根据教育部最新奥林匹克竞赛大纲编写

奥赛兵法

高中数学

唐立华◎主编

A 金牌

SAIBINGFA

文汇出版社

北京师范大学出版社

根据教育部最新奥林匹克竞赛大纲编写

奥赛兵法

高中数学

唐立华◎主编

A 金牌

SAIBINGFA

文匯出版社
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金牌奥赛兵法·高中数学/唐立华主编．—上海：文汇出版社,2002.9

ISBN 7-80676-226-4

I.金... II.唐... III.数学课-高中-教学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 051971 号

金牌奥赛兵法·高中数学

主　　编/唐立华
责任编辑/蓓　文
封面装帧/缪　惟

出版发行/文匯出版社
　　　　(上海市虎丘路 50 号　邮政编码 200002)
　　　　北京师范大学出版社
　　　　(北京市新街口外大街 19 号　邮政编码 100875)
经　　销/全国新华书店
印刷装订/江苏昆山亭林印刷总厂
版　　次/2002 年 9 月第 1 版
印　　次/2002 年 9 月第 1 次印刷
开　　本/850×1168　1/32
字　　数/480 千
印　　张/19
印　　数/1—10 000

ISBN 7-80676-226-4/G·107
定　　价/23.00 元

前 言

国际数学奥林匹克(IMO)是五个国际学科竞赛中历史最悠久、规模和影响最大的中学生学科竞赛活动,这项竞赛为各国表现本民族的聪明才智提供了合适的舞台,因而受到越来越多的国家的重视。我国自1986年正式组队参加IMO以来,已取得了令世人瞩目的优异成绩,这表明我国已跻身于IMO强国之列,充分显示出了我国中学生的数学才智和我国数学教育的水平。

中学数学竞赛的根本目的,就在于激发学生对数学的学习兴趣,培养他们的数学思维能力和创新能力,提高学生的数学素质,以适应新世纪发展的需要。

在中学开展数学竞赛活动已成为中学数学教育的一个重要组成部分。《金牌奥赛兵法·高中数学》一书就是为中学开展数学第二课堂,提高学生高考和竞赛成绩而编写的教程。全书以我国现行的高中数学竞赛大纲为依据,结合自己长期在教学和竞赛培训工作第一线积累的经验,将竞赛内容按专题讲座的形式编写。每讲分本讲导言、"考纲"能力要求、奥赛大对策、奥赛大解密和奥赛大练兵五个部分,并在书后附有参考答案或简要提示,以便教学或自学之用。

本书的编写具有以下两个特点:

1. 低起点,高目标。每讲内容以高考中、高档题和联赛一试试题为起点,逐步过渡到联赛二试、CMO、集训队和IMO级水平的赛题,由易到难,"浅"入"深"出,注意基础与提高相结合,以适应不同层次的读者学习的需要。

2. 内容全,选材新。书中的例题、习题来自国内外高考和各级数学竞赛,也有部分选自论文或自己改编、亲拟的新题。它们覆盖了竞赛中所需的绝大多数内容,以期让读者对竞赛内容的进展轨迹和发展趋势有一个较全面的认识。选题时不仅注重基础性、典型性,更注重灵活性、新颖性;即使是典型问题,也尽量给出独到的或新的解法,让读者领悟其中包含的数学思想方法和解题技巧,体验创新的无穷魅力。对例题的解析,重在启迪思维、点拨方法,以培养学生科学的思维方法和创造性思维能力。

限于水平及时间,书中错误难免。恳请专家、读者不吝指正,以便有机会再版时修改。

最后,非常感谢湖南师大数学系张垚教授、上海大学冷岗松教授,正是他们对本人工作的关心和支持,才有我现在的成功;还要感谢我正在北京大学数学系学习的两位学生——刘志鹏和欧阳智,书中的许多内容是我和他们共同劳动的成果。

唐立华

2002年8月

目　　录

前言…………………………………………………………………………(1)
第一讲　集合…………………………………………………………………(1)
第二讲　函数…………………………………………………………………(13)
第三讲　三角函数(Ⅰ)……………………………………………………(32)
第四讲　三角函数(Ⅱ)……………………………………………………(51)
第五讲　函数迭代与函数方程……………………………………………(74)
第六讲　数学归纳法………………………………………………………(90)
第七讲　数列(Ⅰ)…………………………………………………………(101)
第八讲　数列(Ⅱ)…………………………………………………………(113)
第九讲　不等式的证明(Ⅰ)………………………………………………(128)
第十讲　不等式的证明(Ⅱ)………………………………………………(150)
第十一讲　几何不等式……………………………………………………(173)
第十二讲　复数……………………………………………………………(194)
第十三讲　多项式(Ⅰ)……………………………………………………(210)
第十四讲　多项式(Ⅱ)……………………………………………………(223)
第十五讲　立体几何(Ⅰ)…………………………………………………(238)
第十六讲　立体几何(Ⅱ)…………………………………………………(257)
第十七讲　四面体和球……………………………………………………(278)
第十八讲　平面解析几何(Ⅰ)……………………………………………(296)
第十九讲　平面解析几何(Ⅱ)……………………………………………(308)
第二十讲　平面几何(Ⅰ)…………………………………………………(318)

第二十一讲　平面几何(Ⅱ)……………………………………………………(329)
第二十二讲　平面几何(Ⅲ)……………………………………………………(339)
第二十三讲　整除…………………………………………………………………(352)
第二十四讲　同余(Ⅰ)……………………………………………………………(363)
第二十五讲　同余(Ⅱ)……………………………………………………………(378)
第二十六讲　不定方程……………………………………………………………(387)
第二十七讲　组合计数(Ⅰ)……………………………………………………(400)
第二十八讲　组合计数(Ⅱ)……………………………………………………(413)
第二十九讲　抽屉原理……………………………………………………………(426)
第三十讲　　染色问题……………………………………………………………(437)
第三十一讲　组合最值……………………………………………………………(449)
参考答案……………………………………………………………………………(468)
附录
二〇〇〇年全国高中数学联合竞赛试题及参考答案 ………(574)
二〇〇〇年全国高中数学联合竞赛加试试题及参考答案 …(580)
二〇〇一年全国高中数学联合竞赛试题及参考答案 ………(583)
二〇〇一年全国高中数学联合竞赛加试试题及参考答案 …(589)
第 41 届国际数学奥林匹克试题及参考答案…………………(592)
第 42 届国际数学奥林匹克试题及参考答案 …………………(597)

第一讲 集　合

本讲导言

集合对于我们并不陌生.如全体中学生构成的集合、全体教师构成的集合、全体数学家构成的集合.在19世纪德国数学家的群体中有一个光辉的名字——康托(G.Cantor,1845—1918年),是他首创了集合理论.至今,集合的理论和方法已渗透到了数学的各个领域,成为数学这座金字塔的一块最重要的基石之一.

在这里,我们并不关心系统的集合理论,而是只在意那些在数学竞赛中时常出现的集合问题,有些问题属于组合内容或其他内容,但作为一种准备,我们将一并作些简单的介绍.

“考纲”能力要求

掌握集合、子集、交集、并集、补集和差集的概念;了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,并能运用集合的有关概念和性质解题.掌握映射的有关概念及应用.

奥赛大对策

1. 集合的概念

(1)集合是一个原始概念,它表示某些指定对象的全体,其中的对象称为集合

的元素.集合中的元素具有确定性、互异性和无序性三大特征.(2)元素与集合的关系用$\in$,$\notin$表示;集合与集合的关系用$\subseteq$,$\subset$,$=$,$\not\subseteq$,$\not\subset$表示;空集用$\varnothing$表示;全集用I表示,用$|A|$表示有限集A的元素个数.(3)集合$A=\{x\mid x$具有性质$P\}$,要判定a是否为A的元素,等价于判定a是否具有性质P.

2. 集合的性质

(1)$A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x\in A$,有$x\in B$.

①$A\subseteq A,\varnothing\subseteq A$;②$A\subseteq B,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

(2)$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B$且$\exists x\in B$,但$x\notin A$.若$A\neq\varnothing$,则$\varnothing\subset A$.

(3)$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$且$A\supseteq B$.$A\subseteq B\Leftrightarrow A=B$或$A\subset B$.

(4)$A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$.

(5)$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$.

(6)$\overline{A}=\{x\mid x\in I$且$x\notin A\}$;$\overline{A}\cup B=I\Leftrightarrow A\subseteq B$.

(7)$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cap I=A,A\cap\overline{A}=\varnothing$.

(8)$A\cup A=A,A\cup\varnothing=A,A\cup I=I,A\cup\overline{A}=I$.

(9)$A\cap B=B\cap A,A\cup B=B\cup A$.

(10)$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

(11)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(12)$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

3. 差集

定义1. 设A、B是两个集合,由所有属于A而不属于B的元素组成的集合称为A对B的差集,记作$A\setminus B$(或$A-B$),即

$A\setminus B=\{x\mid x\in A$,且$x\notin B\}$.

由差集的定义易证如下的D.Morgan公式:

$A\setminus B(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$,

$A\setminus B(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

4. 集合的分划

定义2. 把一个集合M分成若干个不同的非空子集$A_1,A_2,\cdots,A_n$.如果

(1)$A_i\cap A_j=\varnothing$; (2)$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=M$.

则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$为M的一个n—分划,特别地,如果$A_1,A_2,\cdots,A_n$仅满足条件

(2),则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 M 的一个覆盖.

5. 子集族

定义 3. 以集合 X 的子集为元素的集合称为 X 的子集族,特别地,以 X 的一切子集作为元素的集合称为 X 的幂集合,记为 $P(X)$,即

$P(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$.

若记 X 的元素个数为 $|X|$,$|X|$为有限数,则 $|P(X)|=2^{|X|}$.

6. 映射

定义 4. 设 A,B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,那么这样的对应叫做集合 A 到集合 B 的映射,记作

$f:A\to B$.

若 $a\in A,b\in B$,且 $f(a)=b$,则 b 称为元素 a 在 B 中的象,a 称为元素 b 在 A 中的原象.

定义 5. 如果在映射 $f:A\to B$ 下,集合 B 中每一个元素在集合 A 中都至少有一个原象,那么称映射 $f:A\to B$ 则为 A 到 B 上的满射.

对于满射 $f:A\to B$,若 A,B 为有限集,则

$|A|\geqslant|B|$.

定义 6. 如果在映射 $f:A\to B$ 下,集合 A 中不同的元素在 B 中有不同的象,那么称映射 $f:A\to B$ 为 A 到 B 的单射.

对于单射 $f:A\to B$,若 A,B 为有限集,则

$|A|\leqslant|B|$.

定义 7. 如果映射 $f:A\to B$ 同时是 A 到 B 的满射和单射,那么称映射 $f:A\to B$ 为 A 到 B 上的双射(即一一映射).

配对原理:如果有限集 A 到有限集 B 存在一个双射,那么

$|A|=|B|$.

7. 竞赛导引

确定元素与集合的关系、集合与集合的关系,确定元素或集合的性质,集合的运算及性质的应用,映射与配对方法的应用,是高中联赛一试中常考的内容.集合的分划,子集族,利用映射方法来证明组合问题则是联赛二试、冬令营、集训队或 *IMO* 考试中的热点问题.

奥赛大解密

【例 1】 设集合 $M=\{x\mid -3<x<2\}$，已知正整数 x,y 满足 $x>y$，$x^3+19y=y^3+19x$，判断 $a=\log_{\frac{1}{2}}(x+y)$ 与集合 M 的关系．

解 由已知 $x^3-y^3=19(x-y)$，又 $x>y$，$x,y\in N$，

所以 $x^2+x<x^2+xy+y^2=19<3x^2$．

由上式及 $x\in N$ 知 $x=3$，从而 $y=2$．故

$a=\log_{\frac{1}{2}}(x+y)=\log_{\frac{1}{2}}(3+2)\in(-3,2)$，

即 $\quad \in M$．

【例 2】 设 $M=\{a\mid a=x^2-y^2,x,y\in Z\}$，求证：

(1)一切奇数属于 M；(2)$4k-2(k\in Z)$不属于 M；(3)M 中任意两个数的积仍属于 M．

证明 (1)设 $a=2k-1$，则 $a=2k-1=k^2-(k-1)^2$，其中 $k,k-1\in Z$．故 $a\in M$，即一切奇数属于 M．

(2)利用反证法，假设 $4k-2\in M(k\in Z)$，则存在 $x,y\in Z$ 使得

$4k-2=x^2-y^2$，即 $2(2k-1)=(x+y)(x-y)$．

由上式知 $x+y$ 与 $x-y$ 中必有一个为偶数，另一个为奇数，但 $x+y$ 与 $x-y$ 同奇数，矛盾．故 $4k-2\notin M$．

(3)设 $a=x_1^2-y_1^2$，$b=x_2^2-y_2^2(x_1,x_2,y_1,y_2\in Z)$．

$$
\begin{aligned}
\text{则 } ab&=(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)\\
&=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-(x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2)\\
&=(x_1x_2-y_1y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2.
\end{aligned}
$$

注意到 $x_1x_2-y_1y_2\in Z$，$x_1y_2-x_2y_1\in Z$，所以 $ab\in M$．

【例 3】 (1975 年奥地利竞赛试题)设 S 为满足下列条件的有理数集合：①若 $a\in S$，$b\in S$，则 $a+b\in S$，$ab\in S$；②对任一个有理数 r，3 个关系 $r\in S$，$-r\in S$，$r=0$有且仅有一个成立．证明：S 是由全体正有理数组成的集合．

导析 由②知，若能证得 $Q^+\subseteq S$，则 S 中必不含 0 与负有理数，从而 $S\subseteq Q^+$．因此本题只需证明 $Q^+\subseteq S$ 即可．

证明 对任意的 $r\in Q$，$r\neq 0$，由②知 $r\in S$ 或 $-r\in S$ 之一成立．再由①，若 r

$\in S$,则 $r^2\in S$;若 $-r\in S$,则 $r^2=(-r)(-r)\in S$.总之,对 $r\neq 0.r\in Q$,有 $r^2\in S$.
(*)

令 $r=1$,则 $1=1^2\in S,2=1+1\in S,3=2+1\in S,\cdots$.
可知全体正整数 $n\in S$.

任取 $r\in Q^+$,设 $r=\dfrac{p}{q},(p,q)=1$ 且 $p,q\in N$,

由①及上面的讨论知,$p,q\in S$,从而

$$pq\in S,\quad \frac{1}{q^2}\in S.$$

故 $r=\dfrac{p}{q}=pq\cdot\left(\dfrac{1}{q^2}\right)\in S$.这表明 $Q^+\subseteq S$.

再由②知,0 及全体负有理数不属于 S,即 $S\subseteq Q^+$,从而 $S=Q^+$.

【例 4】 (1990 年上海高考试题)关于实数 x 的不等式

$\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$(其中 $a\in R$)

的解集依次记为 A 与 B.求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

导析 先化简 A 与 B,再分类讨论或利用实根分布整体处理.

解一 $\because A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$,

$B=\{x\mid (x-2)(x-1-3a)\leqslant 0\}$.

(1)当 $3a+1\geqslant 2$,即 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$时,有

$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$,由 $A\subseteq B$ 得

$\begin{cases}2\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 3a+1,\end{cases}\quad\therefore 1\leqslant a\leqslant 3.$

(2)当 $3a+1<2$,即 $a<\dfrac{1}{3}$时,有

$B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$,由 $A\subseteq B$ 得

$\begin{cases}3a+1\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 2,\end{cases}\quad\therefore a=-1.$

$\therefore$使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围是

$\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$.

解二 $\because A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$,

$B=\{x \mid (x-2)(x-1-3a)\leqslant 0\}$.

记 $f(x)=(x-2)(x-1-3a)$,则 $A\subseteq B$ 成立等价于 $f(x)=0$ 的两实根 $x_1=2$ 与 $x_2=3a+1$ 位于区间 $[2a, a^2+1]$ 之外,即

$$\begin{cases} f(2a)=(2a-2)(2a-1-3a)\leqslant 0 \\ f(a^2+1)=(a^2+1-2)(a^2+1-1-3a)\leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\leqslant -1 \text{ 或 } a\geqslant 1 \\ -1\leqslant a\leqslant 0 \text{ 或 } 1\leqslant a\leqslant 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1$.

$\therefore$ 所求 a 的取值范围为 $\{a \mid 1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$.

【例 5】 设集合 A、B、X 满足:$A\cap X=B\cap X=A\cap B$,$A\cup B\cup X=A\cup B$.若 A、B 为已知集合,试求集合 X.

导析 由题设条件可知 $X\subseteq A\cup B$,$X\supseteq A\cap B$.猜想 $X=A\cap B$.关键在于证明 $X\subseteq A\cap B$ 或利用集合运算的性质直接来求 X.

解一 $\because A\cap X=B\cap X=A\cap B$,

$\therefore X\supseteq A\cap B$.

又 $\because A\cup B\cup X=A\cup B$, $\therefore X\subseteq A\cup B$.

下面证明 $X\subseteq A\cap B$,事实上,任取 $a\in X$,有 $a\in A\cup B$,即 $a\in A$ 或 $a\in B$.而 $a\in X$,故 $a\in A\cap X$ 或 $a\in B\cap X$.

由已知 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$,从而有 $a\in A\cap B$,所以 $X\subseteq A\cap B$.故 $X=A\cap B$.

解二 由题设有

$X\supseteq A\cap B$,$X\subseteq A\cup B$.

$\because A\cap X=B\cap X=A\cap B$,

$$\therefore X=X\cap(A\cup B)=(A\cap X)\cup(B\cap X)=(A\cap B)\cup(A\cap B)=A\cap B.$$

评注 前一种解法从常规入手,思路自然流畅;后一种解法则注重整体处理,揭示本质特征.

【例 6】 设函数 $f(x)=x^2+ax+b\cos x\ (a,b\in R)$,集合 $A=\{x \mid f(x)=0, x\in R\}$,$B=\{x \mid f(f(x))=0, x\in R\}$.若 $A=B\neq\varnothing$,试求所有的实数对 (a,b).

导析 由 $f(x)=0$ 可得 $f(f(x))=0$,由此定出 $b=0$ 再进行讨论即可.

解 设 $x_0\in A$,即 $f(x_0)=0$,则由题设得

$f(f(x_0))=0, 0=[f(x_0)]^2+af(x_0)+b\cos f(x_0)=b$，故 $b=0$.

所以 $f(x)=x^2+ax=x(x+a)=0$ 的解集为 $\{0,-a\}$，

$$f(f(x))=f^2(x)+af(x)=f(x)(f(x)+a)$$
$$=x(x+a)(x^2+ax+a).$$

要 $f(f(x))=0$ 的解集仍为 $\{0,-a\}$，当 $a\neq 0$ 时，当且仅当 $x^2+ax+a=0$ 无实根，即 $\Delta=a^2-4a<0$，解得 $0<a<4$. 而当 $a=0$ 时亦满足条件. 故所求的实数对 (a,b) 的集合为 $\{(a,b)|0\leqslant a<4, b=0\}$.

【例 7】 (1986 年安徽省集训试题) S_1,S_2,S_3 为非空整数集合，对于 1,2,3 的任意一个排列 i,j,k，若 $x\in S_i, y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$.

(1)证明三个集合中至少有两个相等.

(2)三个集合中是否可能有两个集合无公共元素?

导析 关键在于证明 $0\in S_j$，由此可导出 $S_i=S_k$. 这要用到极端原理和有序化方法.

证明 (1)若 $x\in S_i, y\in S_j$，则 $y-x\in S_k$，从而 $(y-x)-y=-x\in S_i$. 这表明每个集合中均含有非负元素.

当 3 个集合的元素都只是零时，结论显然成立.

否则，设 S_1,S_2,S_3 中最小正元素为 a，不妨设 $a\in S_1$. 设 b 为 S_2,S_3 中最小的非负元素，不妨设 $b\in S_2$，则 $b-a\in S_3$.

若 $b>0$，则 $b\geqslant a$，于是 $b>b-a\geqslant 0$，与 b 的最小性矛盾，所以 $b=0$. 于是任取 $x\in S_1$，因 $0\in S_2$，故 $x=x-0\in S_3$，所以 $S_1\subseteq S_3$. 同理，$S_3\subseteq S_1$，从而 $S_1=S_3$.

另证 同上易证 S_i,S_j,S_k 中均有非负元素. 设 $a_1\in S_1, a_2\in S_2, a_3\in S_3$ 分别是 S_1,S_2,S_3 中的最小非负元，不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant 0$，下面我们来证明 $a_3=0$. 由上面条件及题设可得:

$a_2-a_3\in S_1$ 且 $a_2-a_3\geqslant 0$，于是 $a_2-a_3\geqslant a_1$;

$a_1-a_2\in S_3$ 且 $a_1-a_2\geqslant 0$，于是 $a_1-a_2\geqslant a_3$.

$\therefore a_1+a_3\leqslant(a_2-a_3)+(a_1-a_2)=a_1-a_3$

$\Rightarrow a_3\leqslant 0$，结合 $a_3\geqslant 0$，得 $a_3=0$，故 $S_1=S_2$.

(2)可能. 如 $S_1=S_2=\{奇数\}, S_3=\{偶数\}$，显然满足条件，但 S_3 与 S_1,S_2 均无公共元素.

【例 8】 (1995 年高中联赛试题) 设 $M=\{1,2,\cdots,1995\}, A\subseteq M$，且当 $x\in A$ 时

$15x \notin A$.求$|A|$的最大值.

导析 因为$\left[\frac{1995}{15}\right]=133,\left[\frac{133}{15}\right]=8$,所以当$x=9,10,11,\cdots,133$时,$x$与$15x$不能同时在$A$中,于是$|A|\leqslant 1995-125=1870$.再构造一个$A$,使$|A|=1870$即可.

解 由题设,当$x=9,10,11,\cdots,133$时,x与$15x$不能同时在A中,故至少有$133-8=125$个数不在A中,即$|A|\leqslant 1995-125=1870$.

另一方面,取M的子集A为

$\{1,2,\cdots,8\}\cup\{134,135,\cdots,1995\}$,

则A满足题设条件,此时$|A|=1870$,故$|A|_{\max}=1870$.

【例9】 已知集合$A=\{2,3,4,5,6,7\}$,对$X\subseteq A$,定义$S(X)$为X中所有元素之和.求全体$S(X)$的总和S.

导析 将A看作全集,注意到$S(X)+S(\overline{X})=S(A)=2+3+4+5+6+7=27$,只要将$A$的所有子$X$与其补集$\overline{X}$配对即可求得总和$S$.

解 设全集$I=A$,因$X\cup\overline{X}=A,X\cap\overline{X}=\varnothing$,所以

$$S(X)+S(\overline{X})=S(A)=27.$$

设$Y\subseteq A$,且$X\neq Y$,则显然有

$$\overline{X}\neq\overline{Y}.$$

作集合$M=\{X|X\subseteq A\}$.显然$f:X\to\overline{X}$为M到M上的双射.所以

$S=\frac{1}{2}|M|\cdot S(A)=\frac{1}{2}\cdot 27\cdot|M|$.

现来求$|M|$,对于集合A的子集X,A中的每一个元素只有属于或不属于X两种情况,由于集合A有6个元素,所以A的子集共有

$|M|=2^6=64$.

所以 $S=\frac{1}{2}\cdot 64\cdot 21=864$.

【例10】 设集合$M=\{1,2,\cdots,10\}$的五元子集$A_1,A_2,\cdots,A_k$满足条件:M中的任意两个元素最多在两个子集A_i与$A_j(i\neq j)$内出现,求k的最大值.

解 记$i\in M(i=1,2,\cdots,10)$,在$A_1,A_2,\cdots,A_k$中出现的次数为$d(i)$.首先我们来证明

$d(i)\leqslant 4(i=1,2,\cdots,10)$.

事实上,对$i\in M$与M中另9个元素之一$j(j\neq i)$组成二元组(i,j)在所有满足题

设的五元子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中最多出现两次,因此 i 参与组成的 9 个二元组 (i,j) 最多出现 $2\times9=18$ 次,由于 $|A_j|=5(j=1,2,\cdots,k)$,而每个含 i 的子集恰有 4 个二元组 (i,j),因此 $4\cdot d(i)\leqslant18$,故 $d(i)\leqslant4$.

其次,k 个 5 元子集共有 $5k$ 个元素,而每个 M 的元素在 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中出现的次数为 $d(i)$,从而

$$5k=d(1)+d(2)+\cdots+d(10)\leqslant4\times10$$

$$\Rightarrow k\leqslant8.$$

另外,当 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 取如下数集时:

$A_1=\{1,2,3,4,5\}$, $A_2=\{1,6,7,8,9\}$,

$A_3=\{1,3,5,6,8\}$, $A_4=\{1,2,4,7,9\}$,

$A_5=\{2,3,6,7,10\}$, $A_6=\{3,4,7,8,10\}$,

$A_7=\{4,5,8,9,10\}$, $A_8=\{2,5,6,9,10\}$.

易验证它们是符合要求的 8 个 5 元子集,故 $k_{\max}=8$.

【例 11】 设 S 是数集 $\{1,2,3,\cdots,1989\}$ 的一个子集,且 S 中任意两个数的差不等于 4,也不等于 7.问集合 S 中最多可以包含多少个数?

导析 由于 4 与 7 的和为 11,先考察前 11 个自然数 $1,2,3,\cdots,11$,发现 $A=\{1,4,6,7,9\}$ 或 $\{1,3,4,6,9\}$ 满足题设要求,而这 5 个数分别加上 $11k(k\geqslant0,k\in Z)$ 后的 5 个数仍满足题设条件,因此我们可分段要选取符合要求的 S 的元素.

解 显然集合 $A=\{1,4,6,7,9\}$ 中任意两个元素之差都不等于 4 或 7,所以数集 $A_n=\{1+11n,4+11n,6+11n,7+11n,9+11n\}(n\geqslant0,n\in Z,11n+9\leqslant1989)$ 也具有同样的性质.

另一方面,$A=\{1,4,6,7,9\}$ 中任一元素与 $A_1=\{12,15,17,18,20\}$ 中任一元素的差也不等于 4 或 7,从而可知 A_n 与 $A_m(n\neq m)$ 之间,任意两个元数的差不等于 4 或 7.注意到 $1989=11\times180+9$,且最后 9 个数 $1981,1982,\cdots,1989$ 中仍可取出 5 个数.记 $S=\bigcup\limits_{n=0}^{180}A_n$,则 S 满足题设,且

$$|S|=181\times5=905.$$

下面证明 S 中不可能含有比 905 更多的元素.若不然,则上述 181 组数中至少有一组中要取出 6 个数,使得两两的差不是 4 或 7.不妨考虑 $\{1,2,3,\cdots,11\}$ 这一组数,把它划分为 5 组:

$\{4,7,11\}$，$\{3,10\}$ $\{2,6\}$，$\{5,9\}$，$\{1,8\}$．其中至少有一组要取出两个数．显然后四组数的每一对都不能同时取出，只能在第一组中取 4，7，于是 $\{3,10\}$ 中只能取 10，$\{2,6\}$ 中只能取 2，$\{5,9\}$ 中只能取 5，这时 $\{1,8\}$ 中两个数都不能取，也就是说取不到 6 个数．故 $|S|\leqslant 905$．

故 $|S|_{\max}=905$．

【例 12】 （国家集训队试题）设 $M=\{1,2,\cdots,20\}$，对于 M 的任一 9 元子集 S，函数 $f(S)$ 取 1 至 20 之间的整数值．求证：不论 f 是怎样的一个函数，总存在 M 的一个 10 元子集 T，使得对所有的 $k\in T$，都有 $f(T\setminus\{k\})\neq k$．

导析 直接证明有困难，可考虑转换命题：设法证明不具有这种性质的十元子集的个数比所有十元子集的个数少即可．

证明 我们来建立一个不具有这种性质的子集到所有九元子集的一个映射，并证明它是单射．

为方便起见，我们规定：如果 T 是 M 的一个十元子集，且 $\exists\, k_0\in T$，使得 $f(T\setminus\{k_0\})=k_0$，则称这样的“十元子集”为“好子集”．

下面只要证明好子集的个数小于十元子集的总数．定义一个新的映射：

g：好子集 $T\to T\setminus\{k_0\}$．

即 T 为好子集时，$g(T)=T\setminus\{k_0\}$．其中 k_0 具有性质 $f(T\setminus\{k_0\})=k_0$．

我们来证明 g 是一个单射．设 T_1，T_2 是好子集，且 $g(T_1)=T_1\setminus\{k_1\}$，$g(T_2)=T_2\setminus\{k_2\}$．

要证 g 是单射，只要对 $T_1\neq T_2$，证明 $g(T_1)\neq g(T_2)$ 即可．下面证它的逆否命题．

若 $g(T_1)=g(T_2)$，即 $T_1\setminus\{k_1\}=T_2\setminus\{k_2\}$，则由好子集 T_1、T_2 的性质得

$k_1=f(T_1\setminus\{k_1\})=f(T_2\setminus\{k_2\})=k_2$，

又 $T_1\setminus\{k_1\}=T_2\setminus\{k_2\}$，

$\therefore T_1=T_2$，从而 g 是好子集的集合到 M 的全体九元子集的一个单射．故

好子集的个数 $\leqslant$ 9 元子集的个数

$=C_{20}^{9}<C_{20}^{10}=$ 10 元子集的个数．

于是必存在一个 10 元子集 T 不是好子集，即对 $\forall\, k\in T$，有 $f(T\setminus\{k\})\neq k$．原题得证．