Sze-Tsen Hu 著

近世代数初步

蒲义书 蔡秉衡 岳振才
刘献祥 王兆林 白永成 合译

汉 中 师 范 学 院

近世代数初步

Sze—Tsen Hu 著

蒲义书 蔡秉衡 岳振才 刘献祥 王兆林 白永成 合译

汉中师范学院

中译本序言

代数是现代数学的三大重要基础之一，也是离散性数学的主要组成部分，它是研究各种具有代数运算系统的结构和性质的科学。代数有着悠久的历史，一百多年来特别是本世纪又有了很大的发展，它的思想和方法不但渗透到数学的许多领域，而且不少其他科学也都有一种尽可能把问题用代数语言来表达，以至于用代数方法来解决问题的倾向。高速电子计算机的出现，使得连续性的计算可以离散化，从而使得代数运算变得更为重要。因此，代数的发展有着重要意义的。

胡世桢先生的书，是近世代数的一个基础，内容丰富，除了包括国内传统近世代数教本所教部分材料外，还较多地讨论了阿贝尔群、模以及代数，突出了同构映射和图的分解理论，对范畴和函子也作了一定的介绍，在写法上简明扼要，条理清楚，例子典型，配有练习，这些对一个初学者来说都是有利的。

鉴于胡先生著作有如此不少特点，蒲义书等同志利用工作之余对这本书进行了翻译。他们忠于原著，严谨认真，译文清楚，文笔通顺。因此译本对大专师生特别是对学习代数拓扑或同调代数的同志来说，是学习代数的一本比较合适的参考书。

雷天德　1983年10月

序　言

抽象代数学现在已经包含在绝大多数大学的课程中，成为数学训练的一个必不可少的部分。本书是为高年级大学生及第一年研究生作为一学期或四分之二学期的该学科课程的课本而设计的。目的在于用一较好的方式，就这一学科的基础知识作一系统的阐述，使之在完成两年或三年的大学数学学习后，能达到研究生所需要的最低数学水平。学习该书，除实数运算外，不再需要专门的数学知识。

第一至四章可用作四分之一学期的课程，或者对群的理论作一些补充的话，也可作为一学期的课程。其中重点应是阿贝尔群而不是有限置换群。除群论的标准理论外，我们还讲述了正合序列、下同调群、张量积和同态群的基本理论。

第五章给出了环、整区和域等方面知识的叙述。第六章介绍了模和代数的基本理论，从而引导到给定模的张量代数、外代数和对称代数的结构。最后一章我们还介绍了在数学的许多分支中均有应用的范畴和函子的一些新概念。

由于教学的原因，抽象代数中比较一般的题目，特别是线性代数和Galois理论被慎重的略去了。线性代数被略去，是由于现在它或者作为一门独立课程，或者作为两年计算专业课程的一部分。而Galois理论的略去，是因为作者考虑到它的深度，应属于一年的最后四分之一学期的课程，而不是前两学期。

通常情况下，某些内容的重复是不可避免的。相反，我

们可用某种尽可能统一的形式去表示不同的对象，以代替许多阐述。譬如，我们藉助于泛代数的交换三角形的概念，去代替了自由半群、自由群、自由阿贝尔群、自由模、张量积、张量代数、外代数和对称代数的定义。基本内容，譬如基本概念和基本结构的重复，可增强学生的信心，便于熟练掌握。

在每一节的末尾，我们仔细精选了习题。这既是为了使学习好的学生有充分可能去参与进一步理论的探讨，也是为了使其余的学生对课文中的内容能够有进一步的了解。

书末列出了较多的文献目录，并在一些例子和习题中也列出了各种各样水平的参考书目。课文中引证于文献目录的少许参考书的名称和数码圈在括号中。对于形如(Ⅳ，5.1)的记号，Ⅳ意味着第Ⅳ章而5.1为该章中陈述的节号。

书中惯用的专门记号和缩写式，在目录之后直接给出。课文中采用了一些来自标准集论而与一般数学书中不同的记号，即用□表示空集，用A\B表示差集A－B。记号||表示一个证明的结束，而缩写iff为短语“当且仅当”。

作者十分感激空军科学研究所（Air Force Office of Scientific Research）给予的极大支持和帮助。此书是根据作者1957年以来的各种讲演笔记整理的。最后，作者对发行者和印刷工人所给予的优待与合作致以感谢。

洛杉矶加利福尼亚大学。

胡世桢

专用记号和缩写式

$\Rightarrow$	推出
$\Leftarrow$	被推出
$\|\|$	证明的结束
iff	当且仅当
$\{\mid\}$	这样的集
$\in$	…的一个元素
$\notin$	不是…的一个元素
$\square$	空集
$\subset$	被包含在…中
$\supset$	包含
$\cup$	并
$\cap$	交
$\setminus$	差集
$\mathbf{I}$	闭单位区间
$C_X(A)$	A关于X的补
$f:X\rightarrow Y$	从X到Y的函数f
$f(A)$	集A在f下的象
$f^{-1}(B)$	集B的逆象
$f\circ g$	f与g的合成

$f\mid A$	f在A上的限制
$a\mathscr{R}b$	$a\mathscr{R}$相关于b
$a\sim b$	a等价于b
$X/\sim$	X关于$\sim$的商集
$X\approx Y$	X同构于Y
X/A	商群，即X关于A的商群
$A\oplus B$	A与B的直接和
$A\otimes B$	A与B的张量积
$A\otimes_R B$	R上的张量积
$E_R(M)$	R上M的外代数
$S_R(M)$	R上M的对称代数
$T_R(M)$	R上M的张量代数
Coim	余象
Coker	余核
deg	次数
dim	维数
Hom	同态群
Im	象
Ker	核

目　　录

第Ⅰ章：集，函数和关系

在本书的这个序论章，我们将对集、函数和关系以及后面要用到的一些基本概念，给予一个初等的描述。为了免除读者不必要的努力，这个题目的论述将限制在最低水平和最小范围，特别地我们将不讨论选择公理及其等价的各种形式。事实上，这个公理在本书中，仅使用在选择无限个数的素朴形式。

§1. 集

我们采用素朴观点介绍初等集论。直观地说，一个集是用列举或用某些公有特性所确定的对象的总体。这不是定义，因为“总体”不过是集的同义语。在论文中，有时也常使用“总体”、“族”等等同义语。下面所述的集的例子对于理解这个非定义的术语的直觉意义是有帮助的。

(a) 美国数学学会的所有成员的集AMS。

(b) 美国的数学协会的所有成员的集MAA。

(c) 所有的自然数亦即正整数的集N。

(d) 所有整数（正、0、负）的集Z。

(e) 所有的实数的集R。

后面三个例子中给定的特殊集的记号将在本书始终使

用。

集X中的对象将称为X的**成员**，**元素或点**。这些可以是具体的事物，也可以是对象的概念。我们用符号“$\in$”表示术语“……的成员”，于是记号

$$x \in X$$

读作“x是X的成员”或等价地说“x属于X”。$x \in X$的否定表示为

$$x \notin X.$$

一个集由它的元素所确定。换言之一个集合是确定的，当且仅当对于任意给定的对象x，能够明确地知道，x属于或不属于X，一个集合X的成员常常由所具有的某些公共属性所确定。比如，假若$p(x)$表示关于对象x的给定的命题，我们写为

$$X = \{x \mid p(x)\}.$$

集X是使得命题$p(x)$成立的所有对象的集。

一个集合称为**空的**，当且仅当它没有成员。空集将用符号“$\varnothing$”表示[1)]，于是$X = \varnothing$读作X是空的。

一个集X称为**单元集**，当且仅当有一个成员。假若单元集的成员为x，那么我们表示为

$$X = \{x\}.$$

从逻辑上说，必须将对象x与集$\{x\}$区分开来。然而为了记号的方便，我们时常用同一符号去表示对象x和单元集$\{x\}$。

更一般地说，假若x_1，$x_2, \cdots, x_n$是n个给定的对象，那么

$$X = \{x_1,\ x_2, \cdots, x_n\}$$

理解为集合X是由x_1，x_2，$\cdots$，x_n作为成员所组成。

1）原著空集符号为□——译者注。

设A和B表示两个给定的集，假若A的每一成员都属于B，那么我们说A**被包含在**B**中**或等价地说，B**包含**A，用符号

$$A \subset B, \quad B \supset A,$$

表示。这里的符号$\subset$称为**包含**。在这时，A称为是B的**子集**，在上面给定的例（c）——（e）中的集之间，我们有

$$N \subset Z \subset R.$$

假若$A \subset B$且$B \subset A$，那么我们便说A与B相等，用符号

$$A = B$$

表示。换句话说，两个集相等，当且仅当它们有相同的成员。若$A \subset B$且$A \neq B$，那么我们说A是B的**真子集**。

一个给定的集X的子集，常被置于X的成员之上的更进一步的条件所确定。比如设$p(x)$表示关于X的成员x的一个给定的命题，那么

$$\{x \in X \mid p(x)\}$$

理解为X的一个子集。它由X中使得$p(x)$成立的所有成员x所组成。利用这个办法我们可用下面的形式定义实数集的**闭单位区间**I，即

$$I = \{t \in R \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

有许多办法可以原有的旧集造出新的集来。下面的三种运算是最基本的。**并**$A \cup B$定义为至少属于A与B中的一个的所有成员所组成的集。**交**$A \cap B$定义为既属于A又属于B的所有成员组成的集。**差**$A \setminus B$定义为属于A但不属于B的所有成员的集。这些定义可由下面的等式所确定：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\},$$

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{但}x\notin B\}.$$

定理1.1. 对于任意的集A，B，C及X，下面的规律是正确的：

(1.1.1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，

$$A\cap B=B\cap A.$$

(1.1.2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(1.1.3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$$A\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cup C).$$

(1.14) $De\cdot Morgan$公式：

$$X\setminus(A\cup B)=(X\setminus A)\cap(X\setminus B),$$

$$X\setminus(A\cap B)=(X\setminus A)\cup(X\setminus B).$$

这些公式的证明是简单的，因此留作练习。作为例子，我们证明$De\cdot Morgan$等式的最后一个如下。

集合等式的证明，通常分为两部分。

(i) **包含**$X\setminus(A\cap B)\subset(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$**的证明**：

设x是$X\setminus(A\cap B)$任一成员，于是由差的定义，我们有$x\in X$但$x\notin A\cap B$，后者说明$x\notin A$或$x\notin B$。因$x\in X$，$x\notin A$可以推出$x\in X\setminus A$，而且由$x\in X$，$x\notin B$可以推出$x\in X\setminus B$，因此有$x\in X\setminus A$或$x\in X\setminus B$。即，x必是集$(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$的成员。||

(ii) **含包**$(X\setminus A)\cup(X\setminus B)\subset X\setminus(A\cap B)$ **的证明**：

设x是$(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$的任意成员，那么$x\in X\setminus A$或$x\in X\setminus B$。假若$x\in X\setminus A$，那么$x\in X$但$x\notin A$。因为$x\notin A$意味着$x\notin A\cap B$，从而推出$x$在$X\setminus(A\cap B)$之中。类似的证明可以推出若$x\in X\setminus B$，也有$x$在$X\setminus(A\cap B)$之中。||

两集A同B称为**不相交的**，当且仅当$A\cap B=\varnothing$，否则称为**重叠的**。

集的并和交的概念可以推广到任意数目的集合族上。

假若Φ是一集合系，那么

$$\bigcup_{X\in\Phi} X=\{x\mid x\in X \text{ 对于某个} X\in\Phi\},$$

$$\bigcap_{X\in\Phi} X=\{x\mid x\in X \text{ 对于每一个} X\in\Phi\}.$$

可以证明，定理1.1中的规律，对于任意数目的集族也成立。

若A是X的子集，那么差$X\setminus A$称为A关于X的**补**，用符号[1]，

$$\mathscr{C}_X A=X\setminus A$$

表示。假若A也是另一集Y的子集，那么$\mathscr{C}_X A$同$\mathscr{C}_Y A$是不同的集。假若在某一确定的过程中，仅考虑一固定集X的子集时，那么将用$\mathscr{C}A$代替$\mathscr{C}_X A$。

练习

1.A．证明定理1.1（除De·Morgan公式）

1B．对于任意的集A和B，检验下面的关系：

(a) $\varnothing\subset A$

(b) $A\subset A$

(c) $A\cup\varnothing=A$

(d) $A\cap\varnothing=\varnothing$

(e) $A\cap A=A=A\cup A$

(f) $A\cap B\subset A\subset A\cup B$.

1）由于印刷条件的限制，原著中德文花体字母不得不改为拉丁字母草体，以后同。——译者注。

1C. 对于任意的集A，B，C建立下面的命题：

(a) 若$A\subset B$且$B\subset C$，那么$A\subset C$。

(b) 若$A\subset C$且$B\subset C$，那么$A\cup B\subset C$。

(c) 若$A\supset C$且$B\supset C$，那么$A\cap B\supset C$。

1D. 证明对任意的集A和B，下面的三个命题是等价的：

(a) $A\subset B$,

(b) $A\cup B=B$,

(c) $A\cap B=A$。

1E. 证明下面的一固定集X的子集的命题：

(a) $\mathscr{C}X=\varnothing$,

(b) $\mathscr{C}\varnothing=X$,

(c) $A\cup\mathscr{C}A=X$,

(d) $A\cap\mathscr{C}A=\varnothing$,

(e) $\mathscr{C}\mathscr{C}A=A$,

(f) $\mathscr{C}(A\cup B)=\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B$,

(q) $\mathscr{C}(A\cap B)=\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}B$,

(h) $\mathscr{C}(A\backslash B)=B\cup\mathscr{C}A$。

(i) 若$A\cup B=X$且$A\cap B=\varnothing$，那么$B=\mathscr{C}A$。

(j) 若$A\subset B$，那么$\mathscr{C}B\subset\mathscr{C}A$。

1F. 证明对于任意的集A，B，C，下面的命题等价：

(a) $A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$,

(b) $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$,

(c) $(A\backslash B)\cup(A\backslash C)=A\backslash(B\cap C)$,

(d) $(A\backslash C)\cup(B\backslash C)=(A\cup B)\backslash C$,

(e) $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$,

(f) $A\cup(B\backslash A)=A\cup B$,

(g) $A\cap(B\backslash A)=\varnothing$.

§2. 函　数

设X同Y是给定的集，一个由X到Y的函数$f:X\longrightarrow Y$是一个法则，指定X的每一个成员x对应Y中唯一的一个成员$f(x)$.

例1.考虑所有自然数的集合N及其比某个给定的正整数p小的所有非负整数集Z_p，对于任意的$x\in N$，让x被p除所得的余数为$f(x)$. 数$f(x)$在Z_p之中，指定$x\longrightarrow f(x)$定义一函数$f:N\longrightarrow Z_p$.

例2.考虑$y=x^2$对每一实数$x\in R$，$y=x^2$也是一实数，因此指定$x\longrightarrow x^2$定义一R到自身的函数$f:R\to R$. 这个函数常常被表示作x^2，因而$x^2:R\to R$.

设$f:X\to Y$是一给定的函数，集X称为函数f的**定义域**，Y称为f的**值域**。对于定义域X中的每一点x，在f之下x所指定的Y的元素$f(x)$称为x在f下的**象**。有时$f(x)$称为函数f在点x上的**值**。

对于X的任意子集A，由所有$x\in A$的$f(x)$所组成的Y的子集称为A在f下的**象**，并表示为$f(A)$，符号

$$f(A)=\{f(x)\in Y\mid x\in A\}.$$

特别地，整个定义域X在f下的象称为f的**象**，并表示为$Im(f)$.

定理2.1. 对于函数$f:X\to Y$的定义域X的任意两个子集A与B我们有

(2.1.1)　　$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

(2.1.2) $$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B).$$

(2.1.1) 和 (2.1.2) 的证明留给读者作为练习。也能够容易推广这个公式到定义域X的任意个数的子集上去。

下列的例子说明，包含式 (2.1.2) 在下面的情形不能常等。令

$X=\{a,\ b\}$，$A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$Y=\{y\}$

而且令$f:X\to Y$表示唯一的函数，那么我们有

$$f(A\cap B)=f(\varnothing)=\varnothing,$$

$$f(A)\cap f(B)=Y.$$

假若$f(X)=Y$，那么我们就说$f:X\to Y$是一个从X到Y上的函数；时常也说$f:X\to Y$是**满射**。因此，$f:X\to Y$是满射，当且仅当对于Y中的每一点y在X中至少存在一点x使得$f(x)=y$。例 1 中的函数是满射，例 2 中的函数不是。

假若$f(X)$仅由Y的点y组成，那么我们说$f:X\to Y$是X到Y内的**常函数**；假若X是非空的，那么对于每一$y\in Y$存在唯一的常数$f_y:X\to Y$得$f_y(X)=y$。

对于Y的任意子集B，X中使得$f(x)\in B$的所有x组成的集称为B在$f:X\to Y$之下的**逆象**，而且我们表示为$f^{-1}(B)$，即

$$f^{-1}(B)=\{x\in X\,|\,f(x)\in B\}.$$

特别地，若B是单元集，即$B=\{y\}$，那么$f^{-1}(B)$称为点y在f之下的**逆象**，记为$f^{-1}(y)$。于是点$y\in Y$，属于函数f的象$f(X)$，当且仅当$f^{-1}(y)$是非空的。

定理2.2. 对于函数$f:X\to Y$的值域Y的任意两个子集A同B，我们有