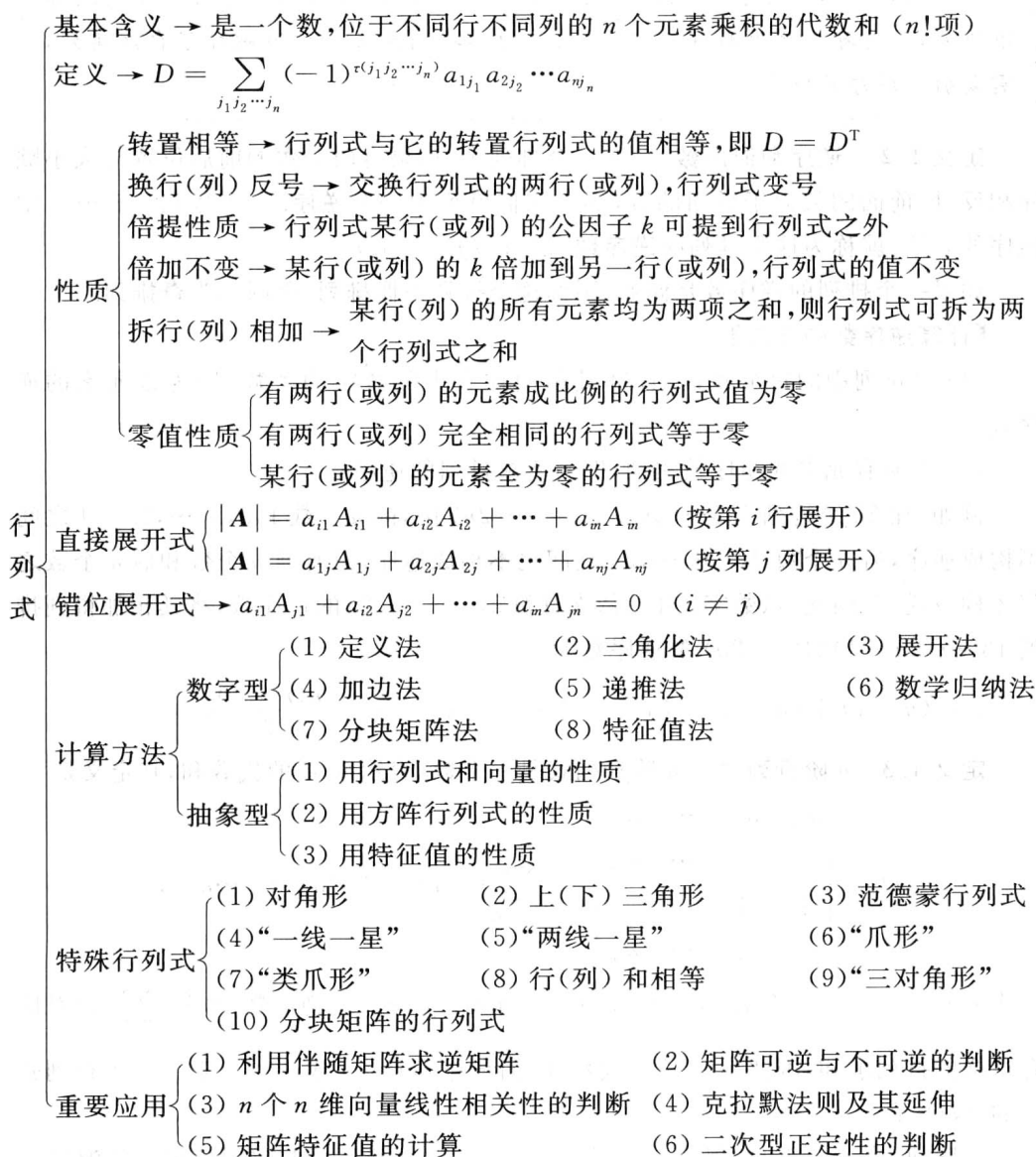
目 录

第一章 行列式	(1)
1.1 知识结构拓扑图	(1)
1.2 重要概念、性质、定理和公式	(2)
1.3 重点题型精讲	(10)
1.4 精选练习题	(21)
1.5 练习题答案与解析	(22)
第二章 矩阵	(28)
2.1 知识结构拓扑图	(28)
2.2 重要概念、性质、定理和公式	(28)
2.3 重点题型精讲	(45)
2.4 精选练习题	(58)
2.5 练习题答案与解析	(60)
第三章 向量	(68)
3.1 知识结构拓扑图	(68)
3.2 重要概念、性质、定理和公式	(69)
3.3 重点题型精讲	(82)
3.4 精选练习题	(99)
3.5 练习题答案与解析	(102)
第四章 线性方程组	(111)
4.1 知识结构拓扑图	(111)

4.2	重要概念、性质、定理和公式	(111)
4.3	重点题型精讲	(117)
4.4	精选练习题	(133)
4.5	练习题答案与解析	(135)
第五章	矩阵的特征值与特征向量	(141)
5.1	知识结构拓扑图	(141)
5.2	重要概念、性质、定理和公式	(142)
5.3	重点题型精讲	(148)
5.4	精选练习题	(159)
5.5	练习题答案与解析	(160)
第六章	二次型	(166)
6.1	知识结构拓扑图	(166)
6.2	重要概念、性质、定理和公式	(166)
6.3	重点题型精讲	(172)
6.4	精选练习题	(193)
6.5	练习题答案与解析	(194)

第一章 行列式

1.1 知识结构拓扑图



1.2 重要概念、性质、定理和公式

一、重要概念

定义 1.1 排列 由 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个自然数组成的一个有序数组 $j_1 j_2 \dots j_n$ 称为一个 n 阶排列, 也称为 n 元排列或 n 级排列.

【评注】 (1) n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列的种数通常用 P_n 表示, 且 $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

(2) $1, 2, \dots, n$ 也是一个排列, 这个排列具有自然顺序, 也称为自然排列或标准排列, 就是按递增的顺序排起来的; 其他的排列或多或少地破坏了自然排列, 需要引入逆序的概念.

定义 1.2 逆序和逆序数 在一个排列中, 如果有两个数的前后位置与大小顺序相反, 即前面的数大于后面的数, 那么它们就称为一个逆序. 一个排列 $j_1 j_2 \dots j_n$ 中逆序的总数, 就称为这个排列的逆序数, 记为 $\tau(j_1 j_2 \dots j_n)$.

如果一个排列的逆序数是偶数, 则称这个排列为偶排列, 否则称为奇排列.

【计算逆序数的方法】

(1) 对排列中的每个元素, 计算其前面比它大的数字的个数, 即为该元素的逆序数;

(2) 将所有元素的逆序数累加, 即为所求排列的逆序数.

例如, 在 $2n$ 级排列 $135 \dots (2n-1)246 \dots (2n)$ 中, 前 n 个数 $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ 之间不构成逆序, 后 n 个数 $2, 4, 6, \dots, 2n$ 之间也不构成逆序, 只有前 n 个数和后 n 个数之间才构成逆序. 因此, 从数字 2 开始依次计算 $2, 4, 6, \dots, 2n$ 的逆序数, 将其相加得到排列 $135 \dots (2n-1)246 \dots (2n)$ 的逆序数为

$$\tau = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.3 n 阶行列式 n 阶行列式是一个数, 表示 $n!$ 项的代数和, 其定义是

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\tau(j_1 j_2 \dots j_n)$ 是 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $j_1 j_2 \dots j_n$ 的逆序数, 和号 $\sum_{j_1 j_2 \dots j_n}$ 是对所有这样的排列求和, 因此是 $n!$ 项的代数和, 简记作 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$, 其中 a_{ij} 为行列式 D 的 (i, j) 元.

特别地, 当 $n=1$ 时, 规定一阶行列式 $|a| = a$, 注意不要与绝对值记号相混淆.

【评注】 对于 n 阶行列式的定义应掌握以下六点:

$$(1) n \text{ 阶行列式的值是一个数, 而行列式的表达式 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \text{ 本质}$$

上是一个关于行列式的算式.

(2) n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项, 正项和负项各有一半, 即 $\frac{n!}{2}$ 项取正号, $\frac{n!}{2}$ 项取负号 ($n \geq 2$).

(3) 在 n 阶行列式的展开式中, 每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 (即每行每列各有一个元素).

(4) 在 n 阶行列式的展开式中, 在行下标按自然顺序排列的前提下, 每项前面的正负号取决于该项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 列下标所组成的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的奇偶性.

(5) 两个行列式相等, 它们的阶不一定相等. 这是因为两个行列式相等是指

$$\text{这两个行列式的值相等, 与行列式的阶数没有关系. 例如, } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

虽然两个行列式的值相等, 但是它们的阶却不相等, 其中 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ 为二阶行列式,

$$\text{而 } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ 为三阶行列式.}$$

(6) 一阶行列式 $|a|$ 与绝对值 $|a|$ 的记号相同, 且都表示一个数, 但其定义不同, 规定一阶行列式 $|a|$ 就表示数 a , 而绝对值 $|a| \geq 0$. 例如, 一阶行列式 $|-2| = -2$, 而绝对值 $|-2| = 2$.

定义 1.4 余子式和代数余子式 在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

中, 把 (i, j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后, 留下来的 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

称为 (i, j) 元 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} ; 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

【评注】 (1) 余子式和代数余子式是行列式展开的基础,也是一种重要的考研题型.

(2) 因为 n 阶行列式中一共有 n^2 个元素,行列式的每个元素分别对应着一个余子式和一个代数余子式,所以 n 阶行列式一共有 n^2 个余子式和 n^2 个代数余子式.

(3) 余子式和代数余子式的关系式具有对称性,即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}, \quad M_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}.$$

(4) 在 n 阶行列式中,元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 与 a_{ij} 本身的大小没有关系.

(5) 求 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 时,不要忘记其正负号 $(-1)^{i+j}$.

例如,若已知行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & J \\ 0 & Q & 0 & K \end{vmatrix}$$
 的代数余子式 $A_{32} = 6$, 则有

$$(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & K \end{vmatrix} = -6K = 6,$$

于是 $K = -1$.

定义 1.5 转置行列式 将行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$ 的行与列互换后得

到的新的行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$
, 称为 D 的转置行列式,记为 D^T 或 D' , 即 $D^T =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

【评注】 (1) D^T 是 D 的转置行列式,同样地, D 也是 D^T 的转置行列式.

(2) 转置行列式也可看作以主对角线为轴,把行列式翻转 180° 的结果.

二、重要性质

性质 1.1 转置相等 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^T$.

【评注】 由性质 1.1 可知,行列式中的行与列具有相同的地位,行列式的行具有的性质,它的列也同样具有.

性质 1.2 互换反号(换行(列)反号) 交换行列式的两行(列),行列式变号.