山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学

甲种本·下册

（第三版）

□ 主编 王爱云 宋 枚

Advanced Mathematics

中国石油大学出版社

山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学

（甲种本·下册·第三版）

主　　编　王爱云　宋　枚
副主编　马军英　张　燕
　　　　张立琴

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:甲种本.下/王爱云,宋枚主编.—3版.—东营:中国石油大学出版社,2012.8

ISBN 978-7-5636-3767-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②宋… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 190864 号

书　　名: 高等数学(甲种本·下册·第三版)

主　　编: 王爱云　宋　枚

副 主 编: 马军英　张　燕　张立琴

责任编辑: 刘玉兰(0532—86981535)

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营　邮编 257061)

网　　址: http://www.uppbook.com.cn

电子信箱: eyi0213@163.com

印 刷 者: 青岛双星华信印刷有限公司

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0532—86981535)

开　　本: 185 mm×260 mm　印张:16.25　字数:416 千字

版　　次: 2012 年 8 月第 3 版第 1 次印刷

定　　价: 28.80 元

再版前言

本书在《高等数学》(甲种本)第二版基础上修订而成。

《高等数学》(甲种本)上、下册是山东省高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革系列教材中的一套教材。它适合于省级师范院校的物理、电子、化工、计算机等与国家研究生入学考试“高等数学(一)”要求相一致的本科专业作为教材使用,也可供广大数学爱好者学习、研修之用。

本教材自2001年出版,2005年修订为第二版以来,一直作为山东师范大学相关专业的教材使用,省内也有其他六所高等院校先后用作教材,使用的效果是好的。且本教材第二版获得了2008年山东省高等学校优秀教材奖。这次教材修订的目标是:进一步适应大众化高等教育新形势,使教材更符合教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的新的“理工科本科数学基础课程教学基本要求”,努力反映近年来高等数学课程建设和教学改革的新成果。在保留第二版优点、特色的基础上,教材主要有以下改进:

1. 采纳广大教师和同学的意见、建议,将不定积分内容从一元函数积分学中独立出来自成一章,全书共十二章;第八章中变动了第五、六节的先后次序。

2. 进一步强化与中学数学教材的衔接。函数概念的引入,既突出了变量间的依赖关系,又采用了与中学教材同样的表述方法。

3. 进一步整合内容,优化知识体系,对诸如函数极限与数列极限的关系、向量值函数的分析运算、积分与微分、各类积分之间的关系等学生理解有困难的知识点进行更深入系统的阐释。

4. 调整各章习题配置,使之更好地起到深化概念理解、强化方法训练、引导数学创新的作用。

本版教材修订人员:第一、四章王爱云,第二、三章张燕,第五、六章王德臣,第七、十二章徐述声,第八章程涛,第九、十章孙胜秋,第十一章马军英。全书由王爱云统稿、加工。

本教材的编写出版及修订,自始至终得到中国石油大学出版社领导、同志们的指导、帮助,得到山东师范大学教务处、数学科学学院的大力支持,得到各兄弟院校专家、同行的热情鼓励,在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平所限,教材仍难免有谬误之处,恳请专家、读者不吝指正。

编　者

2012年7月

目　录

第八章　多元函数微分学

我们已经讨论了一元函数的微积分，由于现实世界中还有一个变量依赖于多个变量的情形，所以还需要研究多元函数的微积分.

多元函数微积分是一元函数微积分的推广和发展，其基本概念和方法与一元函数微积分有密切联系，也有不少本质上的差别. 这些本质差别在二元函数中就全部体现出来，而从二元函数到三元或三元以上的函数，仅会产生一些技术性的困难，因此，研究多元函数，我们以二元函数为主，研究过程中，要特别注意它与一元函数的联系与区别.

第一节　多元函数的基本概念

一、平面点集　n 维空间

为了讨论多元函数，我们首先把实数集合的区间、邻域等概念推广到平面点集，并引入 n 维空间概念.

1. 平面点集

建立了平面直角坐标系后，xOy 平面上的点 P 与二元有序实数组 (x,y) 之间就建立了一一对应. 因此，我们常把有序实数组 (x,y) 与平面上的点 P 视为等同的（并称 (x,y) 为点 P 的坐标），进而把二元有序实数组 (x,y) 全体与 xOy 坐标平面视为等同.

坐标平面上具有某种性质 M 的点的集合称为平面点集，记作

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{具有性质 }M\}.$$

例如，平面上以原点为中心、r 为半径的圆内所有点 (x,y) 的集合是

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\}.$$

若坐标平面上两点 A、B 间的距离用 $|AB|$ 表示，则集合 C 还可表示为

$$C=\{P\mid |OP|<r\}.$$

由 x 轴上闭区间 $[a,b]$ 上的 x 及 y 轴上闭区间 $[c,d]$ 上的 y 构成的二元有序数组 (x,y) 的全体记作

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid x\in[a,b],y\in[c,d]\},$$

称为区间 $[a,b]$ 与区间 $[c,d]$ 的直积.

xOy 坐标平面作为平面点集，记为

$$R^2=R\times R=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}.$$

现在我们在 R^2 内引入邻域概念.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是一个正数，则称与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\},$$

或
$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上，点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，正数 δ 为半径的圆的内部点的全体.

点 P_0 的去心 δ 邻域记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即
$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\},$$
或
$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在不需要强调邻域半径的情况下，常用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，用 $\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某个去心邻域.

利用邻域概念可以清楚地描述点 P 与一个平面点集 E 之间的关系.

(1) 内点、外点、边界点：

如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称点 P 是点集 E 的内点. 如图 8-1 中点 P_1 是 E 的内点.

如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称点 P 是点集 E 的外点. 如图 8-1中点 P_2 是 E 的外点.

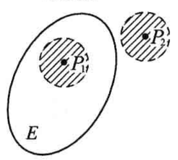

图 8-1

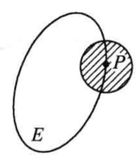

图 8-2

如果点 P 的任一邻域内都既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称点 P 是点集 E 的边界点. 图 8-2 中点 P 是 E 的边界点.

点集 E 的所有边界点构成的集合称为点集 E 的边界，记作 ∂E.

如点集 $E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$，属于 E_1 的点都是 E_1 的内点，满足 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$ 的点都是 E_1 的边界点，但都不属于 E_1，集合 E_1 的边界 $\partial E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1, x^2+y^2=4\}$.

(2) 聚点：

如果点 P 的任何去心邻域 $\mathring{U}(P)$ 内总有属于 E 的点，则称点 P 是点集 E 的聚点.

由聚点定义，集合 E 的聚点 P 可能属于 E，也可能不属于 E；集合 E 的内点一定是 E 的聚点，集合 E 的外点一定不是 E 的聚点，集合 E 的边界点可能是 E 的聚点，也可能不是 E 的聚点.

如点集 $E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 的所有内点和边界点都是 E_1 的聚点. 点集 $E_2=\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1, x+y=0\}$ 中，满足 $x+y\geqslant 1$ 的点都是 E_2 的聚点，满足 $x+y=0$ 的点都不是 E_2 的聚点，但满足 $x+y=1$，$x+y=0$ 的点都是 E_2 的边界点.

根据点集中点的特征，可以定义一些重要的平面点集.

(1) 开集、闭集、连通集：

若点集 E 的每一点都是 E 的内点，则称 E 是开集. 若点集 E 包含它的全部内点和边界点，则称 E 为闭集. 例如，E_1 是开集，E_2 是闭集，$E_3=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 2\}$ 既非开集，也非闭集.

设 E 是平面点集，如果对 E 中任意两点 P、Q，总可用完全含在 E 内的折线（即折线上的点都属于 E）连接起来，则称 E 是连通集. 例如，E_1、E_3 是连通集，E_2 不是连通集.

（2）区域：

连通的开集称为开区域或区域；开区域及它的边界构成的点集称为闭区域. 例如，E_1 是开区域，$E_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$是闭区域.

（3）有界集、无界集：

设 E 是平面点集，若存在某个正实数 K，使得 $E\subset U(O,K)$，其中 O 表示坐标原点，则称 E 为有界点集. 否则称为无界点集. 例如，E_1、E_3 为有界点集，E_2、E_4 为无界点集. 其中 E_1 是有界区域，E_1 加上其边界就是有界闭区域.

2. n 维空间

一般地，设 n 为取定的一个自然数，我们称 n 元有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体为 n 维空间，记为 $\mathbf{R}^n$. 每个 n 元有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 n 维空间中的一个点. 数 x_i 称为该点的第 i 个坐标.

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$及 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

显然，$n=1,2,3$ 时，由上式便得解析几何中在数轴上、平面上、空间上两点间的距离.

前面对平面点集给出的一系列概念，可推广到 n 维空间中去. 例如，n 维空间内点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的 δ 邻域，定义为 n 维空间中的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta,P\in\mathbf{R}^n\}$$

或

$$U(P_0,\delta)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}<\delta,\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\}.$$

其中 δ 是正数.

以此邻域概念为基础，可以描述 n 维空间中点与点集之间的关系，也可定义 n 维空间中的重要点集.

二、多元函数概念

客观现象往往是由多种因素确定的，在研究这些现象时就会遇到多个变量之间的依赖关系.

例 1　一定质量的理想气体，其压强 P 和容积 V 以及绝对温度 T 之间满足关系式（称为气态方程）

$$P=\frac{kT}{V}\quad (T>T_0,V>0,k\text{ 是常数}).$$

当 T、V 的值分别给定时，按照这个关系式，P 就有唯一确定的值与它们对应. 这样，我们说变量 P 是两个变量 T、V 的二元函数.

例 2　圆柱体的侧面积 S、底半径 R 和高 H 之间有关系

$$S=2\pi RH\quad (R>0,H>0).$$

当 R 与 H 的值分别给定时，S 的对应值就随之唯一确定，我们称变量 S 是两个变量 R 与 H 的二元函数.

以上实际问题在数学上的共性是，每个问题中有三个变量（一般记作 x,y,z），其中一个变量（如 z）随另外两个变量（如 x,y）的变化而变化. x 或 y 的取值范围确定 xOy 平面上的一个点集 D，两个变量 x 或 y 的值分别取定时，就相当于在 D 中取定一个点 $P(x,y)$，变量 z 按照

一定的规律或法则(如 f)有唯一确定的值与之对应,就是与 D 中的点对应. 不难看出,法则 f 就是由平面点集 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个映射. 由此我们抽象出二元函数的定义.

定义 1　设 D 是 xOy 平面上的一个非空集合,称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的二元函数(或 D 上点 P 的函数),记作

$$z=f(x,y),(x,y)\in D,\quad 或\quad z=f(P),P\in D.$$

其中 x,y 称为自变量,z 称为因变量,点集 D 称为函数的定义域. 与自变量 x,y 的一对值(即 D 中的一个点)对应的因变量 z 的值称为二元函数 f 在点(x,y)处的函数值,记作 $f(x,y)$,即 $z=f(x,y)$. 所有函数值的集合,即实数集$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为函数的值域.

关于二元函数与函数值的记号,以及一对自变量 x,y 的值对应多个 z 值时函数概念的理解,完全同于一元函数的情形,此处不再赘述.

类似地,可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$以及三元以上的函数. 一般地,把定义 1 中的平面点集 D 换为 n 维空间中的点集 D,则可类似定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$或 $u=f(P)$. 这里点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 当 $n=1$ 时,n 元函数就是一元函数;当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域,与一元函数情况类似,对由实际问题给出的函数,其定义域是使实际问题有意义的自变量的值构成的点集. 如例 2 中,自变量 R、H 分别表示圆柱体的底半径和高,按其实际意义,函数定义域为$\{(R,H)\mid R>0,H>0\}$(图 8-3),这是一个无界开区域. 对于用算式表达的多元函数 $u=f(P)$,则以使这个算式有意义的自变量的值构成的点集为这个函数的定义域.

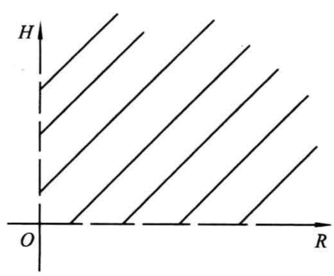

图 8-3

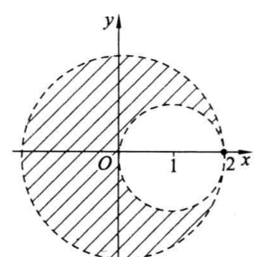

图 8-4

例 3　求函数 $z=\ln(x^2+y^2-2x)+\ln(4-x^2-y^2)$的定义域,并将定义域用平面图形表示.

解　要使函数有意义,则须

$$x^2+y^2-2x>0\quad 且\quad 4-x^2-y^2>0.$$

解得函数定义域为$\{(x,y)\mid 2x<x^2+y^2<4\}$. 定义域图形如图 8-4 所示.

设二元函数 $z=f(x,y)$的定义域为 D,在空间直角坐标系中,对于 D 中每一点 $P(x,y)$,依照函数关系 $z=f(x,y)$,就有空间一点 M 与之对应,M 的坐标为$(x,y,f(x,y))$. 在空间中,点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为二元函数 $z=f(x,y)$的图形. 一般说来,它是三维空间中的一张曲面(图 8-5).

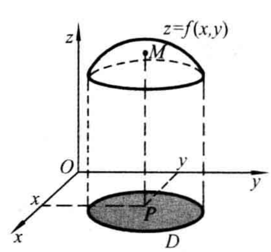

图 8-5

例如,由空间解析几何知道,线性函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一张平面,函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面.

当函数的自变量个数 $n>2$ 时，n 元函数的图形就没有直观的几何形象了.

三、多元函数的极限

二元函数的极限定义与一元函数极限定义类似.

定义 2　设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为区域 D，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，A 是一个常数，若对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得 D 中满足不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点 $P(x,y)$，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 或 $P\to P_0$ 时的极限. 记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad f(P)\to A\ (P\to P_0). \quad \blacksquare$$

为了区别于一元函数的极限，我们把二元函数的极限叫做二重极限.

注意：这里记号"$\begin{matrix}x\to x_0\\ y\to y_0\end{matrix}$"的意义是"$(x,y)\to(x_0,y_0)$".

二重极限定义的重要性及其应用思路也类似于一元函数极限.

例 4　证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.

证　因为

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

所以，对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时，总有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立，从而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

根据二元函数极限定义不难看到，函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在二重极限，是指 xOy 坐标面上的动点 $P(x,y)$ 在函数定义域 D 中以任意方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，相应地函数 $f(x,y)$ 都无限接近常数 A，因此，如果动点 $P(x,y)$ 在 D 中以某种方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 不趋于一个确定的常数，或以某两种方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于不同的常数，则可断定 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 的二重极限不存在.

例 5　证明：普吕克(plücker)函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时二重极限不存在.

证　当动点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$（k 为任意实常数）趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

显然它随着 k 的不同而不同，所以 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 的二重极限不存在.

例 6　证明函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 当点 (x,y) 沿着任意直线趋于点 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 都趋于常数 0，但 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不存在.

证　对任意实数 k，动点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,$$

当动点 $P(x,y)$ 沿 y 轴 $(x=0)$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}0=0,$$

但是，当动点 $P(x,y)$ 沿曲线 $y=x^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y=x^2\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2},$$

因此，$f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不存在.

二元函数的极限也具有与一元函数极限相类似的定理和运算法则.

例 7　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解　函数 $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x\neq 0,-\infty<y<+<\infty\}$ 内有定义，$P_0(0,2)$ 是 D 的聚点，在 D 内当 (x,y) 充分接近 $P_0(0,2)$ 时，由二元函数的极限运算法则，得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 2}y=1\cdot 2=2.$$

如果 P_0、P 是 n 维空间中的点，那么将定义 2 推广，就得到 n 重极限定义. 二元函数极限的有关定理和运算法则也可推广到 n 元函数中去.

四、多元函数的连续性

定义 3　设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点且 $P_0\in D$. 如果 $(x,y)\in D$ 时

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果 $f(x,y)$ 在开区域 D 内每一点都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 内连续. 如果 $f(x,y)$ 在闭区域 D 内每一点连续，且 $f(x,y)$ 在 D 的每个边界点也连续，则称函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，或称 $f(x,y)$ 是闭区域 D 上的连续函数.

如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 $f(x,y)$ 在点 P_0 间断，P_0 称为 $f(x,y)$ 的间断点. ▌

由例 5 可知，点 $(0,0)$ 是普吕克函数的间断点. 函数 $z=\dfrac{xy}{y-x^2}$ 在抛物线 $y=x^2$ 上没有定义，所以该曲线上的点都是间断点.

前面已经指出，一元函数中关于极限的运算法则对于二元函数仍然适用，根据极限运算法则和二元函数连续概念，可以证明二元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，二元连续函数的商是连续函数；二元连续函数的复合函数也是连续函数.

由 x,y 的基本初等函数及常数经过有限次四则运算与复合步骤所形成的用一个数学式

子表示的函数叫做二元初等函数. 例如，$\dfrac{x+x^2-y^2}{1+x^2}$，$\sin(x+y)$，e^{x+y}，$\ln(1+x^2+y^2)$都是二元初等函数.

由二元连续函数的和、差、积、商以及连续函数的复合函数的连续性，再根据基本初等函数的连续性，我们可以得到结论：

二元初等函数 $z=f(x,y)$在它的定义区域内是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由二元初等函数的连续性结论可知，当点 $P_0(x_0,y_0)$属于初等函数 $f(x,y)$的定义区域时，有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

例 8　求$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 2}}\dfrac{x+y}{xy}$.

解　$f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$是二元初等函数，它的定义域

$$D=\{(x,y)\mid x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0\}.$$

因 D 不是连通的，故 D 不是区域. 由于

$$D_1=\{(x,y)\mid x>0 \text{ 且 } y>0\}$$

是区域，且 $D_1\subset D$，所以 D_1 是 $f(x,y)$的一个定义区域，而$P_0(1,2)\in D_1$，故

$$\lim_{\substack{x\to 1\\y\to 2}}\frac{x+y}{xy}=f(1,2)=\frac{3}{2}.$$

以上关于二元函数的连续性定义及性质和二元初等函数定义及有关结论，可相应地推广到 n 元函数中去.

我们知道，闭区间上的一元连续函数有重要的性质，这些性质也可推广到多元函数中来.

性质 1(最大值和最小值定理)　若多元函数 $f(P)$在有界闭区域 D 上连续，则函数 $f(P)$在 D 上一定能取到最大值和最小值，即在 D 上至少有两点 P_1 与 P_2，对于一切点 $P\in D$，有

$$f(P_1)\leqslant f(P)\leqslant f(P_2).\quad \blacksquare$$

由此可得，有界闭区域 D 上连续的函数在 D 上有界.

性质 2(介值定理)　若多元函数 $f(P)$在有界闭区域 D 上连续，P_1、P_2 是 D 上两点，且 $f(P_1)<f(P_2)$，则对满足$f(P_1)<\mu<f(P_2)$的任意实数 μ，在 D 上至少存在一点 P_0，使得 $f(P_0)=\mu$.　$\blacksquare$

由性质 1 与性质 2 可得，有界闭区域 D 上连续的函数必取得介于其在 D 上的最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

习　题　8-1

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$，求 $f(1,1)$，$f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$.
2. 已知函数 $f(u,v)=u^v$，求 $f(xy,x+y)$.
3. 设 $f(x,y)=\ln x\cdot\ln y$，证明：

$$f(xy,uv)=f(x,u)+f(x,v)+f(y,u)+f(y,v).$$

4. 求下列函数的定义域，并画出定义域的图形.

(1) $z=\ln xy$；　(2) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

(3) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$；　(4) $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}+\operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$；

(5) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　(6) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(7) $u=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$；　(8) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. 求下列二重极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}\dfrac{3xy+x^2y^2}{x+y}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$；　(5) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)$；　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

6. 证明$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

8. 指出下列函数的间断点：

(1) $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$；　(2) $z=\ln|x-y|$.

9. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$的连续性.

10. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点(0,0)连续.

第二节　偏导数

一元函数的导数(变化率)是研究函数的重要工具.对于多元函数,同样需要讨论它的变化率.如果将多元函数除某个自变量外,其余的自变量都暂时看作常数,则多元函数就成为该自变量的一元函数,它的导数,就是所谓多元函数关于该自变量的偏导数.

一、偏导数概念

定义　设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义,将 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处取增量 Δx,相应地函数有增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

$\Delta_x z$ 称为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)对 x 的偏增量.若极限

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 x 的偏导数,记作

$$f_x(x_0,y_0),\quad z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

类似地，如果函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏增量 $\Delta_y z$ 与 Δy 之比的极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数，记作

$$f_y(x_0,y_0),\quad z_y\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

由定义可知，二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x（或对 y）的偏导数，就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 x_0 的导数（或 $f(x_0,y)$ 在点 y_0 的导数）. 它刻画的是函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处动点沿平行于 x 轴（或 y 轴）的直线变化时的变化率.

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，则对于 D 内每一点 $P(x,y)$，都有确定的函数对 x 的偏导数值与它对应，因此，函数对 x 的偏导数是 D 内点 P 的函数，也是 x,y 的二元函数. 这个函数称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数. 记作

$$f_x(x,y),\quad z_x,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

类似地可定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记作

$$f_y(x,y),\quad z_y,\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

函数 $f(x,y)$ 关于 x、y 的偏导函数的表达式为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

由此可见，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 x、y 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值. 以后在不致混淆的情况下，把偏导函数简称为偏导数.

一般地，对于 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处关于 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ 为

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_k+\Delta x_k,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)}{\Delta x_k}.$$

由偏导数定义可知，求多元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于 x_k 的偏导数，可视 x_k 为变量，其余的均视为常量，对 x_k 求导数. 即求偏导数归结为一元函数求导数.

例 1　求 $z=x^2y+y^2$ 在点 $(2,3)$ 处的偏导数.

解　视 y 为常量，对 x 求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy.$$

类似地

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y.$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=2\\y=3}}=2\cdot 2\cdot 3=12,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=2\\y=3}}=2^2+2\cdot 3=10.$$

例 2　求 $u=x^y\sin 3z(x>0,x\neq 1)$ 的偏导数.

解　将 y 和 z 都视为常量，对 x 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}\sin 3z.$$

类似地
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x\sin 3z,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=3x^y\cos 3z.$$

例 3 已知理想气体的状态方程 $PV=kT$(k 为常量). 证明:
$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证 因为
$$P=\frac{kT}{V},\quad \frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{kT}{V^2},$$
$$V=\frac{kT}{P},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{k}{P},$$
$$T=\frac{PV}{k},\quad \frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{k},$$
所以
$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{kT}{V^2}\cdot\frac{k}{P}\cdot\frac{V}{k}=-\frac{kT}{PV}=-1.$$

我们知道,一元函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$可看作函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商,而上式表明,偏导数记号$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$等是一个整体记号,不能看作分子与分母的商.

二、偏导数的几何意义 偏导数存在与连续的关系

上一节中已指出,二元函数 $z=f(x,y)$,$(x,y)\in D$,它的图形通常是一张空间曲面,而$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)\in D$关于x的偏导数$f_x(x_0,y_0)$,是先固定$y=y_0$,即有$z=f(x,y_0)$,再对x求导而得,所以偏导数$f_x(x_0,y_0)$在几何上表示由平面 $y=y_0$ 截曲面 $z=f(x,y)$ 所得的一条平面曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=y_0\end{cases}$在点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线$M_0T_x$对$x$轴的斜率(图 8-6). 同样,偏导数$f_y(x_0,y_0)$在几何上表示平面$x=x_0$截曲面$z=f(x,y)$所得平面曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ x=x_0\end{cases}$在点$M_0$处的切线$M_0T_y$对$y$轴的斜率.

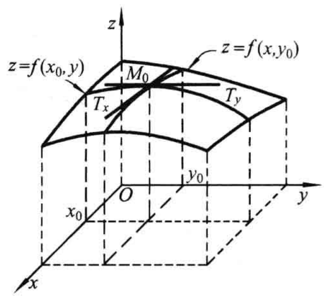

图 8-6

我们知道,若一元函数 $y=f(x)$在 x_0 可导,则必有 $y=f(x)$在 x_0 连续,但是,二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于 x 和 y 的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$都存在,也不能保证$f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续. 这是因为,$f(x,y)$在(x_0,y_0)处关于 x 的偏导数$f_x(x_0,y_0)$存在只能保证一元函数 $z=f(x,y_0)$在 x_0 连续,即只能保证当动点(x,y)沿直线 $y=y_0$ 趋于点(x_0,y_0)时,$f(x,y)$与 $f(x_0,y_0)$无限接近. 同样,$f_y(x_0,y_0)$存在只能保证当动点(x,y)沿直线 $x=x_0$ 趋于点(x_0,y_0)时,$f(x,y)$与 $f(x_0,y_0)$无限接近. 而$f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续,需要动点(x,y)在函数定义域内以任意方式趋于点(x_0,y_0)时,$f(x,y)$与 $f(x_0,y_0)$无限接近. 如普吕克函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
在点$(0,0)$对 x 的偏导数为
$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0,$$