高等学校数学学习辅导教材

考研数学
真题全解
及考点分析

陈小柱 编著　孙山泽 主审

（最新版·理工类）

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

考研数学真题全解及考点分析

阳师范学院图书馆
藏书

（最新版·理工类）

陈小柱　编著
孙山泽　主审

大连理工大学出版社

丛书策划：刘　杰

图书在版编目(CIP)数据

考研数学真题全解及考点分析：最新版·理工类/陈小柱编著.
大连：大连理工大学出版社，1999.10
ISBN 7-5611-1584-9

Ⅰ.考… Ⅱ.陈… Ⅲ.数学-高等数学-研究生-入学考试-
自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 04336 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河　邮政编码　116024
电话：0411-4708842　传真：0411-4708898
E-mail：dutp@mail.dlptt.ln.cn
大连业发印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米　1/32　字数：326 千字　印张：13
印数：8001—14000 册
1999 年 10 月第 1 版　　2000 年 3 月第 2 次印刷

责任编辑：刘　杰　　责任校对：习　文
封面设计：孙宝福

定价：16.80 元

卷首赠言

在学习方面您的最有价值的财富是一种积极的态度。

鲍比·迪波特《定量学习》

我们知道每个人的潜力远远超过已经实现的一切。

彼得·克莱恩《天天天才》

最新版前言

本书第一版自 1999 年 10 月出版，已销售一空。

第一版的第 67 页有**特别提示**：本部分与 § 7 无穷级数、§ 8 常微分方程的三项平均分之和高达 33 分，是考研复习的重点。所对应的同济四版《高等数学》(下册)教材中的最后三章内容，先要吃透。反之，若对此重点的复习不到位，则很难达到分数线！

果然，2000 年考研数学一试卷中，教材《高等数学》(下册)最后三章内容所占分数为：35 分！

本书的主审、北大教授孙山泽先生曾指出："本书可开发低年大学生的潜质，用于考研复习更是**立竿见影**！"

《高等数学习题全解》、《线性代数 · 复变函数 · 概率统计习题全集》和《考研数学真题全解及考点分析》出版后，呈献给了北大教授陈家鼎先生。陈教授在百忙中抽出时间，写信给作者。来信写道："这些书对学生复习和考研将**很有帮助**！"

2000 年考研数学一试卷中，有一道 8 分的概率统计题和《线性代数 · 复变函数 · 概率统计习题全解》一书第 303 页第 20 题完全相同。不久前一位考生面带微笑道：答卷时，当看完这道题后，心里立即**有了底**。

修订后的最新版，面向 2001 年考研的考生以及理工科低年级在校生，期待着您的宝贵意见！

作者

2000 年 3 月于大连凌水河畔

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一版前言

考研已热了。

世纪之交，登高望远，这一发展方向对人类未来所产生的积极影响是深远的。1977 年恢复的高考热，见证了沧桑巨变的改革开放二十年。新的千年就在眼前，考研热必将伴随着一个伟大的民族迎来伟大的复兴！

有关考研的参考书很多。本书有以下三大特色：

其一，**详细解答**了 1987 年～1999 年全部考研数学全真试题（理工类：数学一、数学二），并进行了精心的分类。这是一本工具书。由于这十三年间考研真题，决定了无数莘莘学子的人生命运，本书有保存价值。

其二，通过对试题进行解剖，分析出了**考点**。不同年份的命题专家们，多次考到的相同的知识点，称之为考点。考点吻合于课堂教学中的重点和难点。这些虽在《考试大纲》中有所规定，而本书诠释得更加生动具体，并已深入到出题人的思路中。如果您优先把本书的问题搞通，可大大减少盲目性。

其三，运用**资料索引**的手段，建立了考研真题与全国通用教材之间的内在联系。许多考生抱怨：**遗忘严重**！过去学过的几门考研课均已不同程度地忘却了。资料索引可帮您进退自如：当研究考研题有困难时，可从考研题很快地回到通用教材；当把通用教材的知识点弄通后，可迅速上升到考研题中来。考试题目千变万化，命题专家组也常换常新，但教材的内容相对稳定。吃透教材，以静制动。

本书的资料索引如同一束**投影光**，教材中相应的重点立即水落石出。教材中被“**考焦**”了的页码，务必心中有数。

考生们的时间和精力均很有限，是不得不考虑的客观事实。

然而，众多的考研参考书的特点为：**大量难题罗列**，容量大得惊人。读此类书，往往会心有余而力不足。“**食而不化，盲目复习**”是读此类参考书所产生的副作用。比如，据多位已在读的研究生透露，当年购买的几大厚本考研资料，根本没时间看完。再比如，在考研辅导时，有些学生宣称：我已把某某厚书全读完了，读“懂”了。但一测试，得分很少。这是“贪多”所产生的必然结果。

本书由北京大学数学科学学院孙山泽教授担任主审。北京大学博士、中国科学院博士后孙六全，北京大学博士、美国耶鲁大学博士后张双林均提出了宝贵的意见，并作了部分工作。

本书充分考虑到了理工科大一、大二、大三及大四的在校生。在学习《高等数学》、《线性代数》及《概率论及数理统计》课程的同时，在校生朋友可借助本书，把对应章节的学习及时加深到考研的水准，这可开发自身的潜质，为考研早作准备。因而，本书可作为同步**辅导教材**。本书同一版再版的《高等数学习题全解》、《线性代数·复变函数·概率统计习题全解》形成系统的知识体系，服务于广大的读者朋友。

限于作者水平，加之时间仓促，不妥之处一定存在，恳请广大读者提出批评和指正！

陈小柱

1999 年 10 月 1 日于北大未名湖畔

目　录

第一部分　考研数学一

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第二部分　考研数学二

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一部分

考研数学一

1987年～2000年三门课程分数分布表

课程 \ 分数 \ 年份	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
高等数学	70	68	68	68	68	68	68	68	69	68	60	59	60	60
线性代数	18	20	20	20	20	20	20	20	19	20	22	21	20	20
概率统计	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	18	20	20	20

第一篇　高等数学

§1　一元函数·极限·连续

§1.1　考点分析

考试频率　1987年～2000年，6年没考此部分，考过8年。

分数统计

本部分1987年～2000年分数分布表

年份	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
分数	0	5	0	6	0	3	0	0	3	8	0	3	3	5

(1)每次平均分*：2.6分$=\frac{36\text{分}}{14}$；

(2)每题平均分：3.6分$=\frac{36\text{分}}{10}$；

(3)最高分：8分(1996年)，最低0分(6次)；

(4)最近两年：1999年3分，2000年5分。

题型分布　填空6题，选择1题，计算2题，证明1题，合计10题。

逐题寻根　紧扣同济四版《高等数学》(上册、下册)，追根溯源。

---

* 请读者充分注意这项指标，在各部分的变化。

1.（1988，计算，5 分） 上册 P25，倒数第 3 行，函数的复合。$y=f[\varphi(x)]$。

2.（1990，填空，3 分） 上册 P25，倒数第 3 行，函数的复合。$y=f[\varphi(x)]$。

3.（1990，填空，3 分） 上册 P69，顺数等 3 行，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=$ e 的变型。

4.（1992，选择，3 分） 上册 P47，倒数第 3 行，$f(x_0+0)=f(x_0-0)$。

5.（1995，填空，3 分） 上册 P69，顺数第 3 行，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=$ e 的变型。

6.（1996，填空，3 分） 上册 P69，顺数第 3 行，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=$ e 的变型。

7.（1996，证明，5 分） 上册 P67，顺数第 1 行，单调有界数列必有极限。

8.（1998，填空，3 分） 上册 P167，洛必达法则。

9.（1999，填空，3 分） 上册 P167，洛必达法则，上册 P73 定理 2，等价无穷小交换。

10.（2000，计算，5 分） 上册 P47，倒数第 3 行，$f(x_0+0)=f(x_0-0)$。

请读者在教材内的对应部分涂上醒目的标识，以便把考研真题与通用教材紧密相连，减少考前复习的盲目性。

要点概括

(1)上册 P69，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 的变型：

$\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\mathrm{e}$ 考过 3 次。

(2)上册 P167,洛比达法则考到过 2 次,上册 P47,$f(x_0+0)=f(x_0-0)$考过 2 次。

(3)只有熟悉各种求极限的技巧(比如,等价无穷小的替换,$x\to 0$ 时,$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim\arctan x\sim\arcsin x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$a^x-1\sim x\ln a$,$(1+x)^\mu\sim\mu x$ 等等),才能拿下填空题。

(4)临近考试时,不宜再投入太多的时间和精力。

§1.2 本部分 1987 年～2000 年考研真题

1.(1988,计算,5 分) 设 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$及其定义域。

2.(1990,填空,3 分) 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$,则 $f[f(x)]=$( )。

3.(1990,填空,3 分) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=$( )。($a$ 为非零常数)

4.(1992,选择,3 分) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=$( )。

A. 2 B. 0 C. ∞ D. 不存在但不为∞

5.(1995,填空,3 分) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$( )。

当$x\to 0$时 $x\sim\sin x$(互换)

6.(1996,填空,3 分) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$( )。

7.(1996,证明,5 分) 设 $x_1=10$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$,($n=1,2,\cdots$),求证:数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限。求数列极限 记住解答

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 即可.

8.(1998,填空,3 分) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$( )。

9.（1999，填空，3 分） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$（　　）。

10.（2000，计算，5 分） 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$。

§1.3 相对应的真题全解

1.（1988，计算，5 分） **解** 由 $f(x)=e^{x^2}$ 及 $f[\varphi(x)]=1-x$ 得 $e^{\varphi^2(x)}=1-x,\varphi^2(x)=\ln(1-x)$

又 $\varphi(x)\geqslant 0$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

令 $\ln(1-x)\geqslant 0=\ln 1$，即 $1-x\geqslant 1$。故 $x\leqslant 0$，即 $\varphi(x)$ 的定义域：$(-\infty,0)$。

2.（1990，填空，3 分） 填：1

由 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ 得 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，即 $|f(x)|\leqslant 1$，故 $f[f(x)]=1$

3.（1990，填空，3 分） 填：e^{2a}

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a+a}$$
$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{2a}=e^{2a}$$

4.（1992，选择，3 分） 选：D

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，即$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在，可知

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}(x+1)\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}\xlongequal{\frac{1}{x-1}=t}\lim_{x\to\infty}e^t$$ 不存在。

5.（1995，填空，3 分） 填：e^6

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=[\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^6=e^6$$

6.（1996，填空，3 分） 填：ln2

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot 3a+a}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\cdot 1=\mathrm{e}^{3a}=8$$

得 $3a=\ln 8=3\ln 2$，即 $a=\ln 2$

7.（1996，证明，5 分） **证明** 先用数学归纳法证数列$\{x_n\}$是单调减小的，即 $x_n>x_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$

由 $x_1=10$ 且 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$，知 $x_2=\sqrt{x_1+6}=\sqrt{10+6}=4$，即 $x_1>x_2$

即 $n=1$ 时不等式成立。

设 $n=k$ 时，不等式 $x_k>x_{k+1}$成立。

由 $x_{k+1}=\sqrt{x_k+6}>\sqrt{x_{k+1}+6}=x_{k+2}$，可知 $n=k+1$ 时，不等式仍成立。

因而，对一切自然数，不等式 $x_n>x_{n+1}$总成立，即$\{x_n\}$是单调减少数列。

由 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}>0$，可知$\{x_n\}$有下界。

已知单调有界数列必有极限，可取$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$。

由$\lim\limits_{x\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x_n+6}$，得 $a=\sqrt{a+6}$，即 $a=3,-2$（不合题意，舍去）。

即$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=3$。

8.（1998，填空，3 分） 填：$-\dfrac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com