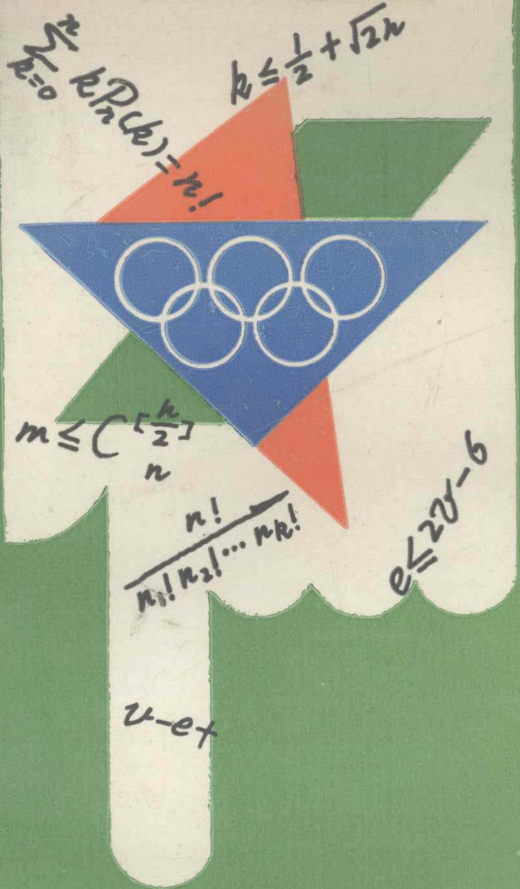
第二卷
上　册

刘诗雄
熊　斌
主　编

武汉大学
出版社



高中竞赛数学教程

高中竞赛数学教程

第 二 卷

（上 册）

主编 刘诗雄 熊 斌
编著 （以姓氏笔画为序）
冯志刚 刘诗雄
董方博 裴光亚
熊 斌

武汉大学出版社

序　言

数学竞赛是当今中国教育界的热点之一。自 1986 年我国派出整队参加国际奥林匹克数学竞赛以来，连获佳绩，令世人侧目。国人在欢欣之余，不断升温，以至各级领导、各类学校都将它列入议事日程，此种“热”，在世界上也堪称独步。

关于“数学竞赛”在数学教育中的地位和作用，国际上是有争论的。1992 年 8 月，在加拿大魁北克市举行的第七届国际数学教育会议上，就有一场特意设计的辩论会 (Crossfire)，题目就是数学竞赛。会上，攻之者说“数学竞赛只为少数天才服务，题目怪偏，不反映数学的应用功能，在社会公众中带来不好影响。”辩之者称“数学竞赛是培养学生数学兴趣的重要途径，竞赛题思考性强，有助于创造性能力的培养，天才学生的选拔对整个国家的人才开发有利等等。”辩论没有统一的结论，但是多数人似乎赞成数学竞赛，问题是要组织得好，尽量使多数人受益，数学题目有很多档次，应该在不同水平上组织竞赛，吸收更多的人参加。

我想，这里还是用得到一句名言：“在普及的基础上提高，在提高的指导下普及。”我国的数学竞赛已取得巨大成绩，频夺奖牌之际，今后也许应在普及上多下些功夫，多从教育意义上着眼。

有念及此，恰闻熊斌、刘诗雄等先生编著《高中竞赛数学教程》一书，洋洋近百万字中，有一部分内容安排得和当今的数学教学进度同步，便于一般教师采用，这倒是一个进步。数学竞赛和日常教学相结合，该会更有生命力罢！

作者告诉我，此书非常全，又非常新，几乎囊括了历届的竞

赛题及世界各国近几年来的试题，可称数学竞赛的“百科全书”。以我国数学竞赛规模之大，水平之高，出这样一部“全书”，应该是合适的。

二位主要作者都是30岁上下的年青人，尤令人高兴，我国的数学竞赛专家，早期由华罗庚、苏步青等亲自领导. 近10年来则以中国科技大学等高校的一批教授为中坚。现在，欣喜地看到第三梯队也在成长。这是我国数学竞赛事业继续兴旺的标志之一。我想：他们的努力将会是跨世纪的，应该给予支持。我对数学竞赛可说是外行，但因希望中国数学竞赛继续取得成功，遂乐于作此序，并就教于方家。

张奠宙

1992.10.8. 于华东师大

前　言

数学奥林匹克是一项历史悠久的国际性智力竞赛活动。自1894年匈牙利揭开现代中学生数学竞赛的序幕始，近百年来，开展数学竞赛的范围由欧洲而北美，而澳洲，而亚洲、非洲，不断扩大。尤为引人注目的是，在有着五千年光辉文明的中华大地，鼓励、支持和参加数学竞赛正在成为一种社会风尚。

悠久的历史，普遍的热情，广泛的参与，促成了数学奥林匹克的形式和内容日臻完善。一门奥林匹克数学（又称竞赛数学）正在发育成熟。奥林匹克数学是数学百花园中的一株奇葩，她把现代化的数学内容与趣味性的陈述、独创性的技巧有机地结合起来，充分展示数学的统一美、简洁美、对称美和奇异美。

作为一次甘冒失败风险的尝试，我们编写了这套《高中竞赛数学教程》。也许她过于早产，过于稚嫩。但我们还是抱着聊胜于无的想法将她献给我们所敬重的数学教育界的前辈、专家学者和年轻的同仁，献给跃跃欲试立志在数学奥林匹克赛场上一抖雄风的广大中学生朋友。

鉴于数学奥林匹克培训在我国已经形成的特点，《高中竞赛数学教程》的编写突出了以下两点：(1)　基础与提高并重，本书采用同一内容分“A”和“B”两部分的编写方法，“A”强调基础，帮助学生从竞赛的角度进一步深化对中学数学内容的认识，掌握中学数学以外的竞赛内容；“B”强调提高，帮助学生掌握奥林匹克数学的一些较难的内容和技巧。(2)　同步与超前结合。“A”内容顺序与中学数学内容同步，但在数学思想方法的渗透和思维能力与技巧的培养方面又有一定的超前性，以便帮助那些出类拔萃的学生更快地提高；“B”则不受教材知识顺序的限制，在突出重

点的基础上加强知识和方法的纵横联系，帮助学生从整体上把握奥林匹克数学的内容，提高数学素养和综合解题的能力。

这套《高中竞赛数学教程》由熊斌、刘诗雄共同策划和主编。其中第二章、第四章、第五章、第七章、第八章、第九章、第十章、第十三章、第十四章由熊斌和冯志刚编写；第三章、第六章、第十六章、第二十章由裴光亚编写；第十五章、第十八章、第十九章由董方博编写；第一章、第十一章、第十二章、第十七章由刘诗雄编写。

正值《高中竞赛数学教程》出版之机，我们向热情为本书题写书名的全国政协副主席、我国数学竞赛创始人之一的著名数学家苏步青老前辈致以无比的敬意和谢忱；向支持和关心本书写作的数学家、数学教育家张奠宙教授致以崇高的谢意；我们要感谢为数学竞赛作出贡献的所有专家学者和中学数学教师，本书的许多材料来源于他们的智慧和创造。

由于水平所限，书中若有不妥和差错，敬请专家和读者批评指正。作为抛砖引玉，我们热情地期待更多的优秀奥林匹克数学教材问世。

编　者

1992 年 9 月 1 日

目　　录

第十一章 组合基础

组合数学是一个既古老又年轻的离散数学分支. 近几十年来，由于计算机科学的发展和日益增多的组合问题的出现，推动了组合理论的发展与丰富. 这直接影响到数学竞赛的命题工作. 竞赛中出现的初等组合问题的解决并不需要复杂的数学知识，然而常常在趣味性的陈述下包含了高超的技巧，无论从智力训练的角度，还是从竞赛准备的角度来理解和钻研这些问题都是十分有意义的.

本书分两章介绍组合基础知识和基本方法. 本章以组合概念和构造性问题为主，但也不回避计数问题.

A

§11.1 加法原理和乘法原理

首先介绍加法原理和乘法原理. 它们既是基本的组合计数原理，同时也是进一步研究其它组合问题的基础.

1. 加法原理

借助有关集合划分的知识，我们给出加法原理的集合论形式.

加法原理 设 S 为完成一件事的所有方法的集合，它可以划分为 n 个互不相交的非空子集：$A_1, A_2, \cdots, A_n$，$|A_i| = m_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 那么，完成这件事共有

$$N = |S| = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法.

使用加法原理的关键在于对所计数的对象进行“完全分组”.

例 1 25 名棋手参加一次国际象棋比赛，他们的实力各不相同，每回对奕都是强者取胜．试问，最少需要比赛多少场，才能从中确定出两名实力最强的选手来？

解 根据奥林匹克规则（即单淘汰制），首先可通过 $25-1=24$ 场比赛确定出冠军．其次再根据实力确定出可与冠军匹敌的选手，候选人可有 5 人．从而根据奥林匹克规则，还需通过 4 场比赛，以确定出 5 人中的最强者．由加法原理知，共需进行 $24+4=28$ 场比赛．

例 2 在由 64 个小方格组成的正方形国际象棋棋盘中，有多少个由整数个小方格组成的大小或位置不同的正方形？

解 分别计算 $8\times8,7\times7,6\times6,5\times5,4\times4,3\times3,2\times2,1\times1$ 的正方形的个数．由加法原理共有 $1^2+2^2+\cdots+8^2=204$ 个大小或位置不同的正方形．

下面来看一个多次使用加法原理的例子．

例 3 一个正三角形，每边被等分为 n 份，过各分点作其它两条边的平行线．一共产生多少个三角形（包括原来的三角形在内）？

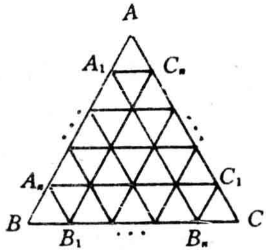


图 11.1-1

解 如图 11.1-1．设正三角形的边长为 1，首先考虑“头朝上”的三角形，即平行于水平线的那条边在其对角顶点下的三角形．边长为 $\frac{1}{n}$ 的“头朝上”的三角形有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

个；边长为 $\frac{2}{n}$ 的“头朝上”的三角形有

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

个；……边长为 1 的“头朝上”的三角形有 1 个．从而，“头朝

上”的三角形个数为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\text{ 个.}$$

然后，考虑“头朝下”的三角形的个数. 边长为$\frac{1}{n}$的“头朝下”的三角形有

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{(n-1)n}{2}$$

个；边长为$\frac{2}{n}$的“头朝下”的三角形有

$$(n-3)+(n-4)+\cdots+1=\frac{(n-3)(n-2)}{2}$$

个；……边长为$\frac{k}{n}$的“头朝下”的三角形有

$$\sum_{i=1}^{n-2k+1} i \quad (n+1>2k)$$

个. 故当 n 为奇数时，“头朝下”的三角形有

$$\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-3}i+\cdots+\sum_{i=1}^{2}i=\frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24}\text{ 个;}$$

当 n 为偶数时，“头朝下”的三角形有

$$\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-3}i+\cdots+\sum_{i=1}^{1}i=\frac{n(n+2)(2n-1)}{24}\text{ 个.}$$

所以，一共产生的三角形的个数为

$$\begin{cases}\dfrac{2n^3+5n^2+2n-1}{8}, & \text{当 } 2\nmid n \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{2n^3+5n^2+2n}{3}, & \text{当 } 2\mid n \text{ 时.}\end{cases}$$

2. 乘法原理

加法原理讨论的是可完全分组的计数问题. 有些计数问题的求解必须分步骤一步一步进行，解决这类问题的方法由下面的乘法原理给出.

乘法原理 设完成一件事需要 n 个步骤，实现第 i （$i=1,2,$

$\cdots,n$）个步骤的方法的集合为 A_i，$|A_i|=m_i$. 那么，完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

例 4 将整数 $1,2,\cdots,n$ 排成一列，使得每一个整数严格大于排在它前面的所有的数或者严格小于排在它前面的所有的数. 有多少种不同的排列？

解 按 n 个步骤进行. 第一步排第 n 个位置上的数有两种可能：n 或 1. 第二步排第 $n-1$ 个位置上的数也有两种可能：若第一步排 n，则第二步排 $n-1$ 或 1；若第一步排 1，则第二步排 n 或 2. 以后每一步都与此类似. 由乘法原理知所求排列共 2^n 种.

例 5 某州发行的执照的底版由 6 个数字组成（数字指 0 到 9）. 每两个底版至少有两处的数字不同（因此底版 $\boxed{027592}$ 与 $\boxed{020592}$ 不能同时使用）. 试确定（并证明）这个州可以发行的执照底版的数目最大是多少？

解 至多可以发行 10^5 个执照底版.

我们可以造出 10^5 个互不相同的 5 位的底版 $a_1a_2a_3a_4a_5$. 第 6 位数字 a_6 规定为和 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 的个位数字. 如果两个底版的前 5 位数字 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 与 $a_1'a_2'a_3'a_4'a_5'$ 中仅有一处不同，那么第 6 位数字也不相同. 因此得到 10^5 个所需的底版.

另一方面，在 10^5+1 个底版中，必有两个底版的前 5 位完全相同，从而它们至多有一处（第 6 位）数字不同.

一些计数问题要同时应用加法原理和乘法原理来解决.

例 6 设正 $2n+1$ 边形内接于一个半径为 r 的圆. 考虑所有以这 $2n+1$ 边形的顶点为顶点的三角形，其中有多少个三角形内部含圆心？

解 先取定一个顶点 A，将其它顶点顺次标为 $1,2,\cdots,2n$.

如图 11.1-2，设 A,i（$1\leqslant i\leqslant n$）的对径点分别为 B,C，则 $\overset{\frown}{BC}$（$=\overset{\frown}{Ai}$）上有 i 个顶点. 这些顶点而且也只有这些顶点与 A,i 构成的三角形内部含圆心. 于是以 A 及 i（$1\leqslant i\leqslant n$）为顶点的、内部

含圆心的三角形有$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$个.

A 有 $2n+1$ 种取法. 在和

$$(2n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}$$

中每个三角形出现 3 次，所以共有

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

个三角形内部含圆心.

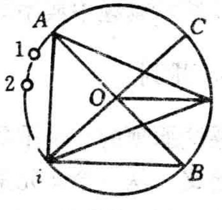


图 11.1-2

对于一些从正面直接计算不易求解的计数问题，可以考虑采用从反面间接计算的技巧.

例 7 有多少个能被 3 整除而又含有数字 6 的五位数?

因为五位数中含有数字 6 的情况比较复杂：可以含一个 6，两个 6，……乃至 5 个 6，而这些 6 又可能出现在各个不同的数位上. 故正面分类计算太繁. 但反过来一想，“能被 3 整除而又不含数字 6”的五位数只有一类，而且较易计算其个数. 由“能被 3 整除的五位数”的总数再减去“能被 3 整除而又不含数字 6”的五位数的个数便得所求结果.

解 易知，在由 10000 至 99999 这 90000 个五位数中，共有 30000 个可被 3 整除. 下面求其中不含数字 6 的有多少个.

这可从逐位讨论数字的可能情况入手. 在最高位，不能为 0 和 6，因此有 8 种可能情况. 在千、百、十位上，不能为 6，各有 9 种可能情况. 在个位上，不仅不能为 6，还应使整个五位数能被 3 整除，因此所出现的数应与前 4 位数字之和被 3 除的余数有关：当该余数为 2 时，个位上可为 1，4，7 中的一个；当该余数为 1 时，个位上可为 2，5，8 中的一个；当该余数为 0 时，个位上可为 0，3，9 中的一个. 总之，不论前 4 位数如何，个位数字都有 3 种可能情况. 所以，这类五位数的个数为 $8\times9\times9\times9\times3=17496$.

因此，不含数字 6 而又可被 3 整除的五位数共有

$$30000-17496=12504 \text{ 个}.$$

像此例这样利用“总数－不合格数＝合格数”的方法进行计数，是数学解题中典型的避繁就简从反面考虑的策略.

3. 排列

乘法原理的一个重要应用是以之推导排列数公式.

定义 从一个 n 元素集里，每次取出 r 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素里取出 r 个不同元素的**排列**，简称 **r-排列**. 所有这样的排列的个数叫作**排列数**，记作 P_n^r. 特别地，当 $r=n$ 时，叫作 n 个元素的**全排列**.

由乘法原理立得

$$P_n^r=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1),$$

或 $P_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$.

为了使上式当 $r=n$ 和 $r=0$ 时有意义，我们规定

(1) $0!=1$. 这时，$P_n^n=\dfrac{n!}{0!}=n!$.

(2) $P_n^0=1$. 这说明从 n 个元素中不取任何元素的排列恰有一种.

例 8 在十进制记数中，奇偶数码相间且各位数码不同的 8 位奇数共有多少个?

解 分 3 步处理. 第一步：填千万位上的数码，可填 2,4,6,8 之一，有 P_4^1 种填法；第二步：填十万位、千位、十位的数码可从千万位填后余下的 3 个偶数及 0 中任选 3 个来填，有填法 P_4^3 种；第三步填其它 4 个数位，可从 1,3,5,7,9 中任选 4 个来填，有填法 P_5^4 种. 由乘法原理，所求 8 位数有 $P_4^1P_4^3P_5^4=11520$ 个.

例 8 这类问题称为“限位”排列. “限位”可以是限制某些元素必须排在什么位置，也可以是限制某些元素不能排在某些位置，解决这类问题，可从有限制的“元素”或“位置”入手，也可以采用像例 7 一样间接求解的方法.

例 9 圆桌的 9 个位置上放着 9 样不同的点心和饮料. 6 位先

生与 3 位女士共进早餐，3 位女士两两不相邻的坐法有多少种?

解 从圆桌的某个位置开始，将 9 个位置依次编为第 1 号、第 2 号、……第 9 号，然后将 9 个人排成一列从左到右依次坐第 1 号、第 2 号、……第 9 号即可. 现在来排这 9 个人. 先让 6 位先生从左到右站成一列，有 P_6^6 种站法，然后让 3 位女士分别站在排头或排尾或两位先生之间，有 P_7^3 种站法. 因此，9 个人排成一列有 $P_6^6P_7^3$ 种站法. 但如果排头排尾都是女士，当 9 个人围桌而餐时，则这两位女士相邻，这类情况有 $P_3^2P_6^6P_5^1$ 种. 所以，女士不相邻的坐法共有 $P_6^6P_7^3-P_3^2P_6^6P_5^1=129600$ 种.

例 9 的问题称为“间隔”排列. 解决这类问题可以从不必间隔的元素入手，先将其排好，然后将不能相邻的元素一个一个插入已经排好的元素两两之间的空位里，便可将全部元素按要求排好.

还有一类较常见的被称为“集团”排列的问题，我们把它放在本节的习题中.

例 10 1,2,3,4,5,6 的一排列 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 具有性质：对 $1\leqslant n\leqslant 5$，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 不构成 $1,2,\cdots,n$ 的排列. 求这种排列的个数.

解 显然 $p_1\neq 1$.

$p_1=6$ 的 5! 个均合乎要求；

$p_1=5$ 的当中，$p_6=6$ 的 4! 个不合乎要求；

$p_1=4$ 的当中，4×××6,4××65 均不合乎要求；

$p_1=3$ 的当中，3×××6,3××65,3×645,3×564,3×654 不合乎要求；

$p_1=2$ 的当中，2×××6,2××65,2×645,216345,21×35,2×564,2×654,21×34,21×3×4,21×××3 不合乎要求.

因此，所求的个数为：$5!+(5!-4!)+(5!-4!-3!)+(5!-4!-3!-3\times 2!)+(5!-4!-2\times 3!-6\times 2!-1)=461$.

习题 11.1

A 组

1. 填空题

(1) 三角形的 3 条边长均为正整数，其中有一条边长为 4，但它不是最短的边，这样不同的三角形共有________个.

(2) 小于 50000 且含有奇数个数字“5”的五位数共有________个.

(3) 将 A,H,S,M,E 的字母作排列共有 120 种. 每一种排列看作为一个有 5 个字母的普通单词，然后按照字典次序将它们全部排列起来. 在这样的编排中第 86 个单词的最后一个字母是________.

(4) 给定 6 个数码：0,1,2,3,4,5. 由这些数码所组成的所有 4 位数的和等于________.

2. 在所有四位数的号码（从 0000 到 9999）中，有多少个号码的前两位数字之和同末两位数字之和相等？

3. 某个国王的 25 位骑士围坐在他们的圆桌旁，他们中间的 3 位被选派去杀一条恶龙. 问被挑到的 3 位骑士中至少有两位是邻座的选派方法有多少种？

4. 要排一张有 6 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的演出节目单，任何两个舞蹈节目不得相邻，问有多少种不同的排法.

5. 由 1—7 七个数字构成无重复数字的七位数中，偶数码相邻的有多少个？

6. 有 $2n$ 个人参加收发电报培训，每两人结为一对互发互收，有多少种不同的结对方式？

7. 3 边长为互不相等的自然数的三角形中最大边长恰为 n 的共有 600 个，求 n 的值.

B 组

8. 纸上所画的网格由 n 条水平直线和 n 条竖直直线组成. 试问，沿着这些网线可以作出多少条不同的具有 $2n$ 段的闭折线来，使其中每条折线都经过每一条水平线和每一条竖直线？

9. 设方格线上的最小方格的边长为 1. 而 O 是方格纸上的一个固定的结点. 现以 p_k 表示方格纸上的以 O 为起点、长度为 k，且各段都是小方格的边

的所有不同折线的条数. 证明：对一切 k，都有 $p_k<2\cdot 3^k$.

10. 设 r 与 s 为给定正整数. 设由 4 个正整数作成之有序四数组 (a,b,c,d) 满足条件

$$\begin{aligned}3^r\cdot 7^s&=\mathrm{lcm}[a,b,c]=\mathrm{lcm}[a,b,d]\\&=\mathrm{lcm}[a,c,d]=\mathrm{lcm}[b,c,d].\end{aligned}$$

试导出计算这种四数组的个数的公式，所得公式应是 r 与 s 的一个函数.（注意，记号 $\mathrm{lcm}[x,y,z]$ 表示 x,y,z 的最小公倍数.）

11. 证明：数 $1,2,\cdots,1987$ 可以用 4 种颜色染色，使得没有一个 10 项的等差数列，它的项是同一种颜色.

12. 设 $[r,s]$ 表示正整数 r 和 s 的最小公倍数. 求有序三元正整数组 (a,b,c) 的个数，其中，$[a,b]=1000$，$[b,c]=2000$，$[c,a]=2000$.

§11.2 组　　合

与排列相对照的是组合.

定义　n 元素集的一个 r 元子集叫作从 n 个不同元素中取出 r 个不同元素的**组合**，简称 **r-组合**. 所有这样的组合的个数叫作**组合数**，记作 C_n^r.

比较排列与组合的概念不难看出他们之间的差别与联系. 一方面，排列的元素之间是有顺序的，组合的元素之间是没有顺序的；另一方面，对 n 元集的每一个 r-组合的 r 个元素作一全排列就得到这 n 元集的一个 r-排列. 这说明同一 n 元集的 r-排列与 r-组合之间存在如下关系：

$$P_n^r=C_n^r\cdot r!.$$

由此即得**组合数公式**

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{r!},$$

或者 $C_n^r=\dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$.

当 $r=0$ 时，我们规定 $C_n^0=1$. 这是符合实际情况的.

利用上述公式，容易证明下面两个组合恒等式：