普通高等教育“十二五”规划教材辅导用书

普通高等学校数学教学丛书

高等数学习题课教程

（下册）

张志海　姬红艳　霍京京　主编

科学出版社

普通高等学校数学教学丛书

高等数学习题课教程

（下册）

张志海　姬红艳　霍京京　主　编
杨　珠　刘立民　刘志民　刘晓辉　副主编

科学出版社

内 容 简 介

本书按照教育部颁发的《高等数学课程教学基本要求》和《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》，认真总结多年来积累的教学和考研辅导经验，通过对教学内容的分析、总结，对题型和具体题目的认真筛选编写而成.

全书分上、下两册. 下册共11讲，每讲基本包括考纲要求、基本概念、常用性质及结论、常见问题和处理方法及技巧、解题应注意的问题，并通过实例对其如何用于求解具体问题进行说明，以达到揭示解题规律，归纳、总结解题方法的目的.

本书可作为高等数学习题课教材，也可作为工科各专业本科生学习高等数学课程的学习指导教材或备考研究生的复习资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程. 下册/张志海，姬红艳，霍京京主编. —北京：科学出版社，2013

(普通高等学校数学教学丛书)

ISBN 978-7-03-038167-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张…②姬…③霍… Ⅲ.①高等数学-高等学校-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第159601号

责任编辑：王胡权 / 责任校对：赵桂芬

责任印制：阎 磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013年7月第 一 版 开本：720×1000 B5

2013年7月第一次印刷 印张：14

字数：283 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

随着我国高等教育的发展，高等院校本科的招生量逐年扩大，接受高等教育的人越来越多. 高等数学作为高校理工科学生的一门重要基础课，也作为硕士研究生入学考试的一门重要课程，越来越受大学生们的重视. 如何在大学期间学好高等数学，为后续课程（尤其是专业课程）的学习奠定好基础，进而顺利参加硕士研究生入学考试，取得好成绩，是大学生们最为关心的问题，所有这一切都要求大学生们了解高等数学的主要内容，掌握数学分析问题、解决问题的方法，分清主次，力求在内容上达到一定的深度和广度.

为了帮助同学们通过复习，深刻理解概念，熟练掌握解题的思路和方法，我们根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》和《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》，认真总结了多年来的教学经验和考研辅导班积累的经验、资料，经过对题型和题目的认真筛选，编写了这本习题课教程.

本书的编写，力求选题精练，分析透彻，覆盖面广. 特点如下：①对基本概念不是简单罗列而是结合具体题目，将概念的理解渗透于做题过程之中；②对基本题型、方法给予总结；③例题编排由浅入深循序渐进；④适当选用了一些往年考研试题，努力使其具备适用面广、针对性强、综合性和灵活性明显、重点突出等特点.

本书参照同济大学应用数学系所编、高等教育出版社出版的《高等数学》（上、下册）而编写，书后附有与教材配套使用的高等数学同步练习册的习题答案，可作为教师教学过程中的习题课参考书，也可作为高等数学教材的后继复习参考书和学生考研参考用书.

在本书编写过程中，河北工程大学的各级领导给予了关心和支持；高等数学教研室的同仁们为本书的编写提出许多好的想法与建议；董卫、贾瑞娟、刘国华、田伶改四位教授审阅了书稿并提出修改意见，尤其是哈明虎教授在百忙中统阅书稿并为本书的编写付出了心血；科学出版社对本书的出版给予了大力支持和帮助，在此一并致谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有疏漏和不足之处，恳请各位同仁和读者批评指正.

编　者

2013 年 3 月于邯郸

目　　录

第七章　微 分 方 程

《考纲》要求

常微分方程的概念,微分方程的通解、初始条件和特解,变量可分离的方程,齐次方程,一阶线性方程,伯努利方程,全微分方程,用简单的变量代换求解方程,可降阶的高阶微分方程(三种常见类型),线性微分方程解的结构,二阶常系数齐次线性微分方程,高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程,自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与乘积的二阶常系数非齐次线性微分方程,欧拉方程,包含两个未知函数的一阶常系数线性微分方程组,微分方程的幂级数解法,用微分方程解简单的几何和物理问题.

习题课 13　微分方程的类型及相应解法

一、微分方程基本概念

(1) 含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程,若微分方程中未知函数只有一个自变量,则称为常微分方程(简称方程),否则称为偏微分方程.

(2) 微分方程中所含最高阶导数或微分的阶数称为该方程的阶.

(3) 满足微分方程的函数称为该方程的解. 若在解的表达式中含有与方程的阶数相同个数的独立任意常数,则称此解为该方程的通解. 不含任意常数的微分方程的解称为特解.

(4) 用来确定通解中的任意常数的条件称为初始条件.

二、一阶微分方程的解法

1. 可分离变量的方程

一切可写为 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 的一阶微分方程,称为可分离变量型微分方程,其特点是可以把变量 x 和 y 分别置于等式的一边,解法关键是变量分离后两边积分.

2. 齐次方程

一切可写为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一阶微分方程,称为齐次型微分方程. 其特点是方程

右端可视为由函数 $f(u)$ 和 $u=\frac{y}{x}$ 复合而成的函数，解法关键是通过变换 $u=\frac{y}{x}$，把原方程转化为可分离变量型的方程，以求出未知函数 u，从而进一步获得原方程的解.

3. 一阶线性微分方程

一切可写为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的微分方程即为一阶线性微分方程. 若 $Q(x)\equiv0$ 则称该方程为齐次的，否则称为非齐次的. 其特点是方程中未知函数 y 及其导数 y' 出现都是一次的. 显然，给定一非齐次的方程，就对应的写出一齐次的方程，该齐次方程称为与非齐次对应的齐次微分方程.

4. 伯努利方程

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\neq0,1)$ 的微分方程即为伯努利方程. $n=1$ 时该方程为一阶线性齐次型；$n=0$ 时为一阶线性非齐次方程；$n\neq0,1$ 时的伯努利方程，可在变换 $u=y^{1-n}$ 下化为线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$.

不难看出，求解微分方程的特点是，该方程归属什么类型，就按该类型的求解方法求解. 因此方程给出后，首先需观察该方程的类型.

例 1　判断下列方程的类型，并求其通解.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy}{1+x^2}$；

(2) $y'+3y=\mathrm{e}^{2x}$；

(3) $xy'+2y=3x$；

(4) $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x-xy^2\ln x\mathrm{d}x=0$.

解　(1) 这是可分离变量的方程，分离变量得到 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$. 两边积分得到

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\ ,$$

即 $\ln|y|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1$，此即 $\ln|y|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C_2$，其中 $C_1=\ln C_2$. 化简 $y=\pm C_2\sqrt{1+x^2}$，记 $C=\pm C_2$，则得到方程的通解为 $y=C\sqrt{1+x^2}$.

(2) 方程为一阶线性非齐次方程，其对应的齐次方程为 $y'+3y=0$，其通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-3x}.$$

设 $y=C(x)e^{-3x}$,则 $y'=C'(x)e^{-3x}-3C(x)e^{-3x}$. 代入原方程得到

$$C'(x)e^{-3x}-3C(x)e^{-3x}+3C(x)e^{-3x}=e^{2x},$$

化简得到 $C'(x)e^{-3x}=e^{2x}$,解得 $C(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+C_1$,其中 C_1 为任意常数.

从而所求方程的通解为

$$y=\left(\frac{1}{5}e^{5x}+C_1\right)e^{-3x}=\frac{1}{5}e^{2x}+\frac{C_1}{5}e^{-3x}=\frac{1}{5}e^{2x}+Ce^{-3x}.$$

注意　一阶线性非齐次微分方程的求解也可直接使用公式.

(3) 这是齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$,则 $y'=xu'+u$,代入原方程得

$$(xu'+u)+2u=3,$$

分离变量可得

$$\frac{du}{3-3u}=\frac{1}{x}dx,$$

两端同时积分

$$\int\frac{du}{3-3u}=\int\frac{1}{x}dx,$$

此即 $-\frac{1}{3}\ln|3-3u|=\ln|x|+\ln C_1$.

故所求方程的通解为

$$y=\frac{C}{x^2}+x,\quad C\text{ 为任意常数}.$$

(4) 将原方程改写为 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y^2\ln x$,这是伯努利方程.

令 $u=y^{-1}$,则

$$\frac{du}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx},$$

代入上述方程得到

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=-\ln x,$$

上述方程为一阶线性非齐次方程,故有

$$u=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[-\int\ln x e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=x\left(C-\frac{1}{2}\ln^2 x\right),$$

从而原方程的通解为

$$xy\left(C-\frac{1}{2}\ln^2 x\right)=1.$$

此例结果表明:微分方程的通解可用隐函数形式来表达.

一阶微分方程除上面给出的四个类型外,还有全微分方程.因在求解方法上需涉及曲线积分问题,留待后面学习.

三、二阶线性微分方程的解法

1. 关于二阶线性微分方程的基本形式

形如

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

的方程称为二阶齐次线性微分方程.

形如

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \tag{2}$$

的方程称为二阶非齐次线性微分方程.

2. 二阶线性微分方程解的结构

定理 1　如果函数 $y_1(x)$,$y_2(x)$是方程(1)的两个解,那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{3}$$

也是方程(1)的解,其中 C_1,C_2 是任意常数.

定理 2　如果函数 $y_1(x)$,$y_2(x)$是方程(1)的两个线性无关的特解,那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$(C_1,C_2 是任意常数)是方程(1)的通解.

定理 3　设 $y^*(x)$是方程(2)的一个特解,$y(x)$是与之对应的方程(1)的通解,那么 $y=y(x)+y^*(x)$是方程(2)的通解.

定理 4　设二阶非齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x), \tag{4}$$

而 $y_1^*(x)$,$y_2^*(x)$分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

与方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解,那么 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$就是方程(4)的特解.

3. 二阶常系数齐次线性微分方程的解法

形如

$$y''+py'+qy=0(其中\ p,q\ 是常数) \tag{5}$$

的方程称为二阶常系数齐次线性微分方程.

代数方程 $r^2+pr+q=0$ 称为方程(5)的特征方程,根据特征方程三种解的情

况，方程(5)分别对应有如下表所示的通解：

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1,r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 2 求微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解.

解 这是二阶常系数齐次线性微分方程，其特征方程为 $r^2+r-2=0$，解该方程得到 $r_1=-2$，$r_2=1$，从而原微分方程的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$（C_1,C_2 是任意常数）.

例 3 求 $y''-6y'+9y=0$ 的通解.

解 所给微分方程的特征方程为 $r^2-6r+9=0$，解该方程得到 $r_1=r_2=3$，从而原微分方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$（C_1,C_2 是任意常数）.

例 4 求 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

解 所给微分方程的特征方程为 $r^2-2r+5=0$，解该方程得到 $r_{1,2}=1\pm 2i$，从而原微分方程的通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$（$C_1,C_2$ 是任意常数）.

4. 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法

形如

$$y''+py'+qy=f(x)\text{（其中 }p,q\text{ 是常数）}\tag{6}$$

的方程称为二阶常系数非齐次线性微分方程.

由前面知，方程(6)的通解求法可通过先求对应的齐次方程的通解及其一个特解即可. 根据 $f(x)$ 的两种常见形式，对方程(6)的特解有如下两种特定形式.

1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型，其中 λ 是常数，$P_m(x)$ 是 x 的一个 m 次多项式：

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m,$$

则方程(5)具有如下形式的特解

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x},$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式，数 k 按 λ 不是特征方程的根，是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取为 0，1 或 2.

例 5 求微分方程 $y''-2y'-3y=xe^{-x}$ 的通解.

解 原方程是一个二阶常系数非齐次线性方程，对应的齐次方程为

$$y''-2y'-3y=0,$$

其特征方程为

$$r^2-2r-3=0.$$

解得

$$r_1=3,\quad r_2=-1.$$

故齐次方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

设原方程的一个特解为 $y^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^{-x}$，将 y^* 代入原方程，消去 e^{-x}，得

$$-8Ax+2A-4B=x,$$

比较系数得到 $A=-\frac{1}{8}$，$B=-\frac{1}{16}$，故原方程的特解为

$$y^*=x\left(-\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{-x}=-\frac{x}{16}(2x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

于是原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{x}{16}(2x+1)\mathrm{e}^{-x}\,(C_1,C_2\text{ 是任意常数}).$$

2) $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_m(x)\sin\omega x]$ 型，其中 λ,ω 是常数，$P_l(x)$，$P_m(x)$ 分别是 x 的 l 次、m 次多项式，其中一个可以为零. 则方程(5)具有如下形式的特解

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$，数 k 按 $\lambda+\mathrm{i}\omega$ 不是特征方程的根、或是特征方程的根依次取 0 或 1.

例 6 求微分方程 $y''+3y'+2y=2x\sin x$ 的特解.

解 原方程是一个二阶常系数非齐次线性方程，对应的齐次方程为

$$y''+3y'+2y=0,$$

其特征方程为

$$r^2+3r+2=0.$$

解得

$$r_1=-1,\quad r_2=-2.$$

故齐次方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}.$$

由于 $\lambda+\mathrm{i}\omega=0+\mathrm{i}$ 不是特征方程的根，故设原方程的一个特解为

$$y^*=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x.$$

将 y^* 代入原方程，比较系数得到

$$A=\frac{1}{5},\quad B=\frac{6}{25},\quad C=-\frac{3}{5},\quad D=\frac{17}{25}.$$

故原方程的特解为

$$y^*=\left(\frac{1}{5}x+\frac{6}{25}\right)\sin x+\left(-\frac{3}{5}x+\frac{17}{25}\right)\cos x.$$

于是原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\left(\frac{1}{5}x+\frac{6}{25}\right)\sin x+\left(-\frac{3}{5}x+\frac{17}{25}\right)\cos x(C_1,C_2\text{ 是任意常数}).$$

注 1　由定理 4 及上面关于 $f(x)$ 的两种基本形式，可推广非齐次方程的形式.

例 7　求微分方程 $y''+y'=\frac{1}{2}\cos 2x+\mathrm{e}^x+x^2+\frac{1}{2}$ 的特解.

解　设 $f_1(x)=\frac{1}{2}\cos 2x, f_2(x)=\mathrm{e}^x, f_3(x)=x^2+\frac{1}{2}$，且设 y_1^*, y_2^*, y_3^* 分别是非齐次方程 $y''+y'=f_1(x)$，$y''+y'=f_2(x)$，$y''+y'=f_3(x)$ 的特解. 又方程 $y''+y'=f_1(x)$ 即 $y''+y'=\frac{1}{2}\cos 2x$ 属于上面第 2 种形式，故设

$$y_1^*=A_1\cos 2x+B_1\sin 2x,$$

代入方程 $y''+y'=\frac{1}{2}\cos 2x$，比较系数得到

$$A_1=-\frac{1}{10},\quad B_1=\frac{1}{20},$$

即有 $y_1^*=-\frac{1}{10}\cos 2x+\frac{1}{20}\sin 2x$.

方程 $y''+y'=f_2(x)$，即 $y''+y'=\mathrm{e}^x$ 属于上面第 1 种形式，故设

$$y_2^*=A_2\mathrm{e}^x,$$

代入方程 $y''+y'=\mathrm{e}^x$，比较系数得到 $A_2=\frac{1}{2}$，即有

$$y_2^*=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x.$$

方程 $y''+y'=f_3(x)$，即 $y''+y'=x^2+\frac{1}{2}$ 属于上面第 1 种形式，故设

$$y_3^*=x(A_3x^2+B_3x+C_3),$$

代入方程 $y''+y'=x^2+\frac{1}{2}$，比较系数得到

$$A_3=\frac{1}{3},\quad B_3=-1,\quad C_3=\frac{5}{2},$$

即有 $y_3^*=x\left(\frac{1}{3}x^2-x+\frac{5}{2}\right)$.

由定理 4 知原方程具有如下的特解

$$y^*=-\frac{1}{10}\cos 2x+\frac{1}{20}\sin 2x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+x\left(\frac{1}{3}x^2-x+\frac{5}{2}\right).$$

四、可降阶的高阶微分方程

本部分主要是以二阶微分方程为例,对高阶微分方程通过变换化为较低阶的方程,从而利用已学方法求解方程. 有 3 种常见形式.

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型

其特点是方程右边只含 x,解法关键是逐次积分可逐次降阶以获得求解.

例 8　求微分方程 $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的通解.

解　在原方程两边求积分,得到

$$y' = \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C_1,$$

对上式两边再求积分,得到

$$y = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + C_1 x,$$

即 $y=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$($C_1,C_2$ 是任意常数).

2. $y''=f(x,y')$ 型

其特点是方程不显含 y,解法关键是作变换 $y'=p$,则有 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$代入原方程可解得 $p=\phi(x,C_1)$,即 $y'=\phi(x,C_1)$,最后两边积分可解得 y.

例 9　求微分方程 $y''-y'=x$ 的通解.

解　令 $y'=p$,则原方程变为 $p'-p=x$,这是关于 p 的一阶非齐次线性微分方程. 由公式得到

$$p = \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\left(C_1 + \int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right) = C_1\mathrm{e}^x - x - 1 .$$

从而有

$$y = \int (C_1\mathrm{e}^x - x - 1)\mathrm{d}x = C_1\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2 - x + C_2 \quad (C_1,C_2\text{ 是任意常数}).$$

注 2　此方程也可按照二阶常系数非齐次线性方程的方法求解.

3. $y''=f(y,y')$ 型

其特点是方程不显含 x,解法关键是作变换 $y'=p$,则由复合函数求导法则得到 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,将其代入原方程可解得 $p=\phi(y,C_1)$,即 $y'=\phi(y,C_1)$,最后

两边积分可解得 y.

例 10　求微分方程 $y''=(y')^3+y'$ 的通解.

解　令 $y'=p$,则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入原方程得到

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^3+p.$$

这是可分离变量的方程,分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=\mathrm{d}y.$$

两边积分得到 $\arctan p=y-C_1$,即

$$p=\tan(y-C_1).$$

由假设知道$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan(y-C_1)$,移项解得

$$\ln\sin(y-C_1)=x+C_2,$$

由此得到 $y=C_1+\arcsin(\mathrm{e}^{C_2}\mathrm{e}^x)$ (C_1,C_2 是任意常数).

五、常见问题及处理方法

1. 由方程的通解确定方程

一般方法是通过求导建立待定常数需满足的等式,联立解方程或方程组,消去通解中的待定常数,即得所求方程.

例 11　设一微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$,试确定该微分方程.

解　(分析:通解中含两个常数,所以所求微分方程为二阶的)对等式两端求 x 的导数可得

$$y'=C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x}, \tag{7}$$

$$y''=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{2x}, \tag{8}$$

用式(8)减式(7)得

$$C_2=\frac{y''-y'}{2}\mathrm{e}^{-2x},$$

将其代入式(7)有

$$C_1=(2y'-y'')\mathrm{e}^{-x},$$

将 C_1,C_2 代入通解中便有

$$y=2y'-y''+\frac{y''-y'}{2},$$

故所求微分方程为

$$y''-3y'+2y=0.$$

显然,该问题也可根据常系数线性微分方程解的结构来求解,如 e^x,e^{2x} 是二阶常系数齐次线性方程的两个线性无关的特解,由此可确定特征方程为 $r^2-3r+2=0$,故所求方程为

$$y''-3y'+2y=0.$$

例 12 已知 $y_1=3$,$y_2=3+x^2$,$y_3=3+e^x$ 是二阶线性非齐次方程的解,求方程的通解及方程.

解 由 y_1,y_2,y_3 是所给方程的解,知道 $y_2-y_1=x^2$,$y_3-y_1=e^x$ 是对应的齐次方程的解,且 $\frac{e^x}{x^2}\neq k$(常数),此即说明 e^x 和 x^2 线性无关,$y_1=3$ 是原非齐次方程的一个特解,故原方程的通解为

$$y=C_1x^2+C_2e^x+3,$$

对 y 求一阶、二阶导数得到

$$\begin{cases} y'=2C_1x+C_2e^x, \\ y''=2C_1+C_2e^x, \end{cases}$$

消去 C_1,C_2 得到 $\frac{y''-y'}{2-2x}=C_1=\frac{y'-y+3}{2x-x^2}$,于是求得方程为

$$(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=6(1-x).$$

2. 方程的通解不一定是它的全部解

方程的通解只是要求解中含有的独立取值的参数的个数与方程的阶数相同.

例 13 求微分方程 $y'=xy^2$ 的通解.

解 $y\neq 0$ 将方程变形为

$$\frac{dy}{y^2}=x,$$

两端同时积分可得通解

$$1=-\left(\frac{x^2}{2}+C\right)y.$$

显然,$y=0$ 也是该方程的解,但此解不在通解表达函数的范围中. 因此求方程的通解与求方程解的要求是不同的. 在求方程解的问题中,除求得其通解外,还需注意求通解过程中运算不合理所带来的方程某个特解的存在.

3. 求方程满足初始条件的特解时,需观察方程的特征及初始条件给定的具体情况,采取适当的对策

例 14 求 $y''+(y')^2=1$ 的通解和满足初始条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解.

解 令 $y'=p$,则有 $p'=1-p^2$,即 $\frac{dp}{dx}=1-p^2$,故在 $1-p^2\neq 0$ 时

$$p=y'=\frac{C_1\mathrm{e}^x-1}{1+C_1\mathrm{e}^x},$$

所以,微分方程的通解为

$$y=x+2\ln(\mathrm{e}^{-x}+C_1)+C_2,$$

而由 $1-p^2=0$ 得 $y=\pm x+C$,显然也是方程的解.故所求满足初始条件的特解为

$$y=x+1.$$

4. 已知的函数为分段函数时的微分方程的求解

若方程中的已知函数以分段函数形式给出时,原则上先根据各区间段函数的表达求方程在相应区间段的解,而后利用分段函数表达式不同的界点处解的连续、可导性确定通解的表达.

例 15 求连续函数 $y=y(x)$,$x\geqslant0$,满足 $y(0)=0$,且在$[0,1)$,$(1,+\infty)$内满足微分方程 $y'+y=\phi(x)$,其中 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant1,\\0, & x>1.\end{cases}$

解 当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,方程为 $y'+y=1$,这是一阶线性方程,其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1+\mathrm{e}^x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+1,$$

由条件 $y(0)=0$,得到 $C_1=-1$,故 $y=\mathrm{e}^{-x}+1$.

当 $x>1$ 时,方程为 $y'+y=0$,其通解为 $y=C_2\mathrm{e}^{-x}$.为使 $y(x)$在 $x=1$ 处连续,便有 $\lim\limits_{x\to1^-}y(x)=\lim\limits_{x\to1^+}y(x)$,即 $1-\mathrm{e}^{-1}=C_2\mathrm{e}^{-1}$,从而 $C_2=\mathrm{e}-1$,故 $y=(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-x}$.

因此,所求函数为 $y(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^x, & 0\leqslant x\leqslant1,\\(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-x}, & x>1.\end{cases}$

5. 在 y 视为 x 的函数,方程类型归属难确定时的处理

(1) 可将 x 视为 y 的函数,考察方程类型.

例 16 求 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=y^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$ 的通解.

解 (分析:如果 y 视为 x 的函数,方程可表示为

$$(x-y^2\mathrm{e}^y)y'-y=0,$$

显然,此方程不属一阶给出的任何一种可求解类型)将方程变形为

$$x'-\frac{x}{y}=-y\mathrm{e}^y.$$

这是一阶非齐次线性方程,使用公式可求得通解为

$$x=-y\mathrm{e}^y+Cy.$$

(2) 通过变量代换改变方程得方程类型.

例 17 求微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x+\sin(x+y)=0$ 的通解.

解　因为方程中含有 $\sin(x+y)$ 项，变量不易分离. 令 $x+y=u$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$. 代入原方程得到

$$\frac{du}{\sin u}=-\frac{dx}{x}.$$

两边积分得到

$$\ln(\csc u-\cot u)=-\ln x+\ln C,$$

即 $x[\csc(x+y)-\cot(x+y)]=C$ (C 为任意常数).

例 18　解方程 $xy'=y(\ln x+\ln y)$.

解　所给方程可变形为

$$d(xy)=\frac{xy(\ln xy)}{x}dx.$$

令 $u=xy$，则上方程可变为

$$\frac{du}{u\ln u}=\frac{1}{x}dx,$$

两边同时积分可得

$$\ln|\ln u|=\ln x+\ln C,$$

即 $u=e^{C_1x}$.

所以方程的解为

$$xy=e^{C_1x}.$$

六、微分方程的建立

微分方程是未知函数及其导数与已知函数之间的条件等式，是描述某一事物在任何位置、任何时刻都必须满足的表达式. 若给定的问题可归属于求未知函数的问题，同时从问题的描述中可找到与所求未知函数导数有关的信息，则该问题往往通过建立未知函数所满足的微分方程，达到求出未知函数的目的. 但应注意的是，这样的问题常是求方程满足一定条件的特解，因而需通过对问题的分析、考察，找到确定特解的初始条件.

1. 由含变限积分的等式建立方程

例 19　求分别满足下述关系式的 $f(x)$：

(1) $f(x)=\int_0^x f(x)dx$，其中 $f(x)$ 是可微函数；

(2) $f'(x)+xf'(-x)=x$.

解　(1) 由 $f(x)=\int_0^x f(x)dx$，知 $f(0)=0$. 对上式两边求导得到 $f'(x)=f(x)$.