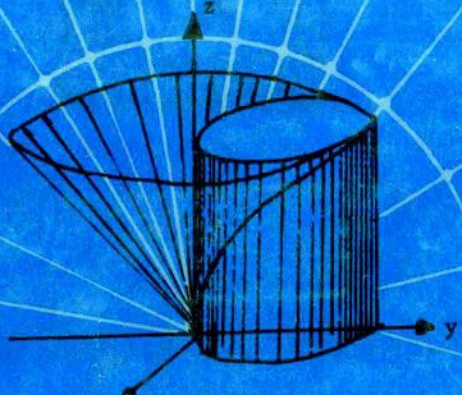
高等数学网络

主 编 邹增家

副主编 孙淑珍 赵淑珍



吉林科学技术出版社

高等数学网络

（吉林省高等学校教改立项重点课题）

《高等数学网络》编写组编

主　编　邹增家

副主编　孙淑珍　赵淑珍

编写组成员

　邹增家　孙淑珍　赵淑珍

　高　有　宋代[illegible]

吉林科学技术出版社

【吉】新登字 12 号

高等数学网络　　邹增家　主编

责任编辑　李大力　　封面设计　桂士杰

出版　吉林科学技术出版社出版　787×1092 毫米 32 开本　14,875 印张
插页 4　324,000 字
1996 年 10 月第 1 版　1996 年 10 月第 1 次印刷
发行　吉林科学技术出版社　印数:1－3000 册　定价:19.80 元
印刷　东北电力学院印刷厂　ISBN　7－5384－1695－1/0·58

代　序

高等数学是工科院校最重要的基础课之一。它不仅为学生学习后续课提供必要的基础,而且可以培养学生分析问题和解决问题的能力,特别是对提高学生的科学文化素质将起到潜移默化的作用。因此各高等院校普遍重视高等数学的教学和课程建设,出版了各种版本的优秀教材和参考书,它们对提高教学质量无疑都起到了积极作用。

东北电力学院邹增家、孙淑珍、赵淑珍等几位老师,基于深厚的数学功底,结合多年的教学经验,并参考了诸多国内外的有关资料,编写了一本很有特色的教学参考书《高等数学网络》。该书的最大特点是紧密贴切教学、服务教学,注重于高等数学的整体知识,着力于对学生能力和素质的培养。在编写上,不是以解题为中心,而是以知识网络、答问解疑、解题分析和综合检测的形式出现。知识网络化、表格化,使每部分繁多的内容尽收眼底,一目了然;答问解疑,问题来源于学生,解答服务于学生,贴切教学实际,就像教师对学生面对面的答疑;解题分析,类型精练,以点带面,使学生用较少的时间领悟到较多的思路和方法;综合检测,难易适当,层次分明,小题量大覆盖面,注重能力和素质,选择题质量较高。本书可视为教师教学的好帮手,学生学习的好助手。

笔者有幸阅读了该书的初稿,深受启示。在此书即将出版之际,作者要我作序,这于我本是难以胜任之事,但盛情难却,谨勉力写了上述介绍和读后感,供读者参考。

面向21世纪,工科数学的课程体系和教学内容如何改革,这是我们面临的一个重大课题。我相信,通过工科数学界广大同仁的不断努力,各种新的有特色的教材和参考书必将不断出现。

董 加 礼

1996年教师节识于长春

前　言

高等数学是理工科大学的一门十分重要的基础课。高等数学知识学习的好坏直接影响到专业基础课及专业课的学习，同时高等数学又是硕士研究生入学考试的主要内容，它的成绩通常成为研究生录取的阈值。从长远看，高等数学知识又影响着一个科学技术工作者所应具备的数学知识水平，所以理工科院校普遍重视高等数学的课程建设及教学工作，大学生们也都花费主要精力来学好高等数学课。

多年来我们在自己的教学实践中，特别是近几年来我们在编拟高等数学知识网络、促进课程建设的工作中，深切感到应该有一本能密切配合高等数学教学需要，针对性、适用性强的教学辅导书来强化和辅助高等数学的教学，它应有别于常见的一些以解题为主的参考书，而具有其自身的鲜明特色，无论是对教师的教或对学生的学都具有实际的指导作用，无论是对大学生的平时学习、迎接期终考试及准备研究生入学考试都能起到切实的辅导作用，做到“平时学习不离手、迎接考试好助手”，基于此目的我们编写了这本辅导书。在编写中以国家教委颁发的“工科高等数学课程教学大纲及基本要求”为准绳并结合硕士研究生入学高等数学考试大纲，按全国普遍采用的同济大学编写的《高等数学》(第三版)的体系编写，全书由正文和附录两部分组成。

前十二章为正文，每一章分四部分，各部分的特点及作用如下：

1.**知识网络**:按照大纲及基本要求将其中的三基内容,串点成线,形成网络,以一张张醒目的知识结构网络图呈现出来,体现出每章的三基内容的内在联系及网络结构,是一章教材内容的网络化和图解化,使读者一目了然,便于掌握、便于记忆,这是本书编写的一个显著特色。

2.**答问解疑**:是将教师平时教学、学生学习中经常遇到的一些疑难问题及容易产生错误理解的问题,选择了一些常见的、具有共性的做了必要的答疑(答疑内容以不超越大纲及基本要求为准),完全可以起到教师在课堂上的深入讲解和在课后的辅导答疑作用,有助于学生正确理解掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本技能,这是本书有别其他参考书单纯侧重繁琐解题的另一特色。

3.**解题分析**:解题是高等数学教与学的重要环节,是理解掌握三基内容的重要步骤。解题的关键是掌握思路方法,在这部分我们将内容划块,采取精选题型、讲透方法的做法,并在此基础上对各类解题的要领做了必要的归纳和总结,以便起到举一反三、以点带面、以精避繁,这是本书的第三个特点。

4.**综合检测**:这部分是供学生检查测试对每章的知识理解掌握程度的,题量以一章的单元检测作业量为准度,题目大多数选自国家教委推荐、全国采用较多的西安交通大学、西北工业大学等院校编拟的高等数学试题库,同时注意选编了近几年来考研中出现较多的题型及编者多年来教学积累的典型题目。检测题共分三部分:(一)选择题,(二)检查题,(三)测试题,前两部分为基本检测题,后一部分为水平测试题。整套题,题量适中,难易得当,覆盖面宽,紧密贴切大纲及基本要求,做到了精选适用,有较强的针对性,适宜选做学生的单元

作业及各类考试前的迎考演练，特别是在每套检测中都编拟了足够量的选择题，从而体现出本书的第四个特色。检测题均给出了答案，个别题目给出了解法提示，便于学生检验，检测题在本校的本专科生及考研生中使用时收到了很好的效果。

后两章及附录，是考虑学生们学习的实际需要而编写的，所总结出的高等数学选择题解法和高等数学常用证题法会给学生解答这两类题起到向导的作用，使学生解题有章可循，有路可走。最后附录了 1990 年至 1996 年各年度高等数学硕士研究生的入学考试题，使学生在学习高等数学时就能领略考试的题路，这不但对准备报考研究生的学生们十分必要，就是对一般大学生学习高等数学也是十分有益的。

本书由邹增家负责策划并主持编写工作，参加编写的有邹增家、孙淑珍、赵淑珍、高有、宋代清。初稿写成后经集体审阅讨论后，由邹增家对全书进行了必要的修改和补充，并最后定稿。

吉林省教委积极支持“高等数学网络”的教改课题立项并确定为重点课题加以扶持，从而促使我们坚定信心投入精力，做好该项工作；这是该书今天得以出版的前提。全国高校工科数学课程教学指导委员会委员，吉林工业大学应用数学系主任，著名教授董加礼先生，在百忙中审阅了书稿，积极支持该书的出版并为本书欣然提笔作序。东北电力学院的教务处和成教学院也对该书的出版给予必要的帮助，在此，一并表示我们诚挚的谢意。当第十二个教师节来临之际，仅以此书的出版作为我们献上的一份薄礼。

本书的编写是我们总结高等数学教学改革及课程建设实

践的一种尝试,由于受编者水平及编写时间的限制,书中定有不妥之处,恳请读者批评指正。

编　者

1996年教师节前夕于北国江城

目　录

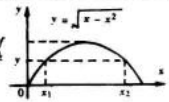
第一章 函数及极限

一、知识网络

（一）函数

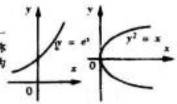
函数概念

对每一个 $x\in D$（定义域）按对应法则 f 有确定的 $y\in W$（值域）与其对应，称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$



函数的单值性与多值性

对每一个 $x\in D$，仅有唯一一个值 $y=f(x)$ 与之对应称 $y=f(x)$ 为单值函数，否则为多值函数



反函数

由 $y=f(x)$ 确定的 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$，如 $y=a^x\to y=f^{-1}(x)=\log_a x$

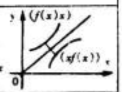
隐函数

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$，如由 $y-x+\varepsilon e^y=0$，确定的 $y=f(x)$

反函数与直接函数之关系

① 设 f 是一一对应函数，则 $f[f^{-1}(x)]=f^{-1}[f(x)]=x\ x\in D_f$

② $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象对称于直线 $y=x$

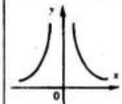
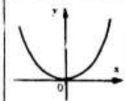
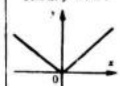
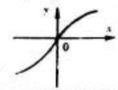
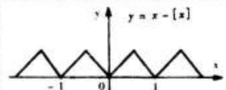


基本初等函数

幂函数 $y=x^{\mu}$
指数函数 $y=a^x$
对数函数 $y=\log_a x$
三角函数 $y=\sin x, y=\cos x,\cdots$
反三角函数 $y=\arcsin x,\cdots$

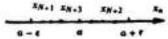
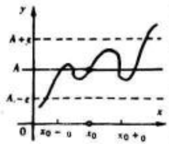
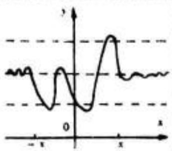
复合函数

$y=f(u), u\in D_{f_1}$
$u=\varphi(x), x\in D_{\varphi}$；
其值域 W_u 当 $W_u\in D_f$ 时，有 $y=f[\varphi(x)]$

函数特性	定　义	举　例
有界性	若存在一个正数 M，对于任一 $x\in X\subseteq D$，都有 $\lvert f(x)\rvert\le M$，则称 $f(x)$ 在 X 内为有界函数，若这样的 M 不存在，就称 $f(x)$ 在 X 内无界	 $g=\frac{1}{\lvert x\rvert}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 上无界，而在 $[1,+\infty)$，$(-\infty,1]$ 上有界
单调性	若对任意的 $x_1,x_2\in I$（区间）$\subset D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的	 $y=x^2$，当 $x\le0$ 时为单调减少，$x\ge0$ 时为单调增加
奇偶性	若对任意的 $x\in D(-x\in D)$，恒有 $f(-x)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为偶函数，其图象对称 y 轴，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，图象对称于原点	偶函数 $y=\lvert x\rvert$  奇函数 $y=\sin x$ 
周期性	若存在常数 $l\ne0$，对于任一 $x\in D(x+l\in D)$ 恒有 $f(x+l)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为周期函数，最小的 $l(>0)$ 称为函数的周期	$y=x-[x]$ 

初等函数的构成	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可用一个分析式子表示的函数称为初等函数，如 $y=\ln(x^2+\sqrt{1+e^x})$	分段函数 $y=\begin{cases}x+1 & x\ge0\\ e^x & x<0\end{cases}$，在 $x\ge0$ 和 $x<0$ 各段上是初等函数，但就整体来看，y 为非初等函数

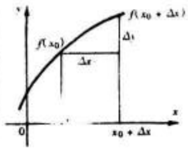
(二) 极限

	定　　义	剖　　析	几何解释
数列极限	若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$(正整数),使得对于 $n > N$ 的一切 x_n 不等式 $\|x_n - a\| < \varepsilon$ 都成立,则称常数 a 为数列$\{x_n\}$的极限,或说$\{x_n\}$收敛于 a.记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n\to\infty)$	ε 是任意给定的,N 是要找出的,它由 ε 的大小来决定,两个不等式的关系是 $\boxed{\|x_n - a\| < \varepsilon}$ 是上式成立的条件　是推 N 的根据 $\boxed{n > N}$	 x_N 后面的所有点 $x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \cdots$,都落在以 a 为中心,ε 为半径的开区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$之内,而不管 x_n 前面的点的位置怎样
函数极限	$x \to x_0$ 时,若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得对于适合 $0 < \|x - x_0\| < \delta$ 的一切 x 都满足不等式 $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$(当 $x \to x_0$)	ε 是任意给定的,δ 是要找出的,它由 ε 的大小来决定,两个不等式的关系是 $\boxed{\|f(x) - A\| < \varepsilon}$ 是上式成立的条件　是找 δ 的根据 $\boxed{0 < \|x - x_0\| < \delta}$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在与 $f(x)$ 在 x_0 点的情况无关	 当 $x(\neq x_0)$ 落在 x_0 的 δ 领域时,曲线 $f(x)$ 被夹在两直线 $y = A \pm \varepsilon$ 之间,而在该领域之外,不管曲线 $f(x)$ 的位置怎样
	$x \to \infty$,若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$ 使得对于适合 $\|x\| > X$ 时的一切 x,都满足不等式 $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$(当 $x \to \infty$)	ε 是任意给定的,X 是要找出的,它由 ε 的大小来决定,两个不等式的关系是 $\boxed{\|f(x) - A\| < \varepsilon}$ 是上式成立的条件　是找 X 的根据 $\boxed{\|x\| > X}$ $x < -X \quad x > X$	 当 $\|x\| > X$ 时曲线 $f(x)$ 夹在两直线 $y = A \pm \varepsilon$ 之间,即不管 $x \in [-X, X]$ 上时曲线 $f(x)$ 的位置怎样

左右极限	若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$(或 $x_0 < x < x_0 + \delta$)时总有 $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ 成立,则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0 - 0$(或 $x \to x_0 + 0$)时的左(右)极限记为 $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A$　或　$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = A$
极限存在的充要条件	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$
无穷大	若对 $\forall M > 0$, $\exists \delta$(或 X) > 0,使得当 $0 < \|x - x_0\| < \delta$(或 $\|x\| > X$)时,总有 $\|f(x)\| > M$,则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大,也就是说,当 $x \to x_0$($x \to \infty$)时,$\|f(x)\|$ 是无限增大的量
无穷小	若对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$(或 X) > 0,使得当 $0 < \|x - x_0\| < \delta$(或 $\|x\| > X$)时,总有 $\|f(x)\| < \varepsilon$ 则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷小,也就是说,当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,$f(x)$ 是 $\to 0$ 的量

无穷小的性质(自变量 x 的变化过程相同)	简例
1. 若 $f(x) \neq 0$ 为无穷小(大),则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大(小) 2. $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$($\alpha$ 为无穷小) 3. 有限个无穷小的和仍是无穷小 4. 有界量与无穷小的积是无穷小 推论:常数与无穷小的积是无穷小,有限个无穷小的积是无穷小 5. 以极限不为零的函数除无穷小得的商仍是无穷小	$x \to 0$ 时,$\mathrm{tg}x \to 0$,而 $\mathrm{ctg}x \to \infty$; $\lim\limits_{x\to 1}(3x - 1) = 2 \Leftrightarrow 3x - 1 = 2 + (3x - 3)$;当 $x \to 0$ 时,有 $x + \sin x \to 0$; $x\sin x \to 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x} = 0$

（三）函数的连续性

连续定义	几何解释
$f(x)$ 在点 x_0 连续有下列三个等价定义 1. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 2. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 3. 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得当 $\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，总有 $\lvert f(x)-f(x_0)\rvert<\varepsilon$ 成立	

左右连续

左连续 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)$

右连续 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x_0+0)=f(x_0)$

连续的充要条件

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处左右都连续

在区间 $[a,b]$ 上连续

是指 $f(x)$ 在 (a,b) 内各点都连续，且在左端点 a 右连续，在右端点 b 左连续，$[a,b]$ 称为连续区间

连续函数的运算性质

1. 连续函数的和差积商（分母不为零）是连续的
2. 连续函数的复合函数是连续的
3. 单值单调的连续函数，其反函数也是单值单调连续的

初等函数的连续性

1. 基本初等函数在定义域内连续
2. 一切初等函数在定义区间内都是连续的

非初等函数的连续性

在每一段上按初等函数考察，在各段连接点考虑其左右连续性，再得出整个函数连续性

间断点定义

有下列三种情况之一，称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续（间断）

1. $f(x)$ 在点 x_0 处无定义； 2. 在点 x_0 处虽有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在； 3. 在点 x_0 处虽有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$。

间断点分类		第一类间断点		第二类间断点	
		可去间断点	跳跃间断点	无穷型	振荡型
分类原则	细分	1. $f(x_0+0)=f(x_0-0)=A\neq f(x_0)$ 2. $f(x_0+0)=f(x_0-0)$，但 $f(x)$ 在 x_0 点无定义	$f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 都存在，但不相等	左、右极限中至少有一个为 ∞	在 x_0 处极限不存在，永远振荡
	概括	左右极限都存在的间断点		非第一类间断点	
举例		(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$，$x=0$ 是可去间断点 (2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$x=1$ 是可去间断点	$f(x)=\begin{cases}x+1 & x>0\\ 0 & x=0,\\ x-1 & x<0\end{cases}$ $x=0$ 是不可去间断点（跳跃间断点）。	$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，$x\to 0^-$ 时 $f(x)\to 0$，$x\to 0^+$ 时，$f(x)\to\infty$，$x=0$ 是无穷间断点	$y=\sin\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}y$ 不存在，在 $x=1$ 之间无限振荡 $x=0$ 是振荡间断点

连续函数的性质	设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值与最小值，推论 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界 2. 对于 $f(a)=A$，$f(b)=B$ 之间的任意数 C 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=c$。 推论：当 $f(a)f(b)<0$ 时，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$ 即方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根 3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

二、答问解疑

问1 确定一个函数的基本要素是什么?

答 函数关系是客观运动过程中两个变量的相互联系及其依从关系。确立一个函数的基本要素有两个:其一是自变量的取值范围,亦函数的定义域,其二是自变量和因变量的对应法则(规律)。因此,只要给定了定义域和对应法则,我们就认为给定了一个函数,如果两个函数的定义域和对应法则都相同,我们就说这两个函数是相同的;否则的话,两个函数是不相同的。如 $f(x) = 1$ 与 $\varphi(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ 是两个相同的函数,而 $y = \lg x^2$ 与 $y = 2\lg x$ 是两个不相同的函数。

问2 任何两个函数都可以复合成复合函数吗?

答 从复合函数的定义可知,在复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 中,y 与 x 的对应关系是由 u 和 x 的对应关系:$u = \varphi(x)$ 与 y 和 u 的对应关系:$y = f(u)$ 衔接而成的,而要使这两个对应关系可以衔接起来,$u = \varphi(x)$ 的值域 W_2 应包含在 $y = f(u)$ 的定义域 D_1 中,即 $W_2 \subset D_1$,如果这个条件不成立,$u = \varphi(x)$ 与 $y = f(u)$ 这个对应关系就无法衔接,因而也就不能构成复合函数。例如,$y = \arcsin u$ 与 $u = x^2 + 2$ 就不能复合成一个复合函数。因为对于 $u = x^2 + 2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于2)都不能使 $y = \arcsin u$ 有意义。

问3 初等函数与非初等函数有何区别?

答 初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,否则就是非初等函数,如 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$,$y =$

x^x（它由 $y = e^u$ 和 $u = x\ln x$ 复合而成）都是初等函数，而迪里赫列函数 $y = \begin{cases} 1 & x\text{ 是有理数} \\ 0 & x\text{ 是无理数} \end{cases}$ 及符号函数 $\operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 都是非初等函数，一般地说，非初等函数通常是分段表达的函数，但不能说分段函数一定不是初等函数，例如 $\varphi(x) = |x|$，通常写成分段函数的形式

$$\varphi(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{当 } x \geqslant 0 \\ -x & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

但也可以写成一个表达式：$\varphi(x) = |x| = \sqrt{x^2}$，因此函数 $\varphi(x) = |x|$ 是初等函数。虽然有些分段函数可以写成一个表达式（所需要的条件和作法这里不详述），而成为初等函数，但把它写成一个表达式时反而会增加麻烦。因此，对于分段函数，除特殊需要外，没有必要去鉴别它是不是初等函数，而把它当作非初等函数对待。

问 4　数列极限的精确（分析）定义很抽象，理解起来颇感困难，请对这个定义做些详细的解释。

答　我们把数列 x_n 看作数轴上的一个动点，它在变动过程中，当过程进行充分长久，即当 n 无限增大时（$n \to \infty$ 时），动点 x_n 能与数轴上的一个确定的点 $x = a$ 无限接近这种变化趋势，就是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的直观的几何的变化性态描述，而将这种变化性态的描述作定量的、精确的分析就得到数列极限的精确（分析）定义。定义中提到两个正数：ε、N（正整数）；和两个不等式：$n > N$，$|x_n - a| < \varepsilon$。正数 ε 用来刻划数列（点列）x_n 与确定的常数（定点）a 接近的程度。它必须是任意给定