# 直觉模糊粗糙集理论及应用

雷英杰 路艳丽 孔韦韦 樊雷 田野 著

科学出版社

# 直觉模糊粗糙集理论及应用

雷英杰　路艳丽　孔韦韦　樊　雷　田　野　著

科学出版社

北　京

# 内 容 简 介

本书是系统介绍直觉模糊粗糙集理论及应用的著作. 全书共分 13 章，第 1 章介绍直觉模糊粗糙集(IFRS)的衍生和发展；第 2 章介绍直觉模糊粗糙集模型及性质；第 3,4 章介绍直觉模糊粗糙逻辑推理，即基于直觉模糊关系的 IFRS 上、下近似逻辑推理，基于直觉模糊三角模的 IFRS 推理方法及直觉模糊粗糙逻辑推理系统设计；第 5～8 章分别介绍直觉模糊粗糙逻辑规则库的完备性、互作用性、相容性检验以及检验系统设计；第 9～13 章介绍 IFRS 理论在知识发现、信息融合等领域的应用，即基于 IFRS 的属性约简方法、关联规则挖掘方法、空袭编队分析、敌方意图识别方法等.

本书内容新颖，逻辑严谨，语言通俗，理例结合，注重基础，面向应用，可作为高等院校计算机、自动化、信息、管理、控制、系统工程等专业高年级本科生或研究生的计算智能课程教材或教学参考书，也可供从事智能信息处理、智能信息融合、智能决策等研究的教师、研究生及科研和工程技术人员自学或参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

直觉模糊粗糙集理论及应用/雷英杰等著. —北京：科学出版社，2013. 6
ISBN 978-7-03-037991-7

Ⅰ. ①直… Ⅱ. ①雷… Ⅲ. ①模糊集-研究 Ⅳ. ①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 136187 号

责任编辑：李 欣/责任校对：郑金红
责任印制：钱玉芬/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2013 年 6 月第一次印刷 印张：15 3/4
字数：304 000
**定价：78.00 元**
(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

大量不确定性问题的存在是现代信息社会的一大特点，是国民经济建设和国防科技发展必须解决的困难问题，体现了海量信息处理的复杂性. 面对越来越多的不确定性问题，必须不断研究和发展行之有效的处理方法，推动不确定性信息处理理论与技术的进步.

模糊集(fuzzy sets, FS)理论是描述和处理不确定性问题的重要工具之一. 模糊集理论由扎德(L. A. Zadeh)教授所创立，他于 1965 年发表的《模糊集合论》一文，标志模糊数学的诞生. 他在另一个长篇论文《语言变量的概念及其在近似推理中的应用》中，提出了语言变量的概念并探索了它的含义，是模糊集理论最重要的发展. 这一理论和方法对控制论和人工智能等作出了重要贡献.

模糊集合是对经典的康托尔集合的扩充和发展. 在语义描述上，经典的康托尔集合只能描述“非此即彼”的“分明概念”，而模糊集则可以扩展描述外延不分明的“亦此亦彼”的“模糊概念”. 随着模糊信息处理技术的不断发展，模糊集理论在模式识别、控制、优化、决策等领域得到广泛应用，成为对不确定性问题进行建模和求解的重要工具之一，取得了举世公认的成就. 同时，由于模糊集理论及其应用研究已渐趋成熟，其局限性也已逐渐显现，所以国内外学者的研究不约而同地转向对模糊集理论的扩充和发展，相继出现了各种拓展形式，如直觉模糊集(intuitionistic fuzzy sets, IFS)、*L*-模糊集、区间值模糊集、Vague 集等理论. 这种情形，既反映出模糊集理论研究与应用的活跃态势，又反映出客观对象的复杂性对于应用研究的反作用. 在这众多的拓展形式中，直觉模糊集理论的研究最为活跃，也最富有成果. 直觉模糊集理论可更加细腻地刻画客观对象的模糊性本质，从支持、反对和中立三方面对不确定性问题进行建模，符合人们的思维习惯，成为对 Zadeh 模糊集理论最有影响力的一种扩展.

直觉模糊集最初由著名学者 K. Atanassov 于 1986 年提出. 他系统提出并定义了直觉模糊集及其一系列运算和定理，奠定了直觉模糊集理论的基础. 同时，许多学者对此开展研究. 从发表的文献来看，对于直觉模糊集开展研究，早期大多处于纯数学的角度，成功的应用研究案例较少. 如今，直觉模糊集理论已经作为一种新的数学方法被引入各种应用领域，其研究已处于快速发展阶段.

模糊集理论逐渐显现的缺陷主要体现在其语义描述上存在的不足. 模糊集合只有一个隶属度函数，虽能描述“亦此亦彼”的“模糊概念”，但不能描述“非此非彼”

的“模糊概念”，不适合处理如“投票模型”一类的问题.而直觉模糊集的隶属度函数、非隶属度函数及导出的第三个属性参数——直觉指数，则可以细腻地描述支持、反对、中立三种情形.例如，假设一个直觉模糊集的隶属度函数为0.5，非隶属度函数为0.3，则其直觉指数为0.2，可分别表示支持程度为0.5，反对程度为0.3，既不支持也不反对的中立程度为0.2.我们也可以用投票模型来解释，即赞成票为50%，反对票为30%，弃权票为20%.可见，直觉模糊集有效扩展了模糊集的表示能力.

粗糙集(rough sets，RS)理论从新的视角对知识进行了定义，把知识看成关于论域的划分，提供了从数据中发现规则的严密数学方法，在处理不精确、不一致、不完整和冗余等信息时具备优良的数据推理性能.经过十余年的发展，基于粗糙集的数据分析及自动知识获取技术已渗透到人工智能的各个分支，并引起国际学术界的广泛关注.然而，研究发现，单纯地使用粗糙集理论不能完全有效地描述不确定性问题，因此，在粗糙集的发展过程中出现了各种拓展形式，如变精度粗糙集模型、概率粗糙集模型、基于随机集的粗糙集模型、模糊粗糙集模型等，其中前三种扩展模型所涉及的概念和知识都是清晰的.而在实际问题中，涉及更多的往往是一些模糊概念和模糊知识，反映在粗糙集模型中则表现为两种情况：一是知识库的知识是清晰的而被近似的概念是模糊的，二是知识库的知识和被近似的概念都是模糊的.这就要求我们必须将粗糙集模糊化，从而出现了模糊粗糙集理论.

目前，模糊粗糙集(fuzzy rough sets，FRS)理论模型的建立和发展也已成为粗糙集理论推广的主要方向之一.直觉模糊集作为模糊集的一种重要拓展，在保留模糊集隶属度函数的基础上，增加了一个新的属性参数——非隶属度函数，其数学描述更加符合客观世界模糊对象的本质.因此，进一步将模糊粗糙集进化为直觉模糊粗糙集(intuitionistic fuzzy rough sets，IFRS)成为理论发展的一种必然趋势.直觉模糊粗糙集丰富和发展了模糊粗糙集理论，在不确定信息系统建模和处理上更具灵活性、更具表达力.因此，发展直觉模糊粗糙集理论对于求解或处理复杂系统中大量的不确定性问题具有重要的作用和意义，成为不确定领域理论研究的重要内容.

在描述和求解不确定、不精确、信息不完全的问题时，各种数学理论各有特点，可以相互补充.由于不确定性问题的复杂性，单一处理方法往往难以胜任，多种已有方法的相互结合虽然有效，但发展新的方法、把新的数学理论引入不确定信息处理领域仍然是重要的发展趋势.在信息融合领域，敌方意图识别就属于一种典型的不确定性问题.研究表明，单一的信息融合方法对于这一类决策级融合问题难以奏效，而直觉模糊粗糙集理论则可以为这种高层决策级信息融合提供新的思路和方法.在此背景下，本书旨在将直觉模糊集、粗糙集相融合而拓展为直觉模糊粗糙集，

探索基于直觉模糊粗糙集理论的不确定性信息处理方法，建立相关的计算模型，并将这一新的智能信息处理理论引入信息融合领域，为求解信息化战争环境下的决策级信息融合问题提供新的途径. 同时，将直觉模糊粗糙集理论导入知识发现领域，发展基于直觉模糊粗糙集理论的属性约简方法、关联规则挖掘方法.

本书是系统介绍直觉模糊粗糙集理论及其应用的著作，是作者在国家自然科学基金项目“直觉模糊集理论及其应用研究”（项目编号：60773209）、“直觉模糊混合理论及其在弹道目标识别中的应用研究”（项目编号：61272011）和陕西省自然科学基础研究计划项目“直觉模糊粗糙集理论研究”（项目编号：2006F18）资助下系列研究成果的汇集.

全书共分 13 章，第 1 章介绍直觉模糊粗糙集的衍生和发展；第 2 章介绍直觉模糊粗糙集模型及性质；第 3，4 章介绍直觉模糊粗糙逻辑推理，即基于直觉模糊关系的 IFRS 上、下近似逻辑推理，基于直觉模糊三角模的 IFRS 推理方法及直觉模糊粗糙逻辑推理系统设计；第 5～8 章分别介绍直觉模糊粗糙逻辑规则库的完备性、互作用性、相容性检验以及检验系统设计；第 9～13 章介绍 IFRS 理论在知识发现、信息融合等领域的应用，即基于 IFRS 的属性约简方法、关联规则挖掘方法、空袭编队分析、敌方意图识别方法等.

本书由雷英杰主编，参加编撰工作的有：路艳丽博士（第 1 章、第 11～13 章）、孔韦韦博士（第 5～8 章）、樊雷博士（第 2 章、第 9～10 章）、田野博士（第 3 和第 4 章）等课题组成员.

直觉模糊粗糙集是近年来新兴起的研究领域，其理论及应用研究受到国内外众多学者的关注，成为当前研究的一个热点领域，本书汇集的研究成果只是冰山一角，只能起抛砖之效，加之作者水平有限，书中难免有不足之处，敬请广大读者批评指正.

作　者

2013 年 3 月

# 目　　录

前言
第 1 章　概述 …… 1
1.1　模糊集 …… 1
1.2　粗糙集 …… 3
1.3　模糊粗糙集 …… 7
1.4　直觉模糊集 …… 10
1.5　直觉模糊集与模糊集、粗糙集的比较 …… 13
1.6　直觉模糊粗糙集 …… 17
参考文献 …… 18
第 2 章　直觉模糊粗糙集模型及性质 …… 23
2.1　引言 …… 23
2.2　直觉模糊逻辑算子与直觉模糊关系 …… 23
2.3　基于 Dubois 模型的 IFRS-1 和 IFRS-2 模型及性质 …… 31
2.4　基于直觉模糊逻辑算子的 IFRS-3 模型及性质 …… 38
2.5　基于直觉模糊包含度的 IFRS-4 模型及性质 …… 45
2.6　本章小结 …… 53
参考文献 …… 54
第 3 章　基于 IFRS 的逻辑推理方法 …… 56
3.1　不确定性推理与模糊推理 …… 56
3.2　直觉模糊环境下基于 CRI 合成规则的推理算法 …… 57
3.3　IFRS 中基于直觉模糊关系的上、下近似逻辑推理 …… 60
3.4　基于直觉模糊三角模的 IFRS 逻辑推理 …… 68
3.5　本章小结 …… 73
参考文献 …… 73
第 4 章　基于 IFRS 的逻辑推理系统设计 …… 75
4.1　现有模糊逻辑工具软件介绍与对比 …… 75
4.2　IFRIS 的功能与结构 …… 77

4.3　IFRIS 的设计与实现 ……………………………………………………… 82
4.4　本章小结 ……………………………………………………………………… 92
参考文献 ………………………………………………………………………… 92
**第 5 章　直觉模糊粗糙逻辑规则库的完备性** ………………………………… 93
5.1　预备知识 ……………………………………………………………………… 93
5.2　直觉模糊粗糙逻辑规则库的完备性 ………………………………………… 97
5.3　直觉模糊粗糙逻辑规则库的完备性检验算法 ……………………………… 98
5.4　算例分析 ……………………………………………………………………… 99
5.5　本章小结 ……………………………………………………………………… 102
参考文献 ………………………………………………………………………… 102
**第 6 章　直觉模糊粗糙逻辑规则库的互作用性** ……………………………… 103
6.1　引言 …………………………………………………………………………… 103
6.2　本章研究模型 ………………………………………………………………… 103
6.3　直觉模糊粗糙逻辑规则库的互作用性 ……………………………………… 104
6.4　理想输出和实际输出的关系 ………………………………………………… 106
6.5　规则间不存在相互作用的条件 ……………………………………………… 107
6.6　影响规则间相互作用大小的因素 …………………………………………… 108
6.7　直觉模糊粗糙逻辑规则库的互作用性检验算法 …………………………… 110
6.8　算例分析 ……………………………………………………………………… 111
6.9　本章小结 ……………………………………………………………………… 113
参考文献 ………………………………………………………………………… 113
**第 7 章　直觉模糊粗糙逻辑规则库的相容性** ………………………………… 114
7.1　引言 …………………………………………………………………………… 114
7.2　本章研究模型 ………………………………………………………………… 114
7.3　直觉模糊粗糙逻辑规则的相关性 …………………………………………… 115
7.4　直觉模糊粗糙逻辑规则的相容性 …………………………………………… 116
7.5　直觉模糊粗糙逻辑规则的不相容度 ………………………………………… 116
7.6　直觉模糊粗糙逻辑规则库的相容性检验算法 ……………………………… 117
7.7　算例分析 ……………………………………………………………………… 118
7.8　本章小结 ……………………………………………………………………… 120
参考文献 ………………………………………………………………………… 120

**第 8 章 直觉模糊粗糙逻辑规则库检验软件的设计** …… 121
8.1 IFRRCS 的特点 …… 121
8.2 IFRRCS 的界面、功能与结构 …… 121
8.3 IFRRCS 的设计与实现 …… 124
8.4 实例分析 …… 127
8.5 本章小结 …… 129
参考文献 …… 129
**第 9 章 面向数据挖掘的 IFRS 的数据预处理方法** …… 130
9.1 引言 …… 130
9.2 基于直觉模糊集理论的连续属性直觉模糊化方法 …… 131
9.3 基于直觉模糊属性重要性与依赖度的属性约简算法 …… 137
9.4 基于区分加权矩阵的直觉模糊粗糙属性约简算法 …… 142
9.5 本章小结 …… 147
参考文献 …… 147
**第 10 章 面向数据挖掘的 IFRS 规则挖掘方法** …… 149
10.1 引言 …… 149
10.2 分类规则与关联规则的区别与联系 …… 150
10.3 基于直觉模糊粗糙集的分类规则的提取与规则库的生成 …… 151
10.4 基于经典关联规则挖掘思想的直觉模糊关联规则挖掘算法 …… 154
10.5 基于直觉模糊粗糙集数据挖掘软件的设计与实现 …… 164
10.6 本章小结 …… 167
参考文献 …… 167
**第 11 章 基于 IFRS-3、IFRS-4 模型的属性约简方法** …… 168
11.1 引言 …… 168
11.2 基于 IFRS-3 的属性约简方法 …… 169
11.3 基于 IFRS-4 的属性约简方法 …… 186
11.4 本章小结 …… 192
参考文献 …… 193
**第 12 章 基于 IFRS-4 的空袭编队分析** …… 195
12.1 引言 …… 195
12.2 空袭编队问题分析 …… 196
12.3 基于 IFRS-4 聚类的目标一次聚合 …… 198

12.4　基于 IFRS-4 近似理论的目标功能合群 …… 206
12.5　本章小结 …… 211
参考文献 …… 211
**第 13 章　基于 IFRS-3 与 D-S 理论的意图识别方法** …… 213
13.1　引言 …… 213
13.2　意图识别问题描述 …… 214
13.3　D-S 理论及其在意图识别中的应用分析 …… 215
13.4　基于 IFRS-3 的知识获取方法 …… 217
13.5　基于 IFRS-3 与 D-S 理论的意图识别模型 …… 226
13.6　实例 …… 230
13.7　本章小结 …… 236
参考文献 …… 237
**索引** …… 238

# 第1章 概 述

集合论是现代数学的基础,模糊集、粗糙集都是对经典集合理论的扩充和发展.直觉模糊粗糙集是直觉模糊集与粗糙集理论相融合的产物,是对粗糙集与模糊粗糙集的扩充和发展,在不确定信息系统建模和处理上更具灵活性,更具表达力.本章主要对模糊集、粗糙集、模糊粗糙集、直觉模糊集、直觉模糊粗糙集的基本概念进行必要的介绍.

## 1.1 模 糊 集

1965 年,美国加利福尼亚大学控制论专家扎德(L. A. Zadeh)教授首先提出了模糊集合理论[1].此后,在近 50 年里,模糊集理论发展迅速,已经应用到许多科学技术领域,在农业、林业、气象、管理科学、系统工程、经济学、社会学、生态学和军事学等领域都有举世瞩目的建树.模糊数学已经显出示强大的生命力和渗透力,发展前景非常广阔.1976 年模糊数学传入我国,并于 1980 年成立了中国模糊数学与模糊系统学会,1981 年创办了《模糊数学》杂志,1987 年出现了《模糊系统与数学》杂志.目前,我国已经成为全球四大模糊数学研究中心之一.

在自然科学或社会科学研究中,存在着许多定义不很严格或者说具有模糊性的概念,这里所谓的模糊性,主要是指客观事物的差异在中间过渡中的不分明性,模糊性概念是没有明确外延的概念.根据普通集合论的要求,一个对象对应于一个集合,要么属于,要么不属于,二者必居其一,且仅居其一.这样的集合论本身无法处理具体的模糊概念.

对于一个普通的集合 $A$,空间中任一元素 $x$,要么 $x\in A$,要么 $x\notin A$,这一特征可用一个函数表示为

$$A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

但是现实世界中很多事物的分类边界是不分明的,如“高个子”“老年人”等,而这种不分明划分在人们的识别、判断和认知过程中起着十分重要的作用.为了用数学方法处理这类问题,模糊集的概念被提出.模糊集用隶属函数(membership function)来刻画处于中间过渡状态的事物对差异双方所具有的倾向性,可以认为,隶属函数是经典集合特征函数的推广.当特征函数的值域由二值集合{0,1}扩展到单位区间[0,1]时,就描述一个模糊集.

**定义 1.1**(模糊集) 设 $U$ 为非空有限论域,所谓 $U$ 上的一个模糊集 $A$,即一个从 $U$ 到 $[0, 1]$的一个函数 $\mu_A(x):U\to[0,1]$ ,对于每个 $x\in U$ , $\mu_A(x)$ 是$[0,1]$中的某个数,称为 $x$ 对 $A$ 的隶属度,即 $x$ 属于 $A$ 的程度,称 $\mu_A(x)$ 为 $A$ 的隶属函数,称 $U$ 为 $A$ 的论域.

例如,给 5 个同学的性格稳重程度打分,按百分制给分,再除以 100,这样就给定了一个从域 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$到闭区间$[0, 1]$的映射:

$$x_1:85\text{ 分},A(x_1)=0.85$$
$$x_2:75\text{ 分}, A(x_2)=0.75$$
$$x_3:98\text{ 分}, A(x_3)=0.98$$
$$x_4:30\text{ 分}, A(x_4)=0.30$$
$$x_5:60\text{ 分}, A(x_5)=0.60$$

如此确定出一个模糊子集 $A=(0.85, 0.75, 0.98, 0.30, 0.60)$.

模糊集完全由隶属函数所刻画,$\mu_A(x)$ 的值越接近于 1,表示 $x$ 隶属于模糊集合 $A$ 的程度越高;$\mu_A(x)$ 越接近于 0,表示 $x$ 隶属于模糊集合 $A$ 的程度越低. 当 $\mu_A(x)$ 的值域为$\{0,1\}$时,$A$ 便退化成为经典集合,因此可以认为模糊集合是普通集合的一般化.

模糊集可以表示为以下两种形式:

(1)当 $U$ 为连续论域时,$U$ 上的模糊集 $A$ 可以表示为

$$A=\int_U \mu_A(x)/x,\quad x\in U$$

(2)当 $U=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$为离散论域时,

$$A=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)/x_i,\quad x_i\in U$$

隶属函数 $\mu_A(x)$ 可以简写为 $A(x)$,论域 $U$ 上的模糊集全体表示为 $FS(U)$.

**定义 1.2**(模糊集的运算) 若 $A,B$ 为论域 $U$ 上两个模糊集,它们的和集、交集和余集都是模糊集,其隶属函数分别定义为

$$(A\vee B)(x)=\max(A(x), B(x))$$
$$(A\wedge B)(x)=\min(A(x), B(x))$$
$$A^C(x)=1-A(x)$$

关于模糊集的和、交等运算,可以推广到任意多个模糊集中去. $A^C$也可以表示为 $\sim A$ 或 $\overline{A}$ .

**定义 1.3**($\lambda$ 截集) 若 $A$ 为 $U$ 上的任一模糊集,对任意 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,记 $A_\lambda=\{x\mid x\in U, A(x)\geqslant\lambda\}$,称 $A_\lambda$ 为 $A$ 的 $\lambda$ 截集.

$A_\lambda$ 是普通集合而不是模糊集. 由于模糊集的边界是模糊的,如果要把模糊概

念转化为数学语言,需要选取不同的置信水平 $\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$来确定其隶属关系. $\lambda$ 截集就是将模糊集转化为普通集的方法. 模糊集 $A$ 是一个具有游移边界的集合,它随 $\lambda$ 值的变小而增大,即当 $\lambda_1>\lambda_2$时,有 $A_{\lambda_1}\subset A_{\lambda_2}$.

对任意 $A\in \mathrm{FS}(U)$,称 $A_1$(即 $\lambda=1$ 时 $A$ 的 $\lambda$ 截集)为 $A$ 的核,称 $\mathrm{supp}(A)=\{x|A(x)>0\}$为 $A$ 的支集.

模糊关系是模糊数学的重要概念. 普通关系强调元素之间是否存在关系,模糊关系则可以给出元素之间相关的程度. 模糊关系也是一个模糊集合.

**定义 1.4**(模糊关系) 设 $U$ 和 $V$ 为论域,则 $U\times V$ 上的一个模糊子集 $R$ 称为从 $U$ 到 $V$ 的一个二元模糊关系.

对于有限论域 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$, $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$,则 $U$ 对 $V$ 的模糊关系 $R$ 可以用一个矩阵来表示:

$$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n},\quad r_{ij}=\mu_R(u_i, v_j)$$

隶属度 $r_{ij}=\mu_R(u_i, v_j)$表示 $u_i$与 $v_j$具有关系 $R$ 的程度. 特别地,当 $U=V$ 时,$R$ 称为 $U$ 上的模糊关系. 如果论域为 $n$ 个集合(论域)的直积,则模糊关系 $R$ 不再是二元的,而是 $n$ 元的,其隶属函数也不再是两个变量的函数,而是 $n$ 个变量的函数.

**定义 1.5**(模糊关系的合成) 设 $R$,$Q$ 分别是 $U\times V$,$V\times W$ 上的两个模糊关系,$R$ 与 $Q$ 的合成指从 $U$ 到 $W$ 上的模糊关系,记为 $R\circ Q$,其隶属函数为

$$\mu_{R\circ Q}(u,w)=\bigvee_{u\in V}(\mu_R(u,v)\wedge\mu_Q(v,w))$$

特别地,当 $R$ 是 $U\times U$ 的关系,有

$$R^2=R\circ R,\quad R^n=R^{n-1}\circ R$$

利用模糊关系的合成,可以推论事物之间的模糊相关性.

## 1.2 粗 糙 集

### 1.2.1 粗糙集的研究概况

粗糙集理论由波兰数学家 Pawlak 教授[2-4]于 1982 年提出,它是一种处理含糊(vagueness)和不确定(uncertainty)信息的新型数学工具. 之后的 1987 年 Iwinski 将代数引入粗糙集,定义了 I-粗糙集[5],从而形成了粗糙集理论研究的两条技术路线,一是面向数学特征研究的公理化方法,二是面向应用研究的构造化方法.

Pawlak 针对模糊逻辑的创始人 Frege 的"边界线区域"(boundary region)思想,提出了粗糙集,他把无法确定的个体都归属于边界线区域,而这种边界线区域被定义为上近似集和下近似集的差集. 粗糙集体现了集合中对象的不可区分性,即由于知识的粒度而导致的粗糙性. 1991 年,Pawlak 发表了专著 *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data*[4],奠定了粗糙集理论的基础,从而掀起

了粗糙集的研究热潮. 1992 年,在波兰召开了第 1 届国际粗糙集研讨会,这次会议着重讨论了集合近似的基本思想及其应用,其中粗糙集环境下机器学习的基础研究是这次会议的四个专题之一[6],以后每年都召开一次以粗糙集理论为主题的国际研讨会. 1993 年在加拿大召开了第 2 届国际粗糙集与知识发现研讨会,这次会议极大地推动了国际上对粗糙集理论与应用的研究. 1994 年在美国召开了第 3 届国际粗糙集与软计算研讨会,这次会议广泛地探讨了粗糙集与模糊逻辑、神经网络、进化计算等的融合问题. 1995 年美国计算机学会将粗糙集列为新浮现的计算机科学的研究课题[7]. 1996 年在东京召开了第 5 届国际粗糙集理论学术会议. 1998 年《国际信息科学杂志》(*Information Sciences*)还为粗糙集理论的研究出版了一期专辑. 2001 年 5 月在重庆召开了中国第 1 届粗糙集与软计算学术研讨会. 2003 年 10 月在重庆召开了中国第 3 届粗糙集与软计算学术研讨会和第 9 届关于粗糙集、模糊集、数据挖掘与粗糙计算的国际会议. 在中国,几乎所有重要的计算机、信息处理及控制决策类学术期刊均刊登有粗糙集理论的学术论文,对粗糙集理论的知识表示与其他处理不确定性问题数学方法的关系,国内有很多综述报告及著作[8-15].

粗糙集理论的研究由于其历史较短,所以到目前为止,对粗糙集理论的研究主要集中在:粗糙集模型的推广;问题的不确定性研究;与其他处理不确定性、模糊性问题的数学理论的关系与互补;纯数学理论研究;粗糙集的算法研究和人工智能与其他方向关系的研究等. 这些研究有的是经应用的推动而产生的,有的是纯理论的.

### 1.2.2 粗糙集的基本概念

在粗糙集理论中,知识是关于论域的划分,是一种对对象进行分类的能力. 粗糙集理论以不可区分关系为基础建立知识库,进而利用知识库的中清晰的知识——下近似和上近似(lower and upper approximations),来描述任一“含糊”的概念,因此,粗糙集的四个核心概念是不可区分关系、近似空间、知识表达系统及上/下近似.

**定义 1.6**(不可区分关系) 若 $\boldsymbol{R}$ 是论域 $U$ 上的一族普通等价关系,$\boldsymbol{R} \neq \varnothing$,则 $\boldsymbol{R}$ 中所有等价关系的交集 $\cap \boldsymbol{R}$ 也是一个普通等价关系,称 $\cap \boldsymbol{R}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的不可区分关系,记为 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{R})$,每一个非空子集 $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{R}$ 都可以决定一个不可区分关系 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{B})$,可以具体表示为

$$\mathrm{ind}(\boldsymbol{B}) = \{(x, y) \in U \times U \mid a(x) = a(y), \forall a \in \boldsymbol{B}\} \tag{1.1}$$

$\mathrm{ind}(\boldsymbol{B})$ 将 $U$ 划分为一些等价类 $U/\mathrm{ind}(\boldsymbol{B}) = \{[x]_{\boldsymbol{B}} \mid x \in U\}$,其中 $[x]_{\boldsymbol{B}}$ 是相对于 $\boldsymbol{B}$ 的包含 $x$ 的等价类.

**定义 1.7**(Pawlak 近似空间)　近似空间 $AS=(U,\boldsymbol{R})$，其中 $U$ 为给定的非空有限论域，$\boldsymbol{R}$ 是 $U$ 上的一族普通等价关系. 近似空间也称为知识库.

**定义 1.8**(知识表达系统)　知识表达系统 $S=(U,A,V,f)$，其中 $U$ 为对象的非空有限集合；$A$ 是属性的非空有限集合；$V$ 是 $A$ 的值域；$f:U\times A\rightarrow V$，$\forall a\in A$，$\forall x\in U$，$f(x,a)\in V_a$. 当 $A=C\cup D$，$C\cap D=\varnothing$，$C$ 是一个非空有限条件属性集，$D$ 为决策属性集，即当知识表达系统具有条件属性和决策属性时就称为决策表.

**定义 1.9**(上、下近似)　Pawlak 近似空间 $AS=(U,\boldsymbol{R})$，$\forall X\subseteq U$，$\forall R\in\boldsymbol{R}$，$X$ 的 $R$ 下近似集 $R^- X$ 和 $R$ 上近似集 $R^+ X$ 分别为 $U$ 上的一个普通集合，其中，

$$
\begin{aligned}
R^- X &= \{x\in U \mid [x]_R\subseteq X\}\\
R^+ X &= \{x\in U \mid [x]_R\cap X\neq\varnothing\}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

$\mathrm{pos}_R(X)=R^- X$ 称为 $X$ 的 $R$ 正域，$\mathrm{neg}_R(X)=U-R^+ X$ 称为 $X$ 的 $R$ 负域. $\mathrm{bn}_R(X)=R^+ X-R^- X$ 称为 $X$ 的 $R$ 边界域. 若 $R^+ X\neq R^- X$，即边界域非空，则称 $X$ 为 $R$ 粗糙集；否则 $X$ 为 $R$ 可定义集. 常用上、下近似构成的偶对 $(R^- X,R^+ X)$ 称为 $X$ 的粗糙集. 上、下近似是粗糙集理论刻画不确定性的基础.

从上述定义可以看出，$X$ 的 $R$ 下近似是包含在 $X$ 中的最大可定义集；$X$ 的 $R$ 上近似是包含 $X$ 的最小可定义集；若给定一个集对 $(A_1,A_2)$，且 $A_1,A_2$ 都是可定义的，即都是由等价类组成，但不一定存在 $A\subseteq U$ 粗糙集就是 $(A_1,A_2)$. 例如，当 $A_2=A_1\cup\{x_0\}$，$\{x_0\}$ 是个等价类，那么 $(A_1,A_2)$ 就没有对应的 $A$，即找不到一个集合 $A$，使得 $A$ 的上、下近似是 $(A_1,A_2)$. 所以，若有 $A\subseteq U$，肯定有 $(R^- X,R^+ X)$；但有 $A_1\subseteq A_2$ 且 $A_1,A_2$ 均在近似空间 $(U,\boldsymbol{R})$ 中可定义，但 $(A_1,A_2)$ 不一定能找到对应的 $A\subseteq U$ 使得 $(A_1,A_2)=(R^- X,R^+ X)$.

以上是经典粗糙集的概念. 本书对粗糙集理论模型推广的讨论，实际上集中在下近似、上近似的定义内容、方式的推广. 式(1.3)给出了上、下近似的等价定义：

$$
\begin{aligned}
R^- X &= \bigcup\{[x]_R \mid [x]_R\subseteq X\}\\
R^+ X &= \bigcup\{[x]_R \mid [x]_R\cap X\neq\varnothing\}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

进一步对式(1.3)进行修正，可给出上、下近似更为简洁的定义.

**定义 1.10**(简化表示的上、下近似)　Pawlak 近似空间 $AS=(U,\boldsymbol{R})$，$\forall X\subseteq U$，$\forall R\in\boldsymbol{R}$，$X$ 的 $R$ 下近似集 $R^- X$ 和 $R$ 上近似集 $R^+ X$ 分别为 $U$ 上的一个普通集合，

$$
\begin{aligned}
R^- X &= \bigcup_{x\in X\wedge[x]_R\subseteq X}[x]_R\\
R^+ X &= \bigcup_{x\in X}[x]_R
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

容易证明，定义 1.10 与定义 1.9 是等价的. 下面引出 Pawlak 粗糙集近似算子

的相关性质.

**定理 1.1** 设 Pawlak 近似空间 $\mathrm{AS}=(U,\boldsymbol{R})$，其中 $\boldsymbol{R}$ 为普通等价关系，$\forall A, B\subseteq U$，$\forall R\in\boldsymbol{R}$，

(C1) $R^- X\subseteq A\subseteq R^+ X$；

(C2) $R^- U=U=R^+ U$，$R^- \varnothing=\varnothing=R^+ \varnothing$；

(C3)若 $A\subseteq B$，$R^- A\subseteq R^- B$ 且 $R^+ A\subseteq R^+ B$；

(C4) $R^- (R^- A)=R^- A$，$R^+ (R^+ A)=R^+ A$；

(C5) $R^+ (R\text{-}A)=R^- A$，$R^- (R^+ A)=R^+ A$；

(C6) $R^- (A^{\mathrm{C}})=(R^+ A)^{\mathrm{C}}$，$R^+ (A^{\mathrm{C}})=(R^+ A)^{\mathrm{C}}$；

(C7) $R^- (R^- A)=R^+ (R^- A)=R^- A$，$R^+ (R^+ A)=R^- (R^+ A)=R^+ A$；

(C8) $R^+ (A\cup B)=R^+ A\cup R^+ B$，$R^- (A\cap B)=R^- A\cap R^- B$；

(C9) $R^- (A\cup B)\supseteq R^- A\cup R^- B$，$R^+ (A\cap B)\subseteq R^+ A\cap R^+ B$.

在粗糙集理论的推广过程中,较早就引入了逻辑运算的讨论. 下面用特征函数来描述 Pawlak 粗糙集的定义.

从 Pawlak 粗糙集的定义可以看出,对于 $\forall A\subseteq U$ 及 $\forall x\in U$，

(1)$\mu_{R^-X}(x)=1$ 当且仅当 $\forall y\in U,\mu_R(x,y)=1\rightarrow\mu_X(y)=1$;

(2)$\mu_{R^+X}(x)=1$ 当且仅当 $\exists y\in U,\mu_R(x,y)=1\wedge\mu_X(y)=1$.

其中,$\mu_A(x)$ 表示集合 $A$ 的特征函数,"$\rightarrow$"可以解释为一个蕴涵算子,"$\wedge$"可以解释为一个合取算子. (1)可解释为"$x$ 属于 $R^- X$"等价于"对于任意的 $y\in U$，$x$ 与 $y$ 具有关系 $R$,则 $y$ 肯定属于 $X$",从等价类角度来说,若与 $x$ 在同一等价类中的对象都在 $x$ 中,则 $x$ 属于 $X$ 的 $R$ 下近似集;(2)可解释为"$x$ 属于 $R^+ X$"等价于"存在 $y\in U$，$x$ 与 $y$ 具有关系 $R$ 且 $y$ 属于 $X$",从等价类角度来说,若 $x$ 的等价类中存在至少一个对象属于 $X$,则 $x$ 属于 $X$ 的 $R$ 上近似集. 因此,可以得到 Pawlak 粗糙集近似算子的逻辑语言表示.

Yao[16]用逻辑语言书写了 Pawlak 上、下近似的定义,如式(1.5)所示. $\forall x, y\in U$，

$$
\begin{aligned}
R^- X&=\{x\mid \forall y((x,y)\in R\rightarrow y\in X)\}\\
R^+ X&=\{x\mid \exists y((x,y)\in R\wedge y\in X)\}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

这种改写是有益的,出现在其中的二值逻辑运算,标志着模糊逻辑运算的引入,奠定了粗糙集理论与模糊集理论相结合的理论基础. 在很大程度上推动了粗糙集理论的拓展形式——模糊粗糙集理论的产生.

### 1.2.3 经典粗糙集的局限性

Pawlak 粗糙集理论是描述和处理不确定性问题的重要工具之一,它的优势是

无需提供除问题所需的数据集合之外的任何先验信息,目前已被成功地应用于机器学习、决策分析、过程控制、模式识别与数据挖掘等领域. 然而,单纯地使用粗糙集理论不能完全有效地描述不确定性问题,等价关系、数据离散化及数据的模糊性都成为制约经典粗糙集发展的瓶颈.

(1)传统的粗糙集理论的基础是等价关系,强调的是对象间的不可区分性,而等价关系在现实中很难获取,且忽略了数据污染的存在,因此,采用传统粗糙集不能区分出两个属性值是否相似以及相似到何种程度;

(2)经典粗糙集理论是面向离散数据的,而对连续属性离散化会导致信息丢失,这会大大影响分类结果的质量;

(3)粗糙集理论对于不确定知识的处理是有效的,但是对原始数据本身的模糊性缺乏相应的处理能力.

针对经典粗糙集理论的局限性,国内外学者从各个方面对经典粗糙集模型进行了推广,其中的一个主流思想是将模糊集引入粗糙集.

## 1.3 模糊粗糙集

### 1.3.1 模糊粗糙集的研究概况

在粗糙集理论的推广应用过程中,人们认识到单纯地使用粗糙集不能完全有效地描述不确定性问题,于是出现了粗糙集的各种扩展形式[17-23],如变精度粗糙集模型、不完备信息系统下的粗糙集模型、基于相似关系粗糙集模型、基于覆盖的粗糙集模型、概率粗糙集模型、基于随机集的粗糙集模型、$S$-粗糙集、模糊粗糙集模型等. 其中,前七种扩展模型所涉及的概念和知识都是清晰的,而在实际问题中,涉及更多的往往是一些模糊概念和模糊知识,这就要求将粗糙集模糊化.

最初的 FRS 模型由 Dubois 等于 1990 年共同提出[22,23](这里称为 Dubois 模型),Dubois 模型起源于 Willaeys 等对模糊等价关系与模糊分类的讨论[24]. 目前文献中所引用的 FRS 概念,大多是指 Dubois 等的定义. 与 Pawlak 粗糙集相比,Dubois 模型的不同之处在于:①被近似对象由清晰集(crisp sets)$X$ 转换为模糊集 $F$;②等价关系 $\boldsymbol{R}$ 推广为模糊等价关系 $\boldsymbol{R}$(满足自反性、对称性、传递性). Yao[16,25] 于 1997 年阐述了 Dubois 模型的背景和内涵,并基于 $\alpha$-截集研究了 FRS 的构造方法,使用“模糊粗糙集”来表示在一个模糊近似空间对一个普通集合的近似,使用“粗糙模糊集”来表示在一个普通近似空间对一个模糊集合的近似. 而后来的研究大多都将“FRS”定义为一个广义的概念,即模糊化的粗糙集理论. 另外一种与 Dubois 模型并行的是 Nanda 等于 1992 年提出的 FRS 模型[26],该 FRS 模型基于 Iwinski 粗糙集概念,定义 FRS 是一个模糊集对$(A,B)$,$A$ 和 $B$ 都来自于某种代数