初中数学竞赛基础教程

范学汉 主编

华中师范大学出版社

第一册

责任编辑：张小新

封面设计：甘　英

ISBN7-5622-0789-5/G·270

定价：1.80元

初中数学竞赛基础教程

第一册

主　编　范学汉
副主编　童建民　严宗刚
编　委　（以姓氏笔划为序）
陈胜利　严宗刚　吴焕新
汪建中　范学汉　谢汉元

华中师范大学出版社

鄂新登字 11 号

初中数学竞赛基础教程

第一册

主编　范学汉

副主编　$\boxed{\text{童建民}}$　严宗刚

编委　（以姓氏笔划为序）

陈胜利　严宗刚　吴焕新

汪建中　范学汉　谢汉元

*

华中师范大学出版社出版

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所经销

孝感报社印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 4.125　字数 93 千字

1991 年 12 月第 1 版　　1992 年 7 月第 2 次印刷

ISBN 7-5622-0789-5/G・270

印数 11001—26000　定价：1.80 元

前　言

为给初中学生开展数学课外活动和数学竞赛提供一套与现行初中数学课本配套的实用教材，我们在总结我区（黄冈地区）近几年组织辅导数学竞赛经验的基础上，按照初中数学教学大纲（修订本）及初中数学竞赛大纲（草案）的要求，编写了这套《初中数学竞赛基础教程》。目的是想通过这套教材的教学和辅导，起到开阔视野、启迪思维、提高智能的作用。

这套书将初中数学教学大纲规定的重点内容及数学竞赛大纲规定的全部内容归纳为十九讲，共分为三册，分别供初一、初二、初三使用。各册在编写过程中注意了以下五个特点：(1) 基本以现行初中数学课本的章节编排顺序为序，力图使课外活动的教学和课堂教学同步进行；(2) 突出重点、整体配合、循序渐进，同时穿插一些数学竞赛需要的专题；(3) 凡是扩充的知识内容，力求避免在理论上作繁难的推导，尽量采用通过实例直观印证，把重点放在方法的介绍和运用上；(4) 将数学基本理论、基本知识、基本方法的学习和思维与能力的训练贯穿于例题的剖析之中；(5) 每讲中都分别配有适量的练习和习题，每一册中都配有两套复习自测题。第三册后，另外配有两套竞赛模拟题。为了方便读者，每册中所有的练习、习题和复习自测题以及模拟题后面都附有答案、提示或解答。

本册由严宗刚、陈胜利编写，范学汉审订。为本册部分讲节提供过初稿的有王海平、陈才乐、郑少章、胡子清。

本书在编写过程中曾得到黄州市教研室的大力支持、黄冈中学的热情鼓励和热心协助。华中师范大学《数学通讯》编辑部伍家德老师审阅了本书初稿，提出了不少宝贵意见。谨此一并感谢。

由于我们的思想和学识水平有限，加之时间仓促，书中错误在所难免，恳请广大读者批评指教。

编　者

1991年6月于黄州

目　录

第一讲　数的巧算

一、两个首同末合十的两位数相乘

两个两位数，若它们十位数字都是 a，个位数字分别是 b 和 c，$b+c=10$，就叫首同末合十．这两个数分别表示为 $10a+b$，$10a+c$．由乘法分配律得：

$$\begin{aligned}(10a+b)(10a+c) &= (10a)^2+10ab+10ac+bc \\ &= 100a^2+10a(b+c)+bc \\ &= 100a^2+100a+bc \\ &= [a(a+1)]\times 100+bc.\end{aligned}$$

由此可知，两个首同末合十的两位数相乘，先将首位数字与比它大 1 的数的积扩大 100 倍，再加上两个末位数字的积.

例 1　计算：74×76.

解　$74\times 76=(7\times 8)\times 100+4\times 6=5624$.

这种速算法可以推广到两个三位数相乘中.

例 2　计算：243×247.

解　$243\times 247=[24\times(24+1)]\times 100+3\times 7$

$=60021$.

二、两个末同首合十的两位数相乘

设这两个数分别是 $10a+c$，$10b+c$，且 $a+b=10$．则

$$
\begin{aligned}
(10a+c)(10b+c) &= 10^2ab+10ac+10bc+c^2 \\
&= 10^2ab+10c(a+b)+c^2 \\
&= 100ab+100c+c^2 \\
&= (ab+c)\times 100+c^2
\end{aligned}
$$

由此知，两个末同首合十的两位数相乘，先将两首位数字乘积与末位数字的和扩大 100 倍，再加上末位数字的平方.

例 3 计算：76×36.

解 $76\times 36=(7\times 3+6)\times 100+6^2=2736$.

三、两个接近 100 的数相乘

1. 两个超过 100 的数相乘

设这两个数分别为 $a=100+h$，$b=100+k$.（h、k 为不超过两位数的自然数），则

$$
\begin{aligned}
a\cdot b &= (100+h)(100+k) \\
&= (100+h+k)\times 100+hk \\
&= (a+k)\times 100+hk \\
&= (b+h)\times 100+hk.
\end{aligned}
$$

即两个超过 100 的数相乘，先把一个数加上另一个数与 100 的差扩大 100 倍，再加上这两个数分别与 100 之差的积.

例 4 计算：109×112.

解
$$
\begin{aligned}
109\times 112 &= (109+12)\times 100+9\times 12 \\
&= 12208.
\end{aligned}
$$

2. 两个不足 100 的数相乘

设这两个数分别为 $a=100-h$，$b=100-k$（h、k 为不超过两位数的自然数）

$$a\cdot b=(100-h)(100-k)=(100-h-k)\times 100+hk$$

$$= (a-k)\times 100 + hk = (b-h)\times 100 + hk$$

即两个不足 100 的数相乘，先将一个数中减去 100 与另一个数的差扩大 100 倍，再加上这两个数分别与 100 之差的积.

例 5　计算：88×96.

解　$88\times 96=(88-4)\times 100+12\times 4$

$=8448.$

3. 一个超过 100，一个不足 100 的两个数相乘.

设两数分别为 $a=100+h$, $b=100-k$（h、k 为不超过两位数的较小自然数），则有

$$\begin{aligned} a\cdot b &= (100+h)(100-k) \\ &= (100+h-k)\times 100 - hk \\ &= (a-k)\times 100 - hk. \end{aligned}$$

即先将大于 100 的数中减去 100 与另一个数的差扩大 100 倍，再减去这两个数分别与 100 的差的积的绝对值.

四、求若干整数之和

例 6　求和：$1+2+3+\cdots+99+100$.

分析　本和式的特点是相邻两项中后项与前项的差都相等. 故首末两项之和与到首末两项距离相等的两项之和相等，即 $1+100=2+99=3+98=\cdots\cdots$.

解　$1+2+3+\cdots+99+100$

$=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51)$

$=101\times 50=5050.$

由此可知：求若干个整数之和，若每相邻两项中后项与

前项的差相等，其和 $S=$（首项+末项）×总项数÷2.

例 7 求和：$1+3+5+\cdots+1991$.

解 这里每相邻两项中后项与前项的差都是 2，首项是 1，末项是 1991. 总项数是 $(1991+1)\div2=996$. 由公式得

$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+1991&=(1+1991)\times996\div2\\&=992016.\end{aligned}$$

例 8 计算：$S=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}n$.（$n$ 是正整数）

分析 解这道题的关键在末项 $(-1)^{n+1}n$，若 n 是正偶数则 $(-1)^{n+1}n=-n$；若 n 是正奇数则 $(-1)^{n+1}n=n$. 故此题要分两种情况.

解 当 n 是正偶数时

$$\begin{aligned}S&=1-2+3-4+\cdots+(n-1)-n\\&=(1-2)+(3-4)+\cdots+[(n-1)-n]\\&=\overbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}^{n\div2\text{个}}\\&=-\frac{n}{2}\quad(n\text{为正偶数})\end{aligned}$$

当 n 是正奇数时

$$\begin{aligned}S&=1-2+3-4+\cdots-(n-1)+n\\&=1+\overbrace{(3-2)+(5-4)+\cdots+[n-(n-1)]}^{(n-1)\div2\text{个}}\\&=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}\quad(n\text{为正奇数})\end{aligned}$$

$$\therefore \quad S=\begin{cases} -\dfrac{n}{2} & (n\text{ 为正偶数}) \\ \dfrac{n+1}{2} & (n\text{ 为正奇数}). \end{cases}$$

五、平方数

1. 11—25 的平方数

$11^2=121$；$12^2=144$；$13^2=169$；$14^2=196$；

$15^2=225$；$16^2=256$；$17^2=289$；$18^2=324$；

$19^2=361$；$20^2=400$；$21^2=441$；$22^2=484$；

$23^2=529$；$24^2=576$；$25^2=625$.

2. 求 25—75 之间的某个整数的平方

先求这个数与 25 的差的 100 倍，再加上这个数与 50 的差的平方数.

例 9 求：67^2.

解 $67^2=(67-25)\times100+(67-50)^2$
$=4489$.

3. 求 75—100 之间的某个整数的平方

先求这个数的 2 倍与 100 之差的 100 倍，再加上这个数与 100 之差的平方数.（也可应用“不足 100 的整数相乘”法则）

例 10 求：83^2.

解 $83^2=(83\times2-100)\times100+(100-83)^2$
$=6600+289=6889$.

习 题 一

1. 计算

(1) 46×44；87×83；104×106；127×123；359×759；108×908；403×603.

(2) 106×103；115×112；108×121；98×97；92×85；88×83；105×98；116×96；102×94.

(3) 59^2；87^2；73^2；94^2；64^2.

2. 求和

(1) $1+2-3+4+5-6+\cdots+97+98-99$.

(2) 1 至 100 所有不能被 9 整除的整数和.

(3) $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2+101^2$.

(4) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{1990\times1991}$.

第二讲　特 征 数

在整数家族中，有一些具有某些特征的数，如奇数、偶数、质数、合数、平方数等．我们统称它们为特征数．

一、奇数与偶数

整数中，能被 2 整除的数叫偶数，不能被 2 整除的数叫奇数．通常用 $2n$ 表示偶数，用 $2n+1$ 或 $2n-1$ 表示奇数（n 为整数）．

对于奇数与偶数有下述性质：

1．奇数不能与偶数相等．

2．偶数与整数之积是偶数．

3．两个整数和与差具有相同奇偶性：

偶数±偶数＝偶数；奇数±奇数＝偶数；

偶数±奇数＝奇数．

4．奇数与奇数之积是奇数．

5．奇数个奇数之和是奇数，偶数个奇数之和是偶数．

利用上述性质可解决一些与奇、偶数有关的问题．

例 1　不满足等式 $85x-324y=101$ 的唯一一组自然数是（　　）

(A) $x=5$，　$y=1$　　　(B) $x=329$，$y=86$

(C) $x=653$，$y=171$　　(D) $x=976$，$y=256$

分析　由奇偶数性质知减数 $324y$ 必是偶数，而 $85x-324y=101$ 是奇数，故 $85x$ 必是奇数，则 x 为奇数．答案中只

有（D）中 x 为偶数，故（D）不满足等式.

例 2 在 1，2，3，…，1991 前面任添上一个正号或负号，它们的代数和是奇数还是偶数？

分析 两个整数的和与差具有相同奇偶性，而 $1+2+3+\cdots+1991=1991\times(1991+1)\div 2=1991\times 996$ 是偶数. 所以在 1，2，3，…，1991 前面任添一个正号或负号，其代数和是偶数.

例 3 有四个正整数之和为 9. 问它们的立方和能否等于 100?

解 四个正整数之和为 9 是奇数，由性质知这四个数只能是“三奇一偶”或“三偶一奇”. 它们的立方还是“三奇一偶”或“三偶一奇”，其立方和必是奇数，不能等于 100.

例 4 在任何一群人中，认识这一群人中奇数个人的总数是奇数还是偶数？

解 设这群人总数为 n，这 n 个人分别记作 1，2，3，…，n. 如果第 2 个人和第 3 个人相识用数对（2，3）表示. 由于认识是相互的，所以有数对（2，3），就必有（3，2）. 因此表示相识的数对必有偶数对. 在这些数对中，以 1 开头的数对设有 l_1 个（即第 1 人认识 l_1 个人），…，以 n 开头的数对设有 l_n 个. 那么，$l_1+l_2+\cdots+l_n$ 必为偶数，故在 l_1，l_2，…，l_n 中为奇数的个数必是偶数，即在 n 个人中认识奇数个人的总数是偶数.

例 5 有九个杯口全部向上的杯子，每次将其中的四个同时翻转使杯口向下. 问能否这样有限次的翻转后使杯口全部向下，为什么？

解 要把九个杯子全部翻得杯口向下，每个杯子要翻转奇数次，九个奇数之和仍是奇数. 即要九个杯口全部向下，翻

转的总次数必是奇数．而题中要每次同时翻转四个杯子，则无论如何翻转其总次数必是偶数．故不能使杯口全部向下．

练　习　一

1. 如果一个整数的平方是偶数，那么这个数是奇数还是偶数，为什么？

2. 满足关系式$\frac{m^2-n^2}{2}=1991$的自然数m、n是否存在？为什么？

3. 64能否是若干个连续自然数的和，为什么？

二、质数与合数

一个大于1的正整数，只能被1和本身整除，不能被其它正整数整除，这样的正整数叫质数（或素数）；一个正整数除了1和本身外，还能被其它正整数整除，这样的正整数叫合数．全体正整数可分为：质数，合数和1三类．

质数与合数有下述两个重要性质：

1. 算术基本定理

任何合数都可以分解成若干质因数的积．若不考虑质因数的顺序，这种分解方法是唯一的．

2. 不存在最大的质数

例6　n是什么整数值时n^4+4为质数，此时质数是什么？

分析　把n^4+4分解因式后令一个因式为1．

解　$n^4+4=(n^2+2)^2-(2n)^2$

$$=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$$

要使上式表示质数，必有一因式为1．

若$n^2+2n+2=1$　则$(n+1)^2=0$，即$n=-1$；