华大精制 高校教材

21世纪高等教育规划教材

数学系列

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

（第二版）

主编 尤正书 陈刚

SHUXUE XILIE

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

21世纪高等教育规划教材·数学系列

概率论与数理统计(第二版)

主　编　尤正书　陈　刚
副主编　陈　静　司会香
编　者：(以姓氏笔画为序)
尤正书　王玉霞　司会香
朱　华　刘俊菊　陈　刚
陈　静　余跃丰　梁　军

华中师范大学出版社

内容提要

本教材主要是针对高等院校尤其是独立学院学生的实际情况和学习特点而编写的。在编写特色上充分遵从了通俗易懂、深入浅出、习题充分、注重应用的原则，尽可能地凸显概率论与数理统计有着很强应用性的特点。

全书共分九章，分别是：随机事件及其概率、随机变量及其分布、二元随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计基础、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(第二版)/尤正书　陈　刚主编. —2 版. —武汉：华中师范大学出版社，2013. 6
(21 世纪高等教育规划教材・数学系列)

ISBN 978-7-5622-6083-7

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①尤… ②陈…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材　②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 094509 号

概率论与数理统计(第二版)

©尤正书　陈　刚　主编

责任编辑：袁正科	**责任校对**：易　雯	**封面设计**：新视点
编 辑 室：第二编辑室	**电　　话**：027－67867362	**封面制作**：胡　灿
出版发行：华中师范大学出版社		
社　　址：湖北省武汉市珞喻路 152 号	**邮　　编**：430079	
销售电话：027－67863426/67863280		
邮购电话：027－67861321	**传　　真**：027－67863291	
网　　址：http://www.ccnupress.com	**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn	
印　　刷：仙桃市新华印务有限公司	**督　　印**：章光琼	
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16	**印　　张**：11.5	**字　　数**：310 千字
版　　次：2013 年 6 月第 2 版	**印　　次**：2013 年 6 月第 1 次印刷	
印　　数：1—3000	**定　　价**：24.00 元	

欢迎上网查询、购书

前　　言

教材建设是一项长期的、艰巨的工作。一部好的教材必须经过师生反复施教、施学，不断探索，集思广益，长期积累，不断完善后才能达到我们所追求的目标。

由湖北大学知行学院的教师和其他相关学校教师共同编写的《概率论与数理统计》第一版自2011年出版发行以来，经过了多所学校两年的使用，受到了使用单位的一致好评。为了使本教材更加精益求精，使其成为更加成熟、更被社会广泛认可的精品，我们在第一版的使用过程中，就对其进行了科学的实验和持续的跟踪调查，对于此次修订，湖北大学知行学院和其他各参编院校的教师对其进行了认真地讨论，通过对比试验和师生评议，大家一致认为，第二版除了保持第一版的风格和特点外，还吸收了任课教师好的建议，主要体现在以下几个方面：

1. 对第一版中错误之处加以更正；

2. 对个别性质或定理证明不太严谨的部分，重新给予严格的证明。另外，通过在教学中征求意见，补充了个别定理的证明；

3. 对本教材中符号体系不一致的地方作了修改；

4. 调整了个别章节的顺序以便前后各章节内容的衔接。

通过本次修订，本教材的品质将有一个质的飞跃，参与修订的教师也都从中学到了许多宝贵的教材编写经验，提高了自己的业务水平。但教材建设是一项长期的工作，不可能一蹴而就，还需要我们进一步努力探索。我们相信，通过我们的不懈努力，本教材必将会成为被社会认可的精品教材。

编者

2013年3月

第1版

前言

Ban 1

《概率论与数理统计》是高等学校工科类,经济、管理类学生必修的基础课之一。该课程作为专门研究随机现象统计规律性的学科,其实际应用性又较强,故而也是理论与实际结合较紧密的一门学科。由于学习该课程的理论需要中学的数学基础和微积分理论作支撑,加之各种新概念、新记号繁多,因而部分学生在学习时会遇到一些困难,这必然就影响了他们对这门课程的有效学习。湖北大学知行学院数学教研室和武汉理工大学华夏学院数学教研室的教师们在长期从事《概率论与数理统计》的教学过程中,积累了丰富的经验,摸索出了一套可行的教学方法,并根据高等院校尤其是独立学院学生的实际情况和学习特点编写了这本教材。其主要特点是:

1. 通俗易懂、深入浅出

在尊重理论体系的严谨性、科学性、逻辑性的前提下,教材对每个新引入的概念都进行了详细的解析和注释,对各个重要的结论,除了个别证明过程较为复杂的省略以外,其他叙述和证明过程也是尽量详尽完整。使整个语言的表达做到通俗自然。

2. 例题翔实、习题充分、注重应用

为配合教学,本教材每章、每节都配置了一定量的习题,以便学生巩固学习成果。另外,我们还在每章备有典型例题解析,还对一些有难度的综合题进行了解析,有利于扩大学生解题的视野。

本教材由尤正书(湖北大学知行学院)、陈刚(湖北大学知行学院)担任主编,王玉霞(武汉理工大学华夏学院)任副主编,各章编写分工如下:

第一章:朱华、梁军(湖北大学知行学院);第二章:刘俊莉(湖北大学知行学院);第三章:余跃丰(湖北大学知行学院);第四章:尤正书(湖北大学知行学院);第五章:王玉霞(武汉理工大学华夏学院);第六、七、八、九章:陈刚(湖北大学知行学院)。全书规划设计、人员分配、合成统稿由尤正书完成。

由于时间紧,编者水平有限,书中难免存在错误或不妥之处,望广大师生批评指正。

编者

2011年7月

目　录

Mulu

第 1 章

随机事件及其概率

Zhang 1

1.1 随机事件的基本概念

1. 随机现象

在人类社会和自然界中，可以观察到这样的现象，在一定的条件下，只会发生一种结果. 例如，向上抛掷一石子会自然下落；在标准大气压下，水在加热到 100℃ 时必然会沸腾等. 我们称这类现象为确定性现象. 还可以观察到另一种现象，在一定条件下，有多个可能发生的结果. 例如，抛掷一枚硬币，可能正面向上，也可能反面向上. 这类现象在发生之前无法预知确切的结果，这样的现象称为**随机现象**. 但是大量地重复观察这类现象，可以发现不同的结果的发生具有规律性，例如，大量地抛一枚硬币，落地后正面向上和反面向上的次数几乎相同，而一门炮多次射击后的弹着点也呈现出一定的规律性. 这种规律叫**统计规律**，概率论与数理统计正是研究随机现象统计规律性的一门学科.

2. 随机试验

为了掌握随机现象的统计规律性，有必要对随机现象进行大量的重复试验，以利于观察各种结果的发生情况，发现其规律. 这种试验要尽量保证其真实准确性，因此就要求具备以下特征：

(1) 可重复：即在相同条件下试验可重复进行；

(2) 结果多样：即每次试验可能的结果不止一个，并且这些结果是明确的；

(3) 不可预知：即每次试验前不能确定哪个结果会发生.

具备以上三个特征的试验称为**随机试验**，简称**试验**.

比如在一个袋子中放入 10 个大小相同、重量相同而颜色不同的圆球，从中随意拿出一个. 这种试验可以重复进行，而且每次试验的结果有 10 种，在试验前不能预知哪个颜色的球被取出；再如抛掷一颗骰子，可以多次重复进行，每次抛掷的可能结果有 6 种，而每次抛掷前不知道会出现哪个点数等. 这些就是随机试验.

3. 随机事件

随机试验的结果的发生，在试验前虽然不知道，但是所有这些不同的结果组成的集合却是明确的. 我们将随机试验的所有可能的结果组成的集合称为**样本空间**，记为 Ω；随机试验的每个可能的结果称为**样本点**，记为 $\Omega=\{\omega\}$；如果样本点的个数是有限的或可数的，则每个样本点记为 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，因此，样本空间

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}.$$

例 1 抛掷一颗骰子的试验中,规定出现点数 i 时的结果为 e_i,则

$$\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_6\}.$$

例 2 抛掷一枚硬币的试验中,规定正面向上的结果为 H,反面向上的结果为 T,则

$$\Omega=\{H,T\}.$$

例 3 在一枚硬币连续抛掷 3 次的试验中,正面记为 H,反面记为 T,每次试验可能的结果有 8 个,则

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}.$$

例 4 测试一个灯泡的使用寿命中,若其使用寿命为 t,则

$$\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

研究随机现象不仅要对不同的结果(样本点)进行讨论,而且更多是对所有样本点集合(即样本空间)的某些子集进行讨论.如果规定灯泡寿命小于 500 小时为次品,那么我们就关心灯泡寿命大于 500 小时的情况.如例 4 中 $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$,那么 $A=\{t\mid 0\leqslant t<500\}$ 和 $B=\{t\mid t\geqslant 500\}$ 就分别是 Ω 的两个子集,也是我们所关心的两种情况.

我们称样本空间 Ω 的具有某种条件的子集为**随机事件**,简称**事件**,记为 A,B,C 等.在每次试验中,只要这一子集中的某一个样本点发生时,就称这一事件发生.又如在例 1 中,掷出小点数记为 $A=\{1,2,3\}$,掷出大点数记为 $B=\{4,5,6\}$;而在例 3 中,记掷 3 次硬币都是同面为 A,则 $A=\{HHH,TTT\}$,记两次正面向上为 B,则 $B=\{HHT,HTH,THH\}$,记至少一次正面向上为 C,则 $C=\{HTT,THT,TTH,HHT,HTH,THH,HHH\}$.

例 5 记录某地一昼夜的最高温度和最低温度,以 x 表示最低温度,以 y 表示最高温度,并设这一地区温度不低于 T_0,也不会高于 T_1,那么

$$\Omega=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}.$$

而最高温度和最低温度差不超过 10℃ 这一事件记为 A,则

$$A=\{(x,y)\mid 0\leqslant y-x\leqslant 10,T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}.$$

由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**.样本空间 Ω 包含所有的样本点,也是自身的子集,且在每次试验中 Ω 总是发生,故称为**必然事件**.不包含任何样本点的集合是空集 $\varnothing$,也是样本空间的子集,它在每次试验中都不发生,故称为**不可能事件**.

比如抛掷一枚硬币,$\Omega=\{H,T\}$,而$\{T\}$和$\{H\}$为基本事件;"正面向上或反面向上"是$\{H$ 或 $T\}$为必然事件 Ω;"正面向上且反面向上"是$\{H$ 且 $T\}$为不可能事件 $\varnothing$.

4. 随机事件的关系和运算

事件是样本空间的某种子集,由此可以将样本点作为元素看待,必然事件就是全集 Ω,不可能事件就是空集 $\varnothing$.这样事件与集合的联系如下:

样本点 —— 元素;

必然事件 —— 全集;

不可能事件 —— 空集;

随机事件 —— 集合.

注意:这里事件是样本点的一类集合,而样本点的所有的集合并不一定都是事件,在本

书中对此就不作进一步的讨论.

事件之间的关系和运算也可以按照集合的关系和运算来处理. 下面我们将事件关系的表述与集合关系的表述加以对照以加深理解.

先看事件间的关系，设 A,B,C 为同一样本空间 Ω 的事件.

(1) 包含关系：A 发生必然导致 B 发生，集合表示为属于 A 的元素必属于 B，记为 $A\subset B$；

(2) 相等关系：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$；

(3) 并事件：A 发生或 B 发生，集合表示为属于 A 或属于 B 的元素集合，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$；

(4) 交事件：A 发生且 B 也发生，集合表示为属于 A 且属于 B 的元素集合，记为 $A\cap B$ 或 AB；

(5) 差事件：A 发生且 B 不发生，集合表示为属于 A 且不属于 B 的元素集合，记为 $A-B$；

(6) 互不相容(互斥)事件：若 $A\cap B=\varnothing$，即 A 与 B 不可能同时发生，则称 A 与 B 互不相容；

(7) 互逆(对立)事件：只要 A 不发生，就叫做 B 发生，即 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，则称 B 是 A 的逆事件，记作 $B=\overline{A}$. 当然有 $A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，所以 A 也是 $B=\overline{A}$ 的逆事件，因此，A 与 B 称作互逆事件.

事件间的关系如图 1-1(Vienn 图，可类比集合的情形) 所示：

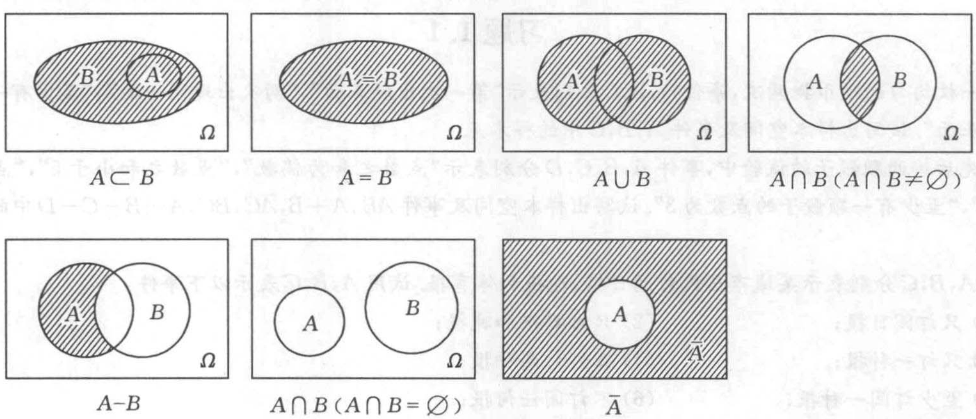

图 1-1　事件间的关系

在进行事件运算时，也会用到集合中的运算定律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

如遇到多个事件时，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，则其并事件用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示；交事件用 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示；

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容等价于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即

$$A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n;$$

对偶律也可推广为

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

例 6 掷一颗骰子的试验,事件 A 表示出现"奇数点",事件 B 表示出现"点数小于 5",事件 C 表示"小于 5 的偶数点",写出下列事件:$\Omega,A,B,C,A\cup B,A-B,B-A,A\cap B,A\cap C,C-A,\overline{A}\cup B$.

解 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},A=\{1,3,5\},B=\{1,2,3,4\},C=\{2,4\},$
$A\cup B=\{1,2,3,4,5\},A-B=\{5\},B-A=\{2,4\},A\cap B=\{1,3\},$
$A\cap C=\varnothing,\ C-A=\{2,4\},\ \overline{A}\cup B=\{1,2,3,4,6\}.$

例 7 设 A,B,C 是随机事件,则事件

(1)"A 与 B 发生,C 不发生" 可以表示为 $AB\overline{C}$;

(2)"A,B,C 至少两个发生" 可以表示为 $AB\cup AC\cup BC$;

(3)"A,B,C 恰好两个发生" 可以表示为 $AB\overline{C}\cup AC\overline{B}\cup BC\overline{A}$;

(4)"A,B,C 至多一个发生" 可以表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup \overline{A}B\overline{C}\cup \overline{A}\overline{B}C$;

(5)"A,B,C 至少一个发生" 可以表示为 $A\cup B\cup C$.

习题 1.1

1. 将一枚均匀的硬币抛两次,事件 A,B,C 分别表示"第一次出现正面","两次出现同一面","至少有一次出现正面". 试写出样本空间及事件 A,B,C 中的样本点.

2. 在先后掷两颗骰子的试验中,事件 A,B,C,D 分别表示"点数之和为偶数","点数之和小于 5","点数相等","至少有一颗骰子的点数为 3". 试写出样本空间及事件 $AB,A+B,\overline{A}C,BC,A-B-C-D$ 中的样本点.

3. 以 A,B,C 分别表示某城市居民订阅日报、晚报和体育报. 试用 A,B,C 表示以下事件:

(1) 只订阅日报; (2) 只订日报和晚报;
(3) 只订一种报; (4) 正好订两种报;
(5) 至少订阅一种报; (6) 不订阅任何报;
(7) 至多订阅一种报; (8) 三种报纸都订阅;
(9) 三种报纸不全订阅.

4. 甲、乙、丙三人各射击一次,事件 A_1,A_2,A_3 分别表示甲、乙、丙射中. 试说明下列事件所表示的结果:

$$\overline{A_2},A_2+A_3,\overline{A_1A_2},A_1+A_2,A_1A_2\overline{A_3},A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3.$$

5. 说明下列事件之间的关系:

(1)$x>12$ 与 $x\leqslant 12$;

(2)$x>12$ 与 $x\leqslant 14$;

(3)$x>12$ 与 $x<10$.

1.2　随机事件的概率

1.2.1　频率和统计概率

一个事件在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们希望知道这个事件发生的可能性究竟有多大，这种可能性最好用一个数来表征. 为此，首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出事件发生的可能性大小——概率.

1. 频率

在相同的条件下，进行 n 次试验，其中事件 A 发生的次数为 m，叫做事件 A 的频数，比值 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，记作 $f_n(A)=\frac{m}{n}$.

频率具有以下基本性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性，即若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

我们将一枚硬币抛掷 100 次，1000 次 …… 可观察正面向上的次数 m 的变化以及频率 $f_n(H)$ 的变化情况. 历史上曾有人做过试验，如表 1-1 所示.

表 1-1

实验者	n	$m(H)$	$f_n(H)$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K Pearson	12000	6019	0.5016
K Pearson	24000	12012	0.5005

由表 1-1 可以看出，正面出现的频率均在 0.5 附近波动，而且随着抛掷次数增大，频率越来越接近 0.5.

还有很多类似的试验证实，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，一个事件 A 的频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，做大量重复试验，计算频率 $f_n(A)$，分析其稳定在什么实数附近，再用此数来表征 A 发生的可能性大小是合适的.

2. 统计概率

定义 1.1　在相同条件下，重复进行 n 次试验，若 n 越大时，事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近波动，则称 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$，则 $P(A)=p$.

这个定义称为概率的统计定义或统计概率.

事实上，概率的统计定义仅仅给出了事件的概率是客观存在的，但并不适合用此定义来计算概率. 因为试验的条件的不变无法真正得到保证，另外，大量的试验次数操作起来也是十分困难的. 人们往往就用若干次试验的频率或一系列频率的平均值作为概率的近似值.

例如,从一个妇产医院6年间出生的婴儿的调查表可以看出生男孩的频率是稳定的,可以取0.518作为生男孩的概率.如表1-2所示.

表 1-2

年	新生儿总数 N	新生儿分类数		频率 %	
		男孩 m_1	女孩 m_2	男孩	女孩
第一年	3670	1883	1787	51.31	48.69
第二年	4250	2177	2073	51.22	48.78
第三年	4055	2138	1917	52.73	47.27
第四年	5844	2955	2889	50.56	49.44
第五年	6344	3271	3073	51.56	48.44
第六年	7231	3722	3509	51.47	48.53
6年总计	31394	16146	15248	51.48	48.52

1.2.2 古典概型及几何概型

一个事件 A 的概率的计算有时非常困难,但在某些特殊条件下的概率,可以用相对简单的方法求得,像**古典概型和几何概型**.

1. 古典概型

若试验的样本空间中的样本点个数有限为 n,且每个基本事件发生的可能性相同,满足以上两个条件的试验就是古典概型.在古典概型中,事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n},\text{其中 } m \text{ 是 } A \text{ 中含有的样本点个数.} \tag{1-1}$$

例1 袋中有5个白球,3个黑球,从中任取两个球,求这两个球都是白球的概率,再求这两个球一黑一白的概率.

解 袋中共8个球,任取2个,有 C_8^2 种不同的取法,基本事件总数为 C_8^2.

设 $A=\{$两个都是白球$\}$,则 A 中所包含的基本事件数为 C_5^2,

$B=\{$一个白球一个黑球$\}$,则 B 中包含的基本事件数为 $C_5^1C_3^1$,

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14},\qquad P(B)=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}.$$

例2 将5个球随机的放入8个盒子中去,试求:

(1) 每个盒子至多有一个球的概率;

(2) 第二个盒子只有一个球的概率.

解 每一个球可以有8种选择,即放入8个盒子中的任一个,5个球共有 $8\times8\times8\times8\times8=8^5$ 种方法,基本事件总数为 8^5.

(1) 先取一球放入盒子共有8种方法,再取一球放入共有7种,…,第五个球放入共有4种方法.所以每个盒子至多一球的基本事件总数为 A_8^5,所求概率

$$P_1=\frac{A_8^5}{8^5}=\frac{105}{512}.$$

(2) 取一个球放入第二个盒子共有5种方法,剩下的4个球随机放入剩余7个盒子共有

7^4 种方法. 故第二个盒子只有一个球的放法有 $5\cdot 7^4$ 种，所求概率为

$$P_2=\frac{5\cdot 7^4}{8^5}.$$

例 3 有 100 件产品，其中有 10 件次品，从中任取 N 件，求：(1) 当 N 为 5 时求其中正好有 3 件次品的概率是多少？(2) 当 N 为 15 时求其中恰好有 3 件次品的概率是多少？

解 100 件产品任取 N 件的抽法有 C_{100}^N，基本事件总数是 C_{100}^N.

(1) 抽 5 件有 3 件次品的抽法有 $C_{90}^2C_{10}^3$ 种，其概率为

$$P_1=\frac{C_{90}^2C_{10}^3}{C_{100}^5};$$

(2) 抽 15 件有 3 件次品的抽法有 $C_{90}^{12}C_{10}^3$，其概率为

$$P_2=\frac{C_{90}^{12}C_{10}^3}{C_{100}^{15}}.$$

2. 几何概率

若试验的样本空间 Ω 是多维空间中的某一有界区域，该区域内的每一个点都是样本点，如果在 Ω 内等容量的区域内事件发生的可能性相同，则称此概型为**几何概型**.

设 A 是 Ω 中的某一区域，则 A 发生的概率 $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$，其中记号 $|A|$ 和 $|\Omega|$ 分别表示 A 和 Ω 的度量大小. 度量在一维空间里表示长度，在二维空间里表示面积，在三维空间里表示体积.

例 4 两人约定在 8 点到 9 点之间在某地点会面，先到者须等候 20 分钟方可离开，求这两人能会面的概率.

解 设 x 与 y 分别表示两人到达时间，有 $0\leqslant x\leqslant 60,0\leqslant y\leqslant 60$；两人能会面即 $|x-y|\leqslant 20$，其中 $|x-y|$ 是两人到达时间的绝对时差，作平面图，如图 1-2 所示，观察这两个区域可以知道：

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,0\leqslant y\leqslant 60\}$$

是一个正方形，$A=\{(x,y)\mid 0\leqslant |x-y|\leqslant 20\}$ 是阴影部分，则两人能会面的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

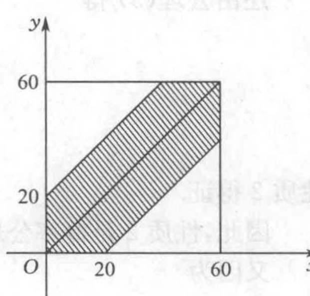

图 1-2

1.2.3 概率公理与概率性质

无论从任何角度，以何种方式对事件的概率进行定义，都可以发现这些定义都有共性，这就是概率的三个基本性质，我们称其为**概率公理**，即：

(1) 对任何事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 若可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

实际上，只要是满足上述公理的实数 p，就可以称为事件的概率，这就是概率的公理化

定义.

由概率的三个公理,还可以推出概率的另外几个性质:

性质 1 $P(\varnothing)=0$; (1-2)

性质 2 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$; (1-3)

性质 3 $P(\overline{A})=1-P(A)$; (1-4)

性质 4 若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$; (1-5)

性质 5 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,该公式也称为加法公式. (1-6)

证 令

$$A_n=\varnothing,n=1,2,\cdots$$

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n=\varnothing$,且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i、j=1,2,\cdots)$.

由公理(3)得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(\varnothing),$$

又由公理(1)可得 $P(\varnothing)\geqslant 0$,

从而 $P(\varnothing)=0$.

性质 1 得证.

再设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,$\varnothing=A_n=A_{n+1}=\cdots$

故

$$A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i、j=1,2,\cdots).$$

还由公理(3)得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{+\infty}P(\varnothing)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 2 得证.

因此,性质 2 是概率公理(3)的特例.

又因为

$$A\cup\overline{A}=\Omega,A\cap\overline{A}=\varnothing,$$

所以

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

即

$$P(\overline{A})=1-P(A),$$

性质 3 得证.

再因为

$$A\subset B,B=(B-A)\cup A=(B\overline{A})\cup A,A\text{ 与 }B\overline{A}\text{ 互斥},$$
$$P(B)=P((B\overline{A})\cup A)=P(B\overline{A})+P(A)=P(B-A)+P(A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$