21世纪高等继续教育精品教材·公共课系列

高等数学

GAODENG SHUXUE

顾晓叶　王德才◎主编

中国人民大学出版社

21 世纪高等继续教育精品教材·公共课系列

高等数学

顾晓叶　王德才　主编

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/顾晓叶等主编. —北京：中国人民大学出版社，2012.9
21 世纪高等继续教育精品教材·公共课系列
ISBN 978-7-300-16216-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①顾… Ⅲ.① 高等数学-成人高等教育-教材Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 197959 号

21 世纪高等继续教育精品教材·公共课系列
高等数学
顾晓叶　王德才　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	版　　次	2012 年 10 月第 1 版
印　　张	21.25	印　　次	2012 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	525 000	定　　价	39.00 元

21 世纪高等继续教育精品教材

编审委员会

总　序

21世纪，科学技术发展日新月异，发明创造层出不穷，知识更新日趋频繁，全民学习、终身学习已经成为适应经济与社会发展的基本途径。近年来，我国高等教育取得了跨越式的发展，毛入学率由1998年的8%迅速增长到2004年的19%，已经进入大众化的发展阶段，这其中高等继续教育发挥了重要的作用。同时，高等继续教育作为“传统学校教育向终身教育发展的一种新型教育制度”，对实现“形成全民学习、终身学习的学习型社会”、“构建终身教育体系”的宏伟目标，发挥着其他教育形式不可替代的作用。

目前，我国高等继续教育的发展规模已占全国高等教育的一半左右，随着我国产业结构的调整、传统产业部门的改造以及新兴产业部门的建立，各种岗位上数以千万计的劳动者，需要通过边工作边学习来调整自己的知识结构、提高自己的知识水平，以适应现代经济与社会发展的要求。可见，我国高等继续教育的发展，既肩负着重大的历史使命又面临着难得的发展机遇。

我国的高等继续教育要抓住机遇发展，完成自己的历史使命，从根本上说就是要全面提高教育教学质量，这涉及多方面的工作，但抓好教材建设是提高教学质量的基础和中心环节。众所周知，高等继续教育的培养对象主要是已经走上各种生产或工作岗位的从业人员，这就决定了高等继续教育的目标是培养能适应新世纪社会发展要求的动手能力强、具有创新能力的应用型人才。因此，高等继续教育教材的编写“要本着学用结合的原则，重视从业人员的知识更新，提高广大从业人员的思想文化素质和职业技能”，体现出高等继续教育的针对性、实用性和职业性特色。

为适应我国高等继续教育发展的新形式、培养应用型人才、满足广大学员的学习需要，中国人民大学出版社邀请了国内知名专家学者对我国高等继续教育的教学改革与教材建设进行专题研讨，成立了教材编审委员会，联合中国人民大学、中国政法大学、东北财经大学、武汉大学、山西财经大学、东北师范大学、华中科技大学、黑龙江大学等30多所高校，共同编撰了“21世纪高等继续教育精品教材”，计划在近两三年内陆续推出百余种高等继续教

育精品系列教材。教材编审委员会对该系列教材的作者进行了严格的遴选，编写教材的专家、教授都有着丰富的继续教育教学经验和较高的专业学术水平。教材的编写严格依据教育部颁布的“全国成人高等教育公共课和经济学、法学、工学主要课程的教学基本要求”；教材内容的选择克服了追求“大而全”的现象，做到了少而精，有针对性，突出了能力的训练和培养；教材体例的安排突出了学习使用的弹性和灵活性，体现“以学为主”的教育理念；教材充分利用现代化的教育手段，形成文字教材和多媒体教材相结合的立体化教材，加强了教师对学生学习过程的指导和帮助，形象生动、灵活方便，易于保存，可反复学习，更能适应学员在职、业余自学，或配合教师讲授时使用，会起到很好的教学效果。

这套“21 世纪高等继续教育精品教材”在策划、编写和出版过程中，得到教育部高教司、中国成人教育协会、北京高校成人高教研究会的大力支持和帮助，谨表深切谢意。我们相信，随着我国高等继续教育的发展和教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的实施，这套高等继续教育精品教材必将为促进我国高校教学质量的提高作出贡献。

杨干忠

前　言

本书参照普通高等院校成人教育《高等数学教学基本要求》，结合多年的成人教育教学实践和教学经验，参考近年兄弟院校出版的高等数学有关教材，按照“淡化严格论证、强化逻辑推理、强调数学结论、重在数学模型、注重应用能力、提升科学素养”的思路编写。每节末配有习题，书末附有习题参考答案。为便于教学，附录中汇集了初等数学中的常用公式、几种常用的函数曲线、积分表、标准正态分布表等常见分布表以及概率统计预备知识。

全书的内容包括：极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程、无穷级数、概率统计、线性代数，共十章。

为了适应高职高专院校和成人教育培养应用型人才的需要，提高学生的基本素质和教学质量，解决高职高专院校和成人教育这一层次“高等数学”课程的教材问题，我们根据高职高专院校和成人教育对数学教学的基本要求，编写力求逻辑严密、重点突出、深入浅出、便于自学。

为使教材便于教学使用，我们在编写教材时力求突出以下特点：

1. 编写教材时合理取舍内容。根据成人教育学生基础知识较为薄弱、对于抽象知识的接受能力较差的特点，按照成人教育的教学规律，对教学内容进行适当处理，恰当取舍，对有关定理的证明可以不做要求，借助几何直观加以说明，以帮助学生理解。

2. 突出重点，降低难点。对已经学过的知识，不进行详细的叙述、讲解，只把没讲过的进行强调，重点放在基础理论、基础知识、基本方法上，提高逻辑思维、推理论证和分析问题、解决问题的能力，不过分追求数学知识的系统性和严谨性，做到讲透概念，淡化演绎，加强基本技能训练，注重沟通新旧知识之间的联系，减轻学生的学习负担，化解知识的难点。

3. 依据成人教育学生的特点，内容取材上按照“通俗易懂，够用为度，简洁直观，实用为主”的指导思想，淡化纯粹的理论证明与运算技巧，增加应用数学知识和方法解决实际

问题的内容，将数学建模的知识穿插于各个教学章节之中，有机渗透数学建模的思想，增强数学的应用性。

4. 在重要概念引入之前，简明地阐述了其产生的背景及应用的总体思路，对概念、定理、公式的理解和应用给出了相应的总结。

5. 依据循序渐进的原则，选编了例题和课后习题。为便于检查学习效果，在每一节的结尾，给出了本节相应的习题，编写格式适合成人教育学生的实际情况。另外，书中注 * 的部分为选学内容。

本书由顾晓叶、王德才任主编，参加编写的还有贾进涛、郭健、封心拥、尹自永、秦健、吕杰、周辰、赵亮等。

本书起点低，难度小，内容精简，适合自学。适用于成人高校、继续教育学院和民办高校的学生，也可作为高职高专院校及有关人员学习数学知识的参考书。

由于编者水平有限，书中的错误和不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正。另外，中国人民大学出版社对本教材的编排、出版等提出了许多宝贵建议，在此深表谢意。

编者

2012年8月

目　录

微积分成为一门学科，是在十七世纪.在前人工作的基础上，英国科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作，虽然这只是十分初步的工作.他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起，一个是切线问题（微分学的中心问题），一个是求积问题（积分学的中心问题）.

起源于资本主义工业革命的微积分是现代数学的重要基础与起点，不仅在物理学、化学、生物学等自然科学领域中有非常广泛的应用，而且成为社会、经济、人文等领域的一个重要的研究工具.

第一章 极限与连续

极限与连续是两个抽象的概念，它们来自人们的社会实践.古巴比伦人在研究天文现象时，把时间作为一个连续变量分割成不连续的相等间隔，通过研究每个间隔上的月亮亮度，计算出其亮度变化的极大值.

公元前五世纪左右，古希腊的德漠克利特学派把朴素的唯物主义思想引入数学，形成了数学原子论.他们把无穷小量（“原子”）看成是一个固定的量，认为几何图形是由这些“原子”构成的.波利亚学派的芝诺提出了最为著名的飞箭问题，认为：凡占有与其本身大小相等空间（位置）的物体是静止不动的（如果把时间分割得这样短，使得每一瞬间上飞箭只占一个位置，而飞箭在飞行过程中的每一瞬间都是如此，那么飞箭不动）.

公元前三四世纪，我国庄子《天下篇》中有“飞鸟之影，未尝动也，链矢之疾，而有不行不止之时”的论述.其论证与芝诺如出一辙，而其思想却比芝诺更进一步.《天下篇》中还言：“至大无外，谓之大一，至小无内，谓之小一.”大到没有外面，自然是无穷大，小到没有里面，当是无穷小了.又说：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”“万世”实际指任何时候，强调分割程序的无限性.我国第一个创造性地将无穷小思想运用到数学中的人是魏晋时期的著名数学家刘徽，他天才般地提出了用增加圆内接正多边形的边数来逼近圆的“割圆术”，从其“割之弥细，所失弥少.割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”的阐述中可见刘徽对无穷小的认识已相

当深刻.

试以现在的数学语言来描述这一论断，在春秋战国时期是不可能的. 甚至当牛顿和莱布尼兹在十七世纪各自独立地创立微积分理论后的很长一段时期内，关于极限与连续的概念也未彻底从几何直观的思想束缚下解放出来.

实际上，人们在日常生活中买东西就是具体的极限、连续与间断问题. 当某种商品的价格不变时，购买的商品数量 x 就决定了你必须支付的货币 y，即 $y=f(x)$. 如果某种商品的单价是 1 元/克，无论你想要买的是一克还是一百克，对应于商品数量 x 的每个变动 Δx，都会有一个相应的支出额 y 的变动 Δy. 把商品数量与支出额的相互变动用坐标图表示出来，它的图形就是一条连续直线.

尽管极限与连续的概念源于实践，但它并不等于具体事物，以上所举的例子仍是一种直观的说明. 实际上图形为连续的函数并不一定是连续的. 如在社会经济研究中占有重要地位的时间进行数列分析，尽管时间作为一个变量是连续的，但被研究的某个变量数值（如产值、销售额等）却是离散的. 我们可以把年产值细分为月产值、日产值甚至小时产值，但不可能无限细分下去（同时细分下去也就失去了任何意义）. 因此，尽管我们可以把各年（各季、各月……）的数据描绘在坐标图上连成一条连续的直线或曲线，但它反映的实际上是间断的各时点数据.

下面我们从函数开始进入本章的学习.

第一节　函　　数

一、集合

1. 定义

定义 1　由确定的一些对象汇集的总体称为**集合**；组成集合的这些对象被称为集合的**元素**.

2. 表示

用大写字母 $A,B,C\cdots$ 表示集合；用小写字母 $a,b,c\cdots$ 表示集合的元素.

x 是集合 E 的元素，记为 $x\in E$（读作 x 属于 E）；y 不是集合 E 的元素，记为 $y\notin E$（读作 y 不属于 E）. 不含任何元素的集合称为空集合，记作 $\varnothing$.

3. 集合间的关系

子集合：如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，那么我们就说 E 是 F 的**子集合**，简称为**子集**，记为 $E\subset F$（读作 E 包含于 F），或者 $F\supset E$（读作 F 包含 E）.

相等：如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，并且集合 F 的任何元素也都是集合 E 的元素（即 $E\subset F$ 并且 $F\supset E$），那么我们说集合 E 与集合 F **相等**，记为 $E=F$.

我们约定：空集合 $\varnothing$ 是任何集合 E 的子集，即 $\varnothing\subset E$.

二、数集

1. 常用数集

$\mathbf{N}$——自然数集；$\mathbf{Z}$——整数集；$\mathbf{Q}$——有理数集；$\mathbf{R}$——实数集；$\mathbf{C}$——复数集. 把非负整数、非负有理数和非负实数的集合分别记为 $\mathbf{Z}^+$，$\mathbf{Q}^+$ 和 $\mathbf{R}^+$，显然有 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}^+\subset\mathbf{Q}^+\subset\mathbf{R}^+$.

2. 区间

区间的概念，包括有限区间（闭区间、开区间、半开半闭区间）和无限区间.

注意　∞只是符号不是数，$+\infty$表示沿 x 轴的正方向可以无限变大，$-\infty$表示沿 x 轴的负方向可以无限变小（或说其绝对值可无限变大）. 归纳起来见表 1—1.

表 1—1

符号	名称		定义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开半闭区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开半闭区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\leqslant a\}$

3. 邻域

今后常用到形如$(x_0-\delta,x_0+\delta)$的开区间，称为点 x_0 的 **δ 邻域**，简记为 $U(x_0,\delta)$，其中 x_0 称为邻域的**中心**，δ 称为**半径**.

于是有

$$x\in U(x_0,\delta)\Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta\Leftrightarrow |x-x_0|<\delta$$

如图 1—1 所示.

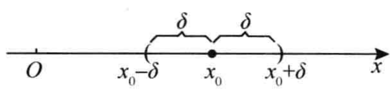

图 1—1

有时还用到**去心邻域**，它的记法和定义是

$$\overset{*}{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

其中 $0<|x-x_0|\Leftrightarrow x\neq x_0$.

无须指明邻域的半径时，可用符号 $U(x_0)$或 $\overset{*}{U}(x_0)$.

三、函数概念

客观世界处在永恒的运动、发展和变化中. 基于对各种变化过程和变化过程中的量与量的依赖关系的研究，产生了函数的概念. 函数就是对运动过程中量与量的依赖关系的抽象描述，是刻画运动变化中变量之间相依关系的数学模型. 在莱布尼兹（他最先使用函数这个词）以及十八世纪的许多数学家看来，函数关系的概念是指存在着表示这些关系的正确的数学式子. 后经欧拉、狄里克利、戴德金等数学家的不断修订、扩充才逐步形成现代的函数概念，直到今天，函数的概念还在不断地发展着.

在初中代数中函数概念是利用“对应法则”直接给出的. 高中代数是先用“对应法则”、“对应”定义映射，再用映射定义函数. 它们都是用原始概念（对应法则、对应等）来定义函数的. 现代函数概念发展到以通常所理解的“函数的图形”的概念作为函数定义的蓝图，用有序数对集合的语言来定义.

1. 量

我们称变化的量为变量,不变化的量为常量.而函数是考察变量之间关系的重要概念.

2. 引例

例 1 某食品零售店代销一种面包,未售出的面包可退回厂家,统计销售情况时发现,当这种面包的单价定为 7 角时,每天卖出 160 个.在此基础上,这种面包的单价每提高 1 角时,该零售店每天就会少卖出 20 个.考虑了所有因素后该零售店每个面包的成本是 5 角.

设这种面包的单价为 x(角),零售店每天销售这种面包所获得的利润为 y(角).y 与 x 有着联系:

每个面包的利润为$(x-5)$角,卖出的面包个数为 $160-(x-7)\times 20$,则 $y=(x-5)[160-(x-7)\times 20]=-20x^2+400x-1\,500$.

例 2 球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

其中 π 是圆周率,是常数.$r\in(0,+\infty)$都对应一个球的体积 V.

上面两例来自于不同的问题,但是它们有共同之处,我们将其抽象出来,便得到函数的概念.

3. 函数的定义

定义 2 设 A 是非空数集.若存在对应关系 f,对 A 中任意数 x,按照对应关系 f,对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$,则称 f 是定义在 A 上的**函数**,表示为

$$f:A\to\mathbf{R}$$

(1)数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**,表示为 $y=f(x)$;

(2)x 称为**自变量**,y 称为**因变量**;

(3)数集 A 称为函数 f 的**定义域**,函数值的集合 $f(A)=\{f(x),x\in A\}$称为函数 f 的**值域**.

根据函数定义不难看到,例 1、例 2 皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明:

(1)函数的符号可简化.为方便起见,我们约定,将“f 是定义在数集 A 上的函数”,用符号“$y=f(x),x\in A$”表示.当不需要指明函数 f 的定义域时,又可简写为“$y=f(x)$”,有时甚至笼统地说“$f(x)$是 x 的函数(值)”.

(2)关于函数的定义域.当函数无实际意义时,定义域是使函数 $y=f(x)$有意义的实数 x 的集合 $A=\{x\mid f(x)\in\mathbf{R}\}$.例如,函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$有意义的实数 x 的集合,即闭区间$[-1,1]=\{x\mid\sqrt{1-x^2}\in\mathbf{R}\}$.

当函数有实际意义时,它的定义域要受实际意义的约束.例如,上述例 2,半径为 r 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 这个函数,从抽象的函数来说,r 可取任意实数;从它的实际意义来说,半径 r 只能是正数,因此它的定义域是区间$(0,+\infty)$.

(3)在函数 $y=f(x)$的定义中,要求对应于 x 值的 y 值是唯一确定的,这种函数也称为**单值函数**.如果取消唯一这个要求,即对应于 x 值,可以有两个或两个以上确定的 y 值与之对应,那么函数 $y=f(x)$称为**多值函数**.例如,函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$是多(双)值函数.

(4)函数的两要素为定义域和对应法则,与变量用何符号表示没有关系.

4. 函数举例

下面介绍几个重要的函数.

例 3　取整函数 $y=[x]$,表示任意 $x\in\mathbf{R}$,对应的 y 是不超过 x 的最大整数.

如 $[0]=0,[2.6]=2,[3]=3,[-\pi]=-4$(见图 1—2).

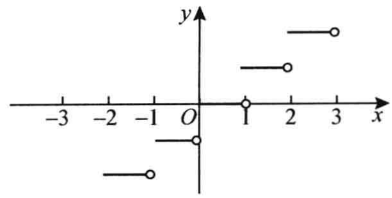

图 1—2

例 4　函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数,

它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,它的图形如图 1—3 所示,对于任何实数 x,有下列关系成立:

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

例 5　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,图形如图 1—4 所示.

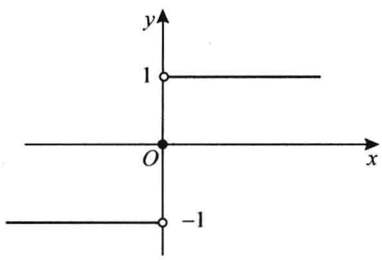

图 1—3

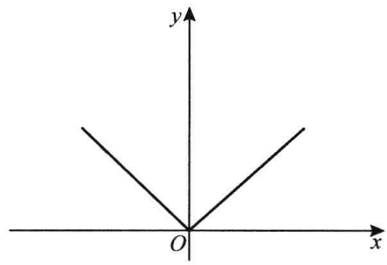

图 1—4

例 6　狄里克利函数 $f(x)=D(x)$表示:当 x 是有理数时,$D(x)=1$;当 x 是无理数时,$D(x)=0$.

例 4 和例 5 中的函数在自变量的不同变化区间中,函数的表达式也不同,通常称之为**分段函数**. 在自然科学、工程技术中,经常会遇到分段函数的情形.

注意　分段函数仍是一个函数.

例 7　(生活中的通信网络问题)某电信部门为了鼓励固定电话消费,推出新的优惠套餐:月租 10 元;每月拨打市内电话在 120 分钟内时,每分钟收费 0.2 元,超过 120 分钟的每分钟收费 0.1 元;不足 1 分钟时按 1 分钟计费. 则某用户一个月的市内电话费用 y(元)与拨打时间 t(分钟)的函数关系可用图 1—5 表示.

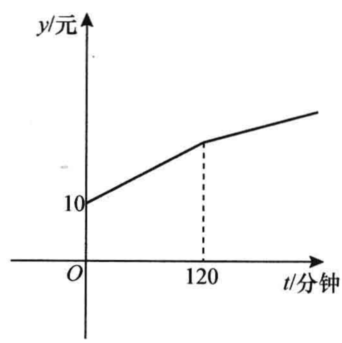

图 1—5

前边我们研究的函数都是假设它可以表示为 $y=f(x)$的形式,即等式的左端只有因变量 y,右端是关于自变量 x 的解析表达式. 能表达成这种形式的函数我们称之为**显函数**. 但并非函数都能表达成这种形式,如著名的**开普勒方程** $y-x-\varepsilon\sin y=0$ $(0<\varepsilon<1)$.

在方程 $F(x,y)=0$ 中,当变量 x 在某一范围内取值时,若总有相应的变量 y 与之对应以满足方程,则称方程 $F(x,y)=0$ 在该区域内确定 y 是 x 的隐函数,即存在函数 $y=f(x)$,使得 $F(x,f(x))\equiv 0$. 称 $y=f(x)$是方程 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**(的**显式**). 例如:

(1)方程 $x-y^3+1=0$ 确定的隐函数(的显式)是 $y=f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$.

(2)方程 $x^2+y^2=r^2$ 在 $y\geqslant 0$ 条件下确定的隐函数(的显式)为 $y=f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$;在 $y\leqslant 0$条件下确定的隐函数(的显式)为 $y=f(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

将方程确定的隐函数表达为初等函数形式的过程称为**将函数显化**.但有时显化是困难的,有时是不可能的(如隐函数 $y=f(x)$不是初等函数的时候).

四、几类具有特殊性质的函数

1. 有界函数

定义 3 设函数 $f(x)$在数集 A 上有定义,若函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$有界(即存在$M>0$,使任意 $x\in A$,有$|f(x)|\leqslant M$),则称函数 $f(A)$在 A 上**有界**,否则称 $f(x)$在 A 上**无界**.

函数的有界性实际上就是它的值域集合的有界性.

例如 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数;$y=\tan x$ 和 $y=[x]$则是$(-\infty,+\infty)$ 上的无界函数.

2. 单调函数

定义 4 设函数 $f(x)$在数集 A 上有定义,若对任意 $x_1,x_2\in A$ 且 $x_1<x_2$, $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$,则称函数 $f(x)$在 A 上**严格单调增加(严格单调减少)**;若上述不等式改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)(f(x_1)\geqslant f(x_2))$,则称函数 $f(x)$在 A 上**单调增加(单调减少)**.

例如,函数 $y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的.因此,在$(-\infty,+\infty)$内,$y=x^3$是单调函数.而函数 $y=2x^2+1$ 在$(-\infty,0)$内是严格单调减少的,在$[0,+\infty)$内是严格单调增加的.因此,在$(-\infty,+\infty)$内,$y=2x^2+1$ 不是单调函数.

3. 奇函数与偶函数

定义 5 设函数 $f(x)$定义在数集 A,若 $\forall x\in A$,$-x\in A$,且

$$f(-x)=-f(x)(f(-x)=f(x))$$

则称函数 $f(x)$是**奇函数(偶函数)**.

奇函数的图形关于原点对称;偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如,函数 $y=x^4-2x^2$,$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\dfrac{\sin x}{x}$皆为偶函数.函数 $y=\dfrac{1}{x}$,$y=x^3$,$y=x^2\sin x$ 皆为奇函数.

4. 周期函数

定义 6 设函数 $f(x)$定义在数集 A,若存在 $l>0$,对任意 $x\in A$,有 $x\pm l\in A$,且$f(x\pm l)=f(x)$,则称函数 $f(x)$是**周期函数**,l 称为函数 $f(x)$的一个**周期**.

注意 周期不唯一.若 l 是函数 $f(x)$的周期,则 $2l$ 也是它的周期.不难用归纳法证明,若 l 是函数 $f(x)$的周期,则 $nl(n\in\mathbf{N})$也是它的周期.

若函数 $f(x)$有最小的正周期,通常称该正周期为函数 $f(x)$的基本周期,简称为周期.

例如,$y=\sin x$ 就是周期函数,周期为 2π.再如,常数函数 $y=1$ 也是周期函数,任意正的实数都是它的周期.

五、复合函数与反函数

如果某个变化过程中同时出现几个变量,其中第一个变量依赖于第二个变量,第二个变量又取决于第三个变量,于是第一个变量实际上是由第三个变量所确定.这类多个变量的连锁关系引出了数学上复合函数的概念.在中学数学里,我们就常遇到过这样的函数.例如,$\ln\sin x$ 是