高中数学奥林匹克读本

（上 册）

主　编　马传渔
副主编　张志朝
　　　　陆忠源

南京大学出版社

高中数学
奥林匹克读本

（上册）

主　编　马传渔

副主编　张志朝　陆忠源

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克读本.上册 / 马传渔主编.—南京：南京大学出版社,2002.7

ISBN 7-305-01476-1

Ⅰ.高… Ⅱ.马… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第054403号

书　　名	**高中数学奥林匹克读本(上册)**
主　　编	马传渔
出版发行	南京大学出版社
社　　址	南京市汉口路22号　邮编 210093
电　　话	025-3596923　025-3592317　传真 025-3686347
网　　址	http://press.nju.edu.cn
电子函件	nupress1@publicl.ptt.js.cn
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	武进第三印刷厂
开　　本	850×1168 1/32　印张 17.125　字数 443 千
版　　次	2002年7月第1版　2002年7月第1次印刷
印　　数	1～5000
ISBN 7-305-01476-1/O·78	
定　　价	19.00元

本书编委会名单

主　　编　马传渔

副主编　张志朝　陆忠源

编　　委　张希麟　蒋建华　曾宪安

朱占奎　何志奇　于新华

张亚东　周　莹　王卫华

李　红

前　言

自1981年中国数学学会普及工作委员会举办了全国高中数学联赛之后，每年一次10月份举办的全国高中数学联赛走上了规范化的道路。1985年中国数学学会决定在每年1月份举办全国中学生数学冬令营，即中国数学奥林匹克(C.M.O.)，这项我国中学生最高级别的数学竞赛云集了全国高中数学联赛80%左右的获奖者，进行两次模拟国际数学奥林匹克(I.M.O.)的考试，从中选拔20名优胜者组成国家集训队，经过培训与多次考试，最后选定6人组成中国代表队，参加一年一度的于7月份举行的I.M.O.竞赛的决逐。通常，称全国高中数学联赛、C.M.O与I.M.O.为我国的三大数学竞赛。

20多年来，我们组织、主持江苏省和全国数学竞赛，并参与了国际数学奥林匹克和全国各类数学竞赛的命题工作，一直希望凭自身的体会和经验编写一套高中数学奥林匹克的培训教材，在五彩缤纷的奥赛辅导书中，独具特色。既能使读者在全国高中数学联赛中获奖，又能在C.M.O.与I.M.O.竞赛中有获胜的可能，南京大学出版社给予我们机会。《高中数学奥林匹克读本》与读者见面了。

本书分上、下两册，每册18讲，每讲分若干节，每节设置知识要点、趋势预测、范例解读、方法指引、巩固训练、参考答案六个栏目。充实的内容、扎实的框架、丰富的思想、美妙的解法、新颖的理念、强化的训练会让广大读者认可与喜爱。

1. 本书与高一、高二年级新教材同步，系参照高中《数学教育大纲》编写而成，涵盖了高中数学的全部知识点，包罗了所有的解题技巧和方法，也可作为高考数学复习的参考用书。

2. 本书源于教材、高于教材，紧扣《高中数学竞赛大纲》，以教材内容为起点，逐步上升到全国高中数学联赛二试(或加试)的水平。书中收集了许多近几年来全国三大数学竞赛的题目，使读者了解、熟悉三大数学竞赛的题型和内容，让读者尽早进入三大数学竞赛的前沿阵地。

3. 本书特别重视可读性，力求内容由浅入深；力求方法由简单到综合；力求以趣例引入，在趣味中感悟解题思想；力求实用性强，逐步提高解决生产、生活中数学问题的能力；力求文笔通顺流畅；力求在知识点、方法技巧、能力创新三大方面为读者铺路搭桥。

4. 本书范例在知识点和解题方法上都具代表性，内容新颖、解法简捷，便于自学；巩固训练题紧扣各类竞赛内容，题量适中，6道范例，6道训练题相辅相成，遥相呼应；解题方法指引能起到画龙点睛归纳提高的作用；趋势预测不仅对本节内容和方法作赛点总结，而且对发展动态作出相应预测，随时做到与三大数学竞赛接轨。

5. 本书由奥林匹克专家、特级教师、学科带头人编写而成，现可作为一本课外读物，又可作为一本培训、辅导的读本，还可作为高中教师培训奥林匹克的教本。恳请同行与广大读者不吝指正。

南京大学　马传渔

2002年8月

目　录

第1讲 集 合

本讲分两节，分别讲述集合的基本概念及其子、交、并、补等各种运算，和容斥原理及其应用. 本讲的重点是集合的子、交、并、补等运算. 难点是容斥原理及其应用.

在集合的学习过程中，应认识到以下两点：

(1) 集合是一种基本的数学语言与数学工具，并且是数学的基础知识.

(2) 在集合的学习过程中，应增强应用的意识，要自觉地使用集合语言来表示各种数学名词，主动使用集合工具来表示各种数量关系.

容斥原理，实质上是加法原理的推广，在学习时应在加法原理的基础上来理解容斥原理. 只有真正理解了容斥原理，才能在解题时灵活运用.

第1节 子集、全集、补集、交集与并集

集合是一个基本的原始的概念，已渗透到了数学的各个分支，是现代数学思想向中学数学渗透的一个重要表现.

本节中我们将着重研究集合的子集、交集、并集和补集的有关性质及应用. 在学习集合和解决集合问题时，一定要抓住集合的元素这一关键，因为集合是由元素组成的，“子、全、补、交、并、空”等集合也都是通过元素来定义的，所以遇到集合问题，应首先弄清楚集合里的元素是什么.

知识要点

1. 给出集合 A 及一个对象 x,“$x\in A$”与“$x\notin A$”两者必居其一,元素与集合之间只有属于和不属于两种关系.

2. 子集:任意 $x\in A\Rightarrow x\in B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

真子集:$A\subseteq B$ 且 $A\neq B\Leftrightarrow A\subsetneqq B$

补集:设 A 是全集 U 的子集,则 U 中子集 A 的补集 $\complement_U A=\{x\mid x\in U,但\ x\notin A\}$

交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}$

并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A,或\ x\in B\}$.

3. 设集合 A 有 n 个元素组成,则集合 A 的子集共有 2^n 个,其中真子集有 2^n-1 个.

4. 对于任意集合 A,B,C,有:

(1) $A\subseteq A$(自反性);

(2) $A\subseteq B,B\subseteq A\Rightarrow A=B$(反对称性);

(3) $A\subseteq B,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$(传递性);

(4) $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$;

(5) $A\cap A=A,A\cup A=A$(幂等律);

(6) 设 U 为全集,则:

$A\cap U=A,A\cup U=U,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cup\varnothing=A$(同一律);

(7) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing,A\cup(\complement_U A)=U,\complement_U(\complement_U A)=A,\complement_U U=\varnothing,\complement_U\varnothing=U$(互补律);

(8) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$(结合律);

(9) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$(分配律);

(10) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$,

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$(反演律).

趋势预测

集合是一种数学语言与数学工具，集合的并、交、补是集合的基本运算，综观各年的全国联赛考题，此类问题大多以选择题和填空题的形式出现较多. 例如，1996 年考了一个填空题，问一个集合的真子集的个数，主要考查集合的表示法、真子集的概念以及子集的个数的计算方法；1998 年考的是选择题，考查了交集与子集的有关概念，考查学生是否理解 $A\subseteq A\cap B$ 的含义；而 2000 年的选择题考查了交集与补集的有关知识.（以上题目见本书巩固训练题 1～题 3)，从 1996 年到 2000 年的全国联赛中没有出现考查子、交、并、补的解答题.

在今后的全国联赛中，集合仍然会成为一个重要的考点来考查，而涉及集合的子、并、交、补等基本运算的问题，估计仍然会以选择题和填空题的形式出现.

如果集合问题以解答题的形式出现，则集合一般只是一种载体或做为一种问题的情景，这类问题体现了集合与其他知识点相互渗透. 此类问题往往以集合的形式出现，但考查的重点并不是集合. 所以在集合的学习过程中应增强集合的应用意识，在掌握集合的基本概念和基本运算的前提下要更多地关注它与其他知识的融合.

范例解读

题 1　集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$ 与 $P=\{v\mid v=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为　　(　　)

(A) $M=P$　　　　(B) $M\nsubseteq P,P\nsubseteq M$

(C) $M\subset P$　　　　(D) $M\supset P$

精析　集合 M、P 都是用描述法给出的，它们不可能用列举法列出，于是我们应考虑这两个集合的表达式之间能否相互转化，进而来确定它们之间有无子集和相等关系.

解 对任意 $V_0\in P$,有

$V_0=20p+16q+12r=12r+8\cdot(2q)+4\cdot(5p)\in M$,故 $P\subseteq M$.

同理,对任意 $u_0\in M$,有 $u_0=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in P$,所以 $M\subseteq P$,因此,$M=P$,故选(A).

题 2 已知集合

$A=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a>0\}$,

$B=\{(x,y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}$.

若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合,求 a 的值.

精析 由已知条件,知 $A\cap B$ 只有 8 个元素,我们必须先求出 $A\cap B$ 的具体元素,然后再看当 a 取何值时,这 8 个元素正好构成正八边形.

解 由集合 A,B,得

$A\cap B=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a,|xy|=a-1,a>1\}$.我们先来求 $A\cap B$ 位于第一象限内的点.

解方程组 $\begin{cases}x+y=a,\\ xy=a-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\ y=a-1,\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}x=a-1,\\ y=1.\end{cases}$

于是得到 $A\cap B$ 在第一象限内的两点 $(1,a-1)$,$(a-1,1)$,注意到 $A\cap B$ 中表达式都是绝对值方程,第一象限内两点关于 x 轴,原点,y 轴对称的六个点仍然是 $A\cap B$ 中的元素,如图 1.1.

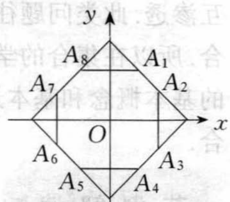

图 1.1

下面来看 a 取何值时,这八个点构成正八边形.

(1) 若 $A_1(1,a-1)$,$A_2(a-1,1)$,则 $A_8(-1,a-1)$,于是得

$$2=A_1A_8=A_1A_2=\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2}|a-2|.$$

故 $a=2+\sqrt{2}$,或 $a=2-\sqrt{2}<1$(舍去).

(2)若 $A_1(a-1,1)$,$A_2(1,a-1)$,则 $A_8(1-a,1)$,故 $2(a-1)=A_1A_8=A_1A_2=\sqrt{2}|a-2|$,解之,得 $a=\sqrt{2}$,或 $a=-\sqrt{2}<0$

(舍去).

综上所述,所求 a 的值为 $2+\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}$.

题3 设 $a,b\in\mathbf{R}$, $A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xoy 内的点集,讨论是否存在 a 与 b,使 $A\cap B\neq\varnothing$,且 $(a,b)\in C$.

精析 讨论存在性问题,可以先假设存在实数 a 与 b 使结论成立,找出结论成立的必要条件.如果存在,再证明它的充分性.

解 方法Ⅰ 如果存在实数 a 和 b 使 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立,那么就一定存在整数 m 和 n,使 $(n,na+b)=(m,3m^2+15)$,即 $\begin{cases}n=m,\\ na+b=3m^2+15,\end{cases}$ 亦即存在整数 n 使得 $na+b-(3n^2+15)=0$.

如果存在实数 a 和 b,使 $(a,b)\in\mathbf{C}$,那么必有 $a^2+b^2\leqslant 144$.

因此实数 a,b 满足: $\begin{cases}na+b-(3n^2+15)=0(n\in\mathbf{Z}), & ①\\ a^2+b^2\leqslant 144. & ②\end{cases}$

①式表明点 $P(a,b)$ 在直线 $l:nx+y-(3n^2+15)=0$ 上,设原点到 l 的距离为 d,于是

$$d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=3\sqrt{n^2+1}+\frac{12}{\sqrt{n^2+1}}\geqslant 12.$$

等号只在 $n^2=3$ 时成立,而 $n\in\mathbf{Z}$,故等号不能成立,因此 $d>12$.因为点 P 在直线 l 上,点 P 到原点的距离 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$,这使 $a^2+b^2\leqslant 144$ 不可能成立,所以不存在实数 a 与 b,使①与②同时成立,因此不存在 a 与 b,使 $A\cap B\neq\varnothing$,且 $(a,b)\in\mathbf{C}$.

方法Ⅱ 由方法Ⅰ中①式,得 $b=3n^2+15-an$,代入②、整理、得关于 a 的不等式

$$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0, \quad ③$$

它的判别式 $\Delta=-36(n^2-3)^2$.由于 $n\in\mathbf{Z}$, $n^2-3\neq 0$,故 $\Delta<0$.

又因 $1+n^2>0$,故不存在实数 a 使③成立.这表明不存在实

数 a 与 b 使①与②同时成立.

方法Ⅲ 如果存在整数 a 和 b 满足题意,由方法Ⅰ中①式,知必存在整数 n,使 $3n^2-an-(b-15)=0$,这个关于 n 的方程的判别式 $\Delta=a^2+12b-180\geqslant0$,即 $a^2\geqslant-12(b-15)$,而由②式,得 $a^2\leqslant144-b^2$.所以 $144-b^2\geqslant-12(b-15)$,即 $(b-6)^2\leqslant0$,得 $b=6$.

当 $b=6$ 时,$a^2\leqslant144-b^2$,$a^2\geqslant-12(b-15)$ 的等号同时成立,于是 $a^2=108$.此时 $\Delta=0$,$n=\dfrac{a}{b}=\pm\sqrt{3}$ 不是整数.所以满足题意的整数 a 与 b 不存在.

题4 设集合 $A=\{x\mid x^2-[x]=2\}$、集合 $B=\{x\mid |x|<2\}$.求 $A\cap B$,$A\cup B$(其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数).

精析 因为 B 集合中的元素是明确的,故要求 $A\cap B$ 与 $A\cup B$,这只要明确 A 集合中的元素即可,而集合 A 是一超越方程的解集,应是有限集,故可利用 $[x]$ 的含义来探求集合 A,从而解决原问题.

解 令 $f_1(x)=x^2$,$f_2(x)=[x]+2$,则

$$A=\{x\mid f_1(x)=f_2(x)\}.$$

因为 $x^2-(x+2)=0$ 的解为 $x=-1$ 或 $x=2$,

故①当 $x>2$ 时,$x^2-(x+2)>0$,

即 $x^2>x+2$.又因为 $[x]\leqslant x$,所以

$$x^2>x+2\geqslant[x]+2.$$

此时 $f_1(x)\neq f_2(x)$.

②当 $-1\leqslant x\leqslant2$ 时.

因为 $f_2(x)$ 是整数,所以满足 $f_1(x)=f_2(x)$ 的 x 值一定也使 $f_1(x)=x^2$ 为整数.易知只有 $-1,0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2$ 这6个值.经验证,$x=-1,\sqrt{3},2$ 三个值满足 $f_1(x)=f_2(x)$.

③当 $x<-1$ 时,$x^2>x+2\geqslant[x]+2$.

此时,$f_1(x)\neq f_2(x)$.

综上可得 $A=\{-1,\sqrt{3},2\}$.故

$$A\cap B=\{-1,\sqrt{3}\},$$
$$A\cup B=\{x\mid -2<x\leqslant 2\}.$$

题5 (1999.I.M.O预选题) 证明:正整数集$\mathbf{N}^*$不能分成三个没有公共元素的非空子集,使得从两个不同的子集中各任取一个正整数x,y,而x^2-xy+y^2属于第三个子集.

精析 由于本题所要证明的命题是以否定形式给出的,所以比较适合用反证法证明.

证明 设$f(x,y)=x^2-xy+y^2$.假设正整数集能分成满足条件的三个非空子集:

$$\mathbf{N}^*=A\cup B\cup C.$$

不妨设$1\in A,b\in B,c\in \mathbf{C}$.其中$b<c$,且$1,b,c$分别是这三个子集中最小的元素,从而有$1,2,\cdots,b-1\in A$.

引理1 x,y和$x+y$不可能属于三个不同的子集.

事实上,如果$x\in A,y\in B,x+y\in\mathbf{C}$,则由假设条件,知$Z=f(x+y,x)\in B$,又因为$f(x+y,x)=f(x+y,y)\in A$.
即Z既属于A又属于B,此与A,B,C三集合互不相交矛盾.故x,y和$x+y$不可能属于三个不同的子集.

引理2 子集C包含一个b的倍数.如果子集C所包含的b的倍数中最小的一个为kb.则$(k-1)b\in B$.

事实上,设r是c除以b的余数,如果$r=0$,则$c=nb\in C$,如果$r>0$,因为c是C中最小的数,所以$c-r\notin C$.又因为$r\leqslant b-1$,所以$r\in A$.由于$r+(c-r)=c$,由引理1,知$c-r\notin B$,于是$c-r\in A$.由$b\in B$,得

$$\begin{aligned}f(c-r,b)&=(c-r)^2-(c-r)b+b^2\\&=n^2b^2-nb^2+b^2=mb\in C.\end{aligned}$$

故子集C包含一个b的倍数.

若$kb\in C$,其中k是满足$nb\in C$的n的最小值,且$b+(k-1)b=kb$,由引理1,知$(k-1)b\notin A$.又因为$(k-1)b\notin C$,所以$(k-1)b\in B$.故引理2得证.

引理3 对于任意正整数 n，$(nk-1)b+1\in A$，$nkb+1\in A$.

事实上可对 n 用数学归纳法进行证明.

当 $n=1$ 时，因为 $1\in A$，$(k-1)b\in B$，由引理1，知 $(k-1)b+1\notin C$，又因为 $b-1\in A$，$kb\in C$，再由引理1，得 $(k-1)b+1\notin B$. 故 $(k-1)b+1\in A$.

同理，因为 $(k-1)b+1\in A$，$b\in B$. $kb+1\notin C$. 又因为 $1\in A$，$kb\in C$，$kb+1\notin B$，所以 $kb+1\in A$.

假设 $[(n-1)k-1]b+1\in A$，$(n-1)kb+1\in A$，由于 $(n-1)kb+1\in A$，$(k-1)b\in B$，$(nk-1)b+1\notin C$，又因为 $[(n-1)k-1]b+1\in A$，$kb\in C$，所以 $(nk-1)b+1\notin B$，从而 $(nk-1)b+1\in A$.

同理，由于 $(nk-1)b+1\in A$，$b\in B$，$nkb+1\notin C$，又因为 $(n-1)kb+1\in A$，$kb\in C$，$nkb+1\notin B$，故 $nkb+1\in A$.

综上所述，引理3成立.

由上述引理，知 $kb+1\in A$，$kb\in C$，所以

$$\begin{aligned} f(kb+1,kb)&=(kb+1)^2-(kb+1)kb+(kb)^2\\ &=(kb+1)kb+1. \end{aligned}$$

由引理3，知 $f(kb+1,kb)\in A$，而由假设，知 $f(kb+1,kb)$ 应属于 B. 矛盾.

故假设不成立. 原命题为真.

题6 (2000·俄罗斯) 设 M 为有限集，现知从它的任何3个元素中都可以找出两个数，它们的和属于 M. 试问：M 中最多可以有多少个元素？

精析 由于本题问 M 中最多可以有多少个元素，所以我们可以试着先构造一个集合，看看这个集合的元素最多可以有多少？由题，知集合 M 中任3个元素中一定有两个数的和仍在 M 中，所以我们猜想这种集合 M 中可以有0并且各元素关于0两边对称. 由此可得一集合 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 满足题设要求，但在此集