精选精编最新试题解析

（高 中）

数 学

祝厚元 周沛耕 刘彭芝 编

北京师范学院出版社

精选精编最新试

高中数学

（修订本）

主编　祝厚元　周沛耕　刘彭芝
编者　华　黔　张　瑾　冀　传

社

(京)新登字208号

精选精编最新试题解析

高 中 数 学

(修 订 本)

祝厚元　周沛耕　刘彭芝　主编

*

北京师范学院出版社出版发行

(北京阜成门外花园村)

全国新华书店总经销

国防科工委印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：14.1　字数：300千

1992年7月北京第2版　1992年7月北京第1次印刷

印数：0,001—35,000册

ISBN 7-81014-403-0/G·352

定价：5.90元

修订说明

《精选精编最新试题解析》丛书自1989年9月出版以来，已多次印刷发行。它以紧扣大纲，题型新颖，类型全面，深受广大师生的欢迎。为了适应教学发展的需要，我们在广泛听取意见和建议的基础之上，结合近两年来高考、中考命题变化和发展，尤其是学习教委考试中心近期公布的各学科考试说明，对原版《精选精编最新试题解析》进行了适当的调整和补充。其中主要有：

1．删去了部分题型陈旧的内容，增加了近两年中考、高考试题的新题型。既保留了原丛书的精华，又充实最新资料和信息，使其更富生命活力。

2．高中部分又增加了“生物”、“政治”、“历史”、“地理”四册，同时调整和充实了“初中英语”、“高中英语”、“高中化学”和“高中数学”等分册内容。这样，本套丛书更加全面，实用性更强。

3．充实了作者队伍。全套丛书除原几所中学的教师外，又聘请了北京八中的部分老师。全体老师按编委会的要求，精心选材，精心修定，力争使本丛书的特色更为突出。

愿新修定的《精选精编最新试题解析》丛书对广大师生的教与学提供更为有效的帮助。

新修定的本套丛书得到了北京师范学院出版社的大力支持和帮助，在此一并致谢。

编　者

1992年1月

前　言

为了使初中、高中毕业班学生更好地重温和巩固所学的基础知识，并进行基本技能的训练；为指导初高中其他年级学生平时学习和为教师提供备课参考资料，我们编写了《精选精编最新试题解析》丛书。计为：初中语文、数学、物理、化学、英语，高中语文、数学、物理、化学、英语共10册。

这套丛书的编写紧扣教学大纲，紧密结合授课内容和目前学生的实际水平，主要特点是：

1． 每册书中各部分（或章）均有知识的重点、难点介绍和知识内在联系的说明，便于读者对所学知识的巩固。

2． 每册书中各部分（或章）均在基础知识介绍后安排了一定数量的例题分析。例题的选择注意了代表性和典型性，有基础知识题，也有难度适中的综合题；例题的安排注意了由易到难，循序渐进。例题分析主要介绍解题思路，提示解题方法，有利于提高读者综合运用知识的能力。

3． 每册书中各部分（或章）例题解析后都安排了一定数量的练习题。习题内容紧扣本部分（或章）基本知识介绍和例题分析，目的是使读者牢固掌握本部分（或章）知识内容并提高应考能力。为了方便读者，书末附有习题答案。

本丛书由北京大学附属中学、清华大学附属中学、人民大学附属中学、北京师范学院附属中学、北京101中学、花园村中学和中关村中学工作在教学第一线富有教学经验的高

级教师和一级教师编写。

由于时间仓促，书中错漏之处恳望读者提出宝贵意见，以使这套丛书质量不断提高。

编　者

1992年1月

目　　录

第一篇 代　　数

第一章 函　　数

集合、对应、映射、函数、反函数的概念；函数的对应关系、定义域和值域；函数的奇偶性、单调性、周期性；函数图象：$\{(x,y)|y=f(x),x\in D(f)\}$的画法；幂函数、指数函数、对数函数的性质，图象及其在解题中的应用都是本章的重点内容，必须熟练掌握.

例1　设全集$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，集合A和B满足条件：$\bar{A}\cap\bar{B}=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\bar{A}\cap B=\{4,6,8\}$.

求(1) $A\cup B$；(2)集A；(3) 集B；(4) 集$A-B$.

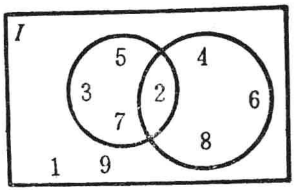


图　1-1-1

解　如图1-1-1，$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，$A=\{2,3,5,7\}$，$A-B=\{x|x\in A且x\notin B\}=\{3,5,7\}$.

例2　设$I=\{2,4,a^2-a+1\}$，$A=\{2,a+1\}$，$\bar{A}=\{7\}$，求a的值.

解　$\because A\cup\bar{A}=I$，只可能$a^2-a+1=7$，$a+1=4$，解得$a=3$.

例3　设$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，问从A到

B的映射共有多少个?

解 ∵映射可以是一对一或多对一的对应，在一对一的对应中，$a_i(i=1,2,3,4)$的象有3种不同情况，对应3个映射：(a_i,b_1)、(a_i,b_2)、(a_i,b_3)；在二对一的对应中，含a_i的原象生成的映射有：$[(a_i,\ a_1),b_1]$，$[(a_i,a_2),\ b_2]$，$[(a_i,a_3),b_3]$（不妨令$i=4$），仍是3个映射；在三对一的对应中，含a_i（i仍不妨令为4）的原象生成的映射是$(a_i,a_1,a_2),b_1]$，$[(a_i,a_1,a_3),b_2]$，$[(a_i,a_2,a_3),b_3]$，仍是3个，……，无论如何，a_i可对应3种映射，同理a_j（$j=1,2,3,4,i\neq j$）也可对应3种映射（∵若a_i是在“一对一”中以b_1为象，则a_j仍可在“二对一”、“三对一”的映射中，以b_1为象，即b_1可多次选用），故总共有映射：$3\times3\times3\times3=3^4$个.

注 若A是n元集，B是m元集，则A中任一元素对应的象有m种，故共有映射数：

$$\underbrace{m\times m\times\cdots\times m}_{n个}=m^n.$$

例4 已知函数$y=f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ $(x\in[-3,0])$，求它的反函数$f^{-1}(x)$；分别画出$y=f(x)$和$y=f^{-1}(x)$的图象，并说明二者之间的关系.

解 $\because y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$，$x\in[-3,0]$，

$\therefore x^2=9-\frac{9}{4}y^2$，又$\because x\leqslant0$，

$\therefore x=-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$，$y\in[0,2]$，

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$，$x\in[0,2]$.

$f(x)$和$f^{-1}(x)$的图象分别是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$和$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$在第二象限和第四象限内含端点的二条弧．它们关于直线$y=x$对称．

注 (i)当反解方程$y=f(x)$时，若x无唯一解，则反函数$x=f^{-}(y)$不存在．

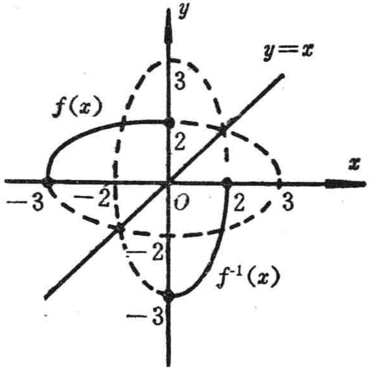


图 1-1-2

(ii) 当反函数存在时，解析式中必须注明其定义域．

(iii)要注意反函数的两种表达形式：$x=f^{-1}(y)$和$y=f^{-1}(x)$表示的是同一定义域上的同一函数关系（区别只是后者是“从习惯”：将因变量用y表示，自变量用x表示而已！）．

(iv)$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图象在形式上是同一曲线，但变量x、y的含义不同：前者x是自变量，y是因变量；而在后者正好相反．

$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图象关于$y=x$对称，其中x表示自变量，y表示因变量．

$y=f^{-1}(x)$与$x=f^{-1}(y)$都是$y=f(x)$的反函数，但图象却是关于直线$y=x$对称．

例5 设$f(x)=1/\lg(3-x)+\sqrt{49-x^2}$，求$f(x)$的定义域和$f[f(-7)]$．

解 由 $\begin{cases} 3-x>0, \\ 3-x\neq 1, \\ 49-x^2\geqslant 0. \end{cases} \Longrightarrow f(x)$的定义域为 $[-7,2)\cup(2,3)$.

$\because f(-7)=\dfrac{1}{\lg 10}=1 \quad \therefore f[f(-7)]=\dfrac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$.

例6 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数，$f(1)=a$且对于任何实数x均有$f(x+2)-f(x)=f(2)$.

(i) 试用a表示$f(2)$与$f(5)$；(ii)问a取何值时，$f(x)$是以2为周期的周期函数？

解 $\because f(x+2)-f(x)=f(2)$对一切$x\in \mathrm{R}$成立，$\therefore$令$x=-1$，又$\because f(x)$是奇函数，$\therefore f(-1+2)-f(-1)=f(2)$，即$2f(1)=f(2)$，$\therefore f(2)=2a$.

令$x=1$，$\therefore f(3)=f(1)+f(2)=3a$.

令$x=3$，$\therefore f(5)=f(2)+f(3)=5a$.

(ii)只要$a=0$，即$f(2)=0$，则存在：

$$f(x+2)=f(x)$$

对一切$x\in \mathrm{R}$成立，$\therefore f(x)$是以2为周期的周期函数.

例7 证明：定义在对称区间$(-l,l)$内的任何函数$f(x)$，必可表示成偶函数$H(x)$与奇函数$G(x)$之和的形式，且这种表示法是唯一的（其中$l>0$）.

证明 (i) 设$H(x)=[f(x)+f(-x)]/2$，$G(x)=[f(x)-f(-x)]/2$，则$H(x)$、$G(x)$分别为$(-l,l)$上的偶函数和奇函数，且满足$f(x)=H(x)+G(x)$.

(ii)若上述$H(x)$与$G(x)$的表达式不唯一，设存在偶函数$H'(x)\neq H(x)$，奇函数$G'(x)\neq G(x)$，有

$$f(x)=H'(x)+G'(x)$$

$$\therefore \quad H(x)-H'(x)=G'(x)-G(x) \qquad (1)$$

以$-x$代x，又有

$$H(x)-H'(x)=G(x)-G'(x) \qquad (2)$$

由(1)，(2) $\therefore H(x)=H'(x)$，$G(x)=G'(x)$.

此与 $H(x)$、$G(x)$ 表达不唯一的假设矛盾，$\therefore$ 原结论真.

例8 设函数 $y=f(x)$ 是定义在R上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=x^2-2x+3$，试求$f(x)$在R上的解析式，并画出它的大致图象.

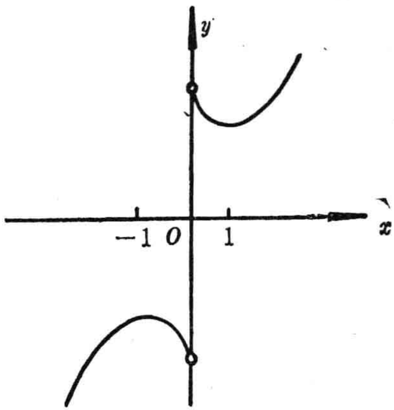


图 1-1-3

解 $\because$ $f(x)$是R上的奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，当$x=0$时，就有$f(0)=0$.

当$x<0$时，$\because -x>0$，

$\therefore f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2-2(-x)+3]=-x^2-2x-3$($\because x>0$，$f(x)=x^2-2x+3$)。

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3, & (x>0) \\ 0, & (x=0) \\ -x^2-2x-3. & (x<0) \end{cases}$$

图象如图1-1-3.

例9 已知$a>0$，$a\neq 1$，讨论$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性和单调性.

解 $\because f(-x)+f(x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})+\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=\log_a(-x^2+x^2+1)=0$.

$\therefore f(-x)=-f(x)$. 又$\because$函数定义域为R，$\therefore f(x)$是奇函数.

对于奇函数的单调性，只要考虑R^+上的单调性即可.

任取$x_1>x_2>0$，则$f(x_1)-f(x_2)$

$$=\log_a\frac{x_1+\sqrt{x_1^2+1}}{x_2+\sqrt{x_2^2+1}}.$$

$\because x_1>x_2>0$，$\therefore x_1^2>x_2^2$，$\therefore x_1+\sqrt{x_1^2+1}>x_2+\sqrt{x_2^2+1}$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=\log_a N\left(\text{这里}N=\dfrac{x_1+\sqrt{x_1^2+1}}{x_2+\sqrt{x_2^2+1}}>1\right)$，当$a>1$时，$\because \log_a N>0$，$\therefore f(x)$是增函数；当$0<a<1$时，$f(x)$是减函数. 由于奇函数的性质，$\therefore f(x)$在R上也是单调函数：当$a>1$时是增函数；当$0<a<1$时是减函数.

关于单调性，学过微分的同学还可采用如下证法：

$\because f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，$x\in R$

$$\therefore f'(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{(x+\sqrt{x^2+1})\ln a}=\frac{1+x/\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})\ln a}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}\cdot\ln a}$$

$\therefore$当$a>1$时，$\because \ln a>0$，$\therefore f(x)\nearrow$；

当$0<a<1$时，$\because \ln a<0$，$\therefore f(x)\searrow$.

例10 已知函数$f(x)$定义域为R，对任意$x\in R$都有$f(x)=f(x-1)+f(x+1)$，则$f(x)$是周期函数.

证明 $\because f(x)=f(x-1)+f(x+1)$，$x\in R$

$\therefore f(x+1)=f(x)+f(x+2)=f(x)+f(x+1)+f(x+3)$

$$\therefore \quad f(x)+f(x+3)=0 \qquad (1)$$

以$x+3$代x，$\therefore f(x+3)+f(x+6)=0 \qquad (2)$

由(1)(2)，$\therefore f(x)=f(x+6)\quad(x\in R)$．

$\therefore$ $f(x)$是以6为一个周期的周期函数．

例11 a，m是实数，$x=2^m+2^{-m}$，a是常数，$y=4^m+4^{-m}-2a(2^m+2^{-m})$，求$y$的最小值。

解 $\because y=(2^m+2^{-m})^2-2a(2^m+2^{-m})-2$，由于$x=2^m+2^{-m}$，则$x\geqslant 2$，$y=x^2-2ax-2$。

(1) 若$a\geqslant 2$，则$x_{顶}=a\geqslant 2$在定义域中，$\therefore$当$x=a$时，$y_{min}=-(a^2+2)$；

(2) 若$a<2$，$\because x_{顶}<2$，$\therefore$当$x\geqslant 2$时，定义域位于函数$y=x^2-2ax-2$的单调增区间，$\therefore$当$x=2$时，$y_{min}=f(2)=2^2-4a-2=2-4a$。

注 求二次函数$y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$的最值时，一定要注意它的定义域D(f)：

(i) 当$D(f)\in R$，$f(x_{顶})$是一个最值；

(ii) 当$D(f)\in[p, q]$，且$x_{顶}\in[p, q]$，则$f(x_{顶})$是一个最值，且有另一最值在端点p或q处取到。(可比较$f(p)$、$f(q)$的大小决定。)若$x_{顶}\overline{\in}[p, q]$，则$f(p)$，$f(q)$是两个最值。

(iii)当D(f)是开区间，半开区间的情况，最值可能是$f(x_{顶})$(若$x_{顶}\in D(f)$)，也可能是f(端)．具体情况要具体讨论．以$a>0$为例，参见图1-1-4．

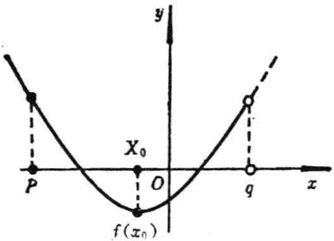
例12 已知$f(x)=x^2+ax+b$，a、$b\in R$，$A=\{x|x=f(x),x\in R\}$，$B=\{x|x=f[f(x)],x\in R\}$．

(1) 若$a=1$，$b=2$，求$A\cup B$、$A\cap B$；

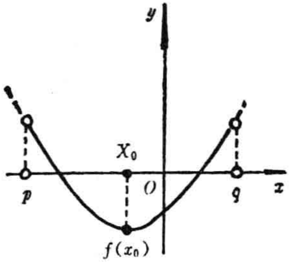
(2) 若$A=\{-1, 3\}$，求B；

(3) 若$A=\{a\}$，求a的值．

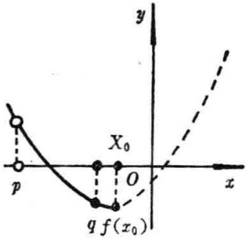
解 设$x_0\in A$，则$x_0=f(x_0)\Longrightarrow x_0=f[f(x_0)]\Longrightarrow x_0$



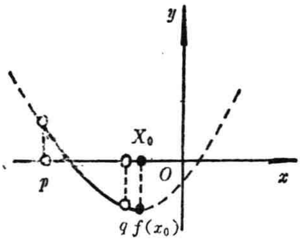
$D(f)=[p,\ q)$，$x_0\in[p,\ q)$
二个最值



$D(f)=(p,\ q)$，$x_0\in(p,\ q)$
一个最值



$D(f)=(p,\ q]$，$x_0\bar{\in}(p,\ q]$
一个最值



$D(f)=(p,\ q)$，$x_0\bar{\in}(p,\ q)$
无最值

图 1-1-4

$\in B$，$\therefore A\subseteq B$．故$A\cup B=B$，$A\cap B=A$．

(1) 当$a=1$，$b=2$时，$\because$方程$x=x^2+x+2$，即 $x^2+2=0$无实根，$\therefore A=\phi$；

又$\because$方程 $x=(x^2+x+2)^2+(x^2+x+2)+2$，

即 $$(x^2+x+2)^2+x^2+4=0,$$

显然无实根，$\therefore B=\phi$．

(2) 若$A=\{-1,3\}$，$\therefore$方程$x=x^2+ax+b$，即$x^2+(a-1)x+b=0$，由韦达定理 $b=-3,a=-1$．

又∵方程 $x=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$，即 $(x^2-x-3)^2-x^2=0$，∴ $x=\pm(x^2-x-3)$，∴ $x^2=3$或 $(x+1)(x-3)=0$，故$x=\pm\sqrt{3}$或$x=-1$或3.

∴ $B=\{-1,3,\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\}$.

(3) ∵$x^2+ax+b=x$有实根a，且只有实根a，∴a是重根.

$$\therefore\quad \begin{cases} a^2+a^2+b-a=0 \\ a\cdot a=b \\ a+a=-(a-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

例13 设$f(x)$、$g(x)$互为反函数，且$f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$，求证$g(m\cdot n)=g(m)+g(n)$.

证明 设$y=f(x)$，则$x=f^{-1}(y)=g[f(x)]$，

$$\therefore\qquad m=g[f(m)],\quad n=g[f(n)]. \tag{1}$$

又∵ $$f(m+n)=f(m)\cdot f(n),$$

$$\therefore\qquad m+n=g[f(m+n)]=g[f(m)\cdot f(n)] \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{由 (1)}\qquad m+n=g[f(m)]+g[f(n)] \\ &\text{由 (2)}\qquad m+n=g[f(m)\cdot f(n)] \end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$\therefore\qquad g[f(m)\cdot f(n)]=g[f(m)]+g[f(n)].$$

以m、n分别替换 $f(m)$和$f(n)$，∴$g(m\cdot n)=g(m)+g(n)$.

注 设 $y=f(x)$ 有反函数 $y=g(x)$，则有 $x=f^{-1}(y)=g(y)$，∴ $x\equiv g[f(x)]$；同样 $y\equiv f[g(y)]$. 有关反函数的证论题，往往需用此关系.

例14 已知$f(e^x+1)=2e^x+1$，$\varphi(\lg x)=\lg\dfrac{x^2}{10}$，$f(x)$与$\varphi(x)$是否同一函数?

解 ∵ $f(e^x+1)=2e^x+1=2(e^x+1)-1$，

∴ $f(x)=2x-1$，$x\in(1,\ +\infty)$.

$$\varphi(\lg x)=\lg\frac{x^2}{10}=2\lg x-1,\ \therefore\ \varphi(x)=2x-1, x\in \mathrm{R}$$

$(\because \lg x\in \mathrm{R})$

尽管 f，φ 的表达式相同，但定义域不同，故不是同一函数.

例15 若干个至少具有以下三性质之一的幂函数：(1)是奇函数；(2)是R 上的增函数；(3)函数图象经过坐标原点. 已知具性质(1)的函数有12个，具有性质(2)的有10个，具有性质(3)的有14个. 求1)这些幂函数共有多少个？2)这些幂函数中，幂指数小于零的有几个？

解 1) 设分别符合题设的三个条件的幂函数的集合是 A、B、C. 依题意，$n(A)=12$，$n(B)=10$，$n(C)=14$. 设某幂函数 $x^\alpha\in B$，$\therefore x^\alpha$ 是 R上的一个增函数. $\because$ 第四象限无幂函数图象，$\therefore x^\alpha$ 必是一、三象限内的幂函数，又是增函数，故知 $x=0$ 有意义，且 x^α 是奇函数，$\therefore x^\alpha\in A\cap C$，$\therefore B\subseteq A\cap C^*$. 反之若某幂函数 x^β 是过原点的奇函数，即 $x^\beta\in A\cap C$，同样由于第四象限无幂函数图象，$\therefore x^\beta$ 是第一三两象限的幂函数，又 $\because$ 它过原点，$\therefore x^\beta$ 还是增函数，$\therefore x^\beta\in B$，$\Longrightarrow A\cap C\subseteq B^{**}$. 由 $*$，$**$，$\therefore B=A\cap C$，$\therefore A\cup B=A$.

又 $\because n(A\cup B\cup C)=n(A\cup C)=n(A)+n(C)$

$-n(A\cap C)$

$=n(A)+n(C)-n(B)=12+14-10=16$(个)，

故所求幂函数共16个.

2) 当幂函数是负数时，$\because$ 图象不过原点，$\therefore$ 该函数 $\notin C$，故这类函数的个数是 $16-14=2$(个).

例16 设减函数 $y=f(u)$ 定义于 D，$u=\varphi(x)$ 是 D' 上的增函数，Z 是 $\varphi(x)$ 的值域且 $Z\subseteq D$，求证 $y=f[\varphi(x)]$ 是定义