高等学校教材

数学物理方程

（第二版）

下册

陈庆益　李志深　编著

高等教育出版社

高等学校教材

数学物理方程

（第二版）

下　　册

陈庆益　李志深　编著

高等教育出版社

内 容 提 要

本书为第二版，是在第一版的基础上总结了近几年的教学经验，并吸收了兄弟院校的宝贵意见，从表述方式或材料安排方面作了较大改动，使之更便于教学.

本书共十章，分上、下册出版. 上册（前五章）包含古典数学物理方程的基本内容. 第 1 章用微元法引出三类典型方程的定解问题，而把变分原理及相应的引出方式放入章末的附录中；第 2、3、4 章分别讨论波动方程、位势方程和热传导方程典型定解问题的适定性、解法及解的性质；第 5 章介绍二阶线性偏微分方程的分类和特征概念，并对典型方程作出总结；第 6 章基本上按数学分析的水平介绍广义函数，包括 Соболев 空间、嵌入定理及迹定理；第 7 章讨论一般的常系数方程及其基本解；第 8 章讲述变系数椭圆方程及退化的椭圆方程和双曲方程；第 9 章在对非线性方程的特性作一般性考察后，初步介绍冲击波和孤波；第 10 章介绍近似解，包括解析近似及数值近似. 每章各节除附有习题外，还在各章末列有注释与文献，供进一步学习参考.

本书上册可作为高等院校数学专业的基础课教材；下册可作为选修课以及有关专业研究生课程的教学用书.

高等学校教材

数学物理方程

（第 二 版）

下　　册

陈庆益　李志深　编著

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印刷

*

开本850×1168　1/32　印张8　字数198,000

1979年1月第1版　1987年4月第2版

1987年4月第1次印刷

印数　00,001—3,620

书号　13010·01330　定价　1.35元

目　　录

下　　册

6. 广 义 函 数

广义函数(以后简称广函)及其 Fourier 变换理论是研究偏微分方程的重要工具. 本章力图在数学分析水平上介绍广函理论,包括广函的局部结构;然后初步论述 Соболев 空间及 嵌入 定 理,并提及迹定理.

6.1. 广函及其运算

6.1.1. δ 分布及广函的定义

在力学、物理学及技术科学中,常考虑一些集中量的分布密度或密度分布. 例如,在通常的三维空间 $\boldsymbol{R}^3$中某点$x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$放置单位正电荷, 若用

$$\delta(x-x^0)\equiv\delta(x_1-x_1^0,x_2-x_2^0,x_3-x_3^0)$$

表示电荷的空间分布密度,那么,形式地由密度的通常定义可以认为

$$\begin{cases}\delta(x-x^0)=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta V},\\ \displaystyle\iiint_{R^3}\delta(x-x^0)\,dx=1,\end{cases}$$

这里用 ΔQ 记含点 x 的体元 ΔV 中所含的电荷总量. 由此应该有

$$\begin{cases}\delta(x-x^0)=\begin{cases}\infty, x=x^0,\\ 0, x\neq x^0,\end{cases}\\ \displaystyle\iiint_{R^3}\delta(x-x^0)\,dx=1.\end{cases}\tag{1}$$

一般地,对于在点 x^0 放置的集中正电荷 q,则可形式地引进 密 度

分布

$$\rho(x, x^0)=f(x)\delta(x-x^0),$$

这里 $f(x)$ 为任一连续函数，只要求

$$f(x^0)=q.$$

但是应该有

$$\begin{cases}\rho(x, x^0)=\begin{cases}\infty, x=x^0,\\ 0, x\neq x^0,\end{cases}\\ \iiint_{R^3}\rho(x, x^0)dV=\iiint_{R^3}\delta(x-x^0)f(x)d\boldsymbol{x}\\ \qquad =f(x^0)=q.\end{cases} \tag{2}$$

对于其他的集中量，也可同样地引进密度分布函数，并且都涉及这个 δ 分布或 δ 函数.

显然，这个 δ 函数不能在经典的点函数意义下来理解，因为在任何积分理论中，都得不出 $\delta(x-x^0)$ 沿 $\boldsymbol{R}^3$ 的积分值为 1 的结果. 但由于这个 δ 分布确实反映或至少近似地反映一种现实的量的关系：单位集中量的密度分布，并给现实的不连续量提供一种数数表述的可能性，所以多年来得到广泛的应用.

为了从数学方面认识这个 δ 函数，先由(1)及(2)形式地引出一些推论. 首先注意，对于具任意有限维数 n 的实空间 $\boldsymbol{R}^n=\{\boldsymbol{x}:\ \boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)\}$，位于任一固定点

$$\boldsymbol{x}^0=(x_1^0, \cdots, x_n^0)$$

的单位集中量的密度分布是

$$\delta(x-x^0),$$

它是非负的对称函数(不妨取 $x^0=(0, \cdots, 0)$ 为坐标原点)：

$$\delta(-x)=\delta(x)\geqslant 0, \forall\, x\in\boldsymbol{R}^n, \tag{3}$$

这里 $-x=(-x_1, \cdots, -x_n)$. 其次，作为单位集中量的密度分布，对于在点 x^0 放置集中量 $q=f(x^0)$ 的任一连续延拓 $f(x)$，应有

$$\int \delta(x-x^0)f(x)dx=f(x^0)=q. \tag{4}$$

这里及以后常略去积分号下的积分域；只在有所强调时，才标明积分域是某个特定的域．最后，虽然我们不能从点函数的角度来看待 δ 分布，但却可由它对一些函数的作用值(4)来获取对这个 δ 分布的信息．也就是说，可以把 δ 分布作为一定函数空间 Φ 上的连续线性泛函来看待．关于泛函，下面将作详细说明．为了使 δ 分布便于运算，例如无穷可微，不妨对函数空间 Φ 作较强的要求．下面将看到，取 Φ 为由所有在 $\boldsymbol{R}^n$ 中无穷可微而分别在不同的有界域外恒等于零的实或复值函数 $\varphi(x)$ 组成的空间 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，是特别有利的．$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 中函数通常称为**检试函数**或**基本函数**；相应地称 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 为**检试函数空间**或**基本空间**．还有其他的基本空间，但 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 是最重要的基本空间．

引用已广泛流行的记号

$$\operatorname{supp}\varphi=\{x:\ \ \varphi(x)\neq 0, x\in \boldsymbol{R}^n\}^-,$$

这里用 M^- 记集 M 的闭包①，并称 $\operatorname{supp}\varphi$ 为函数 φ 的**台**或**支集**(support)，则 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 中的函数 φ 称为**紧台函数**，因为这时 $\operatorname{supp}\varphi$ 为紧集(即 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界闭集)，在 $\operatorname{supp}\varphi$ 之外，$\varphi(x)\equiv 0$($x\notin \operatorname{supp}\varphi$)．

一般地，可引用记号

$$C_0^m(\Omega)=\{\varphi(x):\ \ \varphi\in C^m(\boldsymbol{R}^n), \operatorname{supp}\varphi \text{为} \Omega \text{中紧集}\},$$

其中 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中开集，$C^m(\boldsymbol{R}^n)$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中 m 次连续可微的实或复值函数组成的空间，m 为某个非负整数，可取值零，也可取值 ∞：$0\leqslant m\leqslant\infty$。$C_0^m$ 也可记作 C_c^m．

例 1 Dirichlet 函数是

① 点集 M 的闭包 M^- 或 $\overline{M}$ 是对 M 添加其所有的极限点而得的闭集．

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

它的台 $\operatorname{supp} f=[-\infty,\infty]$,即整个实轴.

空间$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$中的函数是很多的,例如有函数

$$\varphi(x;a,b,c)=\begin{cases}c\exp\dfrac{-b^2}{a^2-|x|^2}, & |x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2<a^2,\\ 0, & |x|\geqslant a,\end{cases} \tag{5}$$

其中 a 及 b 为任意正数,c为任一实数或复数.

下面的定理说明 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$中函数的稠密度.

定理 1 任一函数 $f(x)\in C_0^0(\boldsymbol{R}^n)$可用 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$中函数列一致逼近,即 C_0^∞ 为 C_0^0 的稠密子空间.

证明 由 $f(x)$利用下式构造其光滑的**均值函数**:

$$f_\varepsilon(x)=\int_{|x-\xi|\leqslant\varepsilon} f(\xi)\varphi(x-\xi;\varepsilon,\varepsilon,A_\varepsilon)d\xi, \tag{6}$$

其中 A_ε 为正数,它使得

$$\int\varphi(x;\varepsilon,\varepsilon,A_\varepsilon)dx=A_\varepsilon\int_{|x|\leqslant\varepsilon}\exp\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}dx=1. \tag{7}$$

由(6)知 $\operatorname{supp} f_\varepsilon$ 含于 $\operatorname{supp} f$ 的 ε 邻域 $\Omega=\{x:\ |x-\xi|\leqslant\varepsilon,\ \xi\in\operatorname{supp} f\}$中,故 f_ε 具紧台;因 $\varphi\in C_0^\infty$,显然有 $f_\varepsilon\in C_0^\infty$. 据(7)有

$$\begin{aligned}f(x)-f_\varepsilon(x)&=\int_{|x-\xi|\leqslant\varepsilon}f(x)\varphi(x-\xi;\varepsilon,\varepsilon,A_\varepsilon)\,d\xi\\&\quad-\int_{|x-\xi|\leqslant\varepsilon}f(\xi)\varphi(x-\xi;\varepsilon,\varepsilon,A_\varepsilon)d\xi\\&=\int_{|x-\xi|\leqslant\varepsilon}[f(x)-f(\xi)]\varphi(x-\xi;\varepsilon,\varepsilon,A_\varepsilon)d\xi.\end{aligned}$$

因 f 连续,故对任一给定的$\delta>0$,取$\varepsilon>0$ 充分小,只要$|x-\xi|\leqslant\varepsilon$,就有$|f(x)-f(\xi)|<\delta$. 于是由上式得

$$|f(x)-f_\varepsilon(\xi)|\leqslant\delta\int_{|x-\xi|\leqslant\varepsilon}\varphi(x-\xi;\varepsilon,\varepsilon,A_\varepsilon)d\xi$$
$$=\delta.$$

这表明当 $\varepsilon\to 0$ 时，f_ε一致逼近于 f.

$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$显然以实或复数域作系数域组成线性空间. 现在对这个空间的函数列 $\{\varphi_j(x)\}$ 引进**收敛性**概念. 若

1) 所有 φ_j 在**同一**有界闭域K外恒等于零，即 $\operatorname{supp}\varphi_j\subset K$, $j\in N^+$，这里 N^+表示由正整数组成的集；

2) $\{\varphi_j\}$的各阶导数列 $\{\partial^\alpha\varphi_j\}$，$|\alpha|\in N$，在$K$上一致收敛于零，其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$为任何 n 重指标，即 $\alpha\in N^n$. 且

$$\partial^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\ |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\ N=\{0,1,2,\cdots\}. \tag{8}$$

则称列$\{\varphi_j(x)\}$在 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$中收敛于零. 通常记 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$具备上述收敛性而成的(拓扑)空间为 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$或 $\mathscr{D}$(L.Schwartz 空间)，则列$\{\varphi_j(x)\}$在 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$中收敛于零可简记为

$$\varphi_j\to 0(\mathscr{D}).$$

$\varphi_j\to\varphi(\mathscr{D})$当然由 $\varphi_j-\varphi\to 0(\mathscr{D})$来定义. 类似地可定义空间 $\mathscr{D}(\Omega)\equiv C_0^\infty(\Omega)$中的收敛性. 显然，在这种收敛性定义下，$\mathscr{D}$ 及 $\mathscr{D}(\Omega)$都是完备空间.

于是可定义广函如下.

定义 1 $\mathscr{D}$ 上的**广函**(或称**分布**)f是 $\mathscr{D}$ 上的连续线性泛函，即对$\mathscr{D}$中每个检试函数$\varphi(x)$，有确定的实或复数

$$f(\varphi)\equiv\langle f,\varphi\rangle$$

与 φ 相对应，并具备下面两个性质：

1) **线性** 对任何两个实或复数 a 及 b，有

$$f(a\varphi+b\psi)=af(\varphi)+bf(\psi),\ \forall\varphi,\psi\in\mathscr{D}.$$

2) **连续性**　当 $\varphi_j \to 0(\mathscr{D})$时，$f(\varphi_j) \to 0$(在数列的通常收敛性定义下).

$\mathscr{D}$ 上分布的全体记作 $\mathscr{D}'$,称为**广函空间(分布空间)**.

一般地,空间E上的连续线性泛函的全体称为E的**对偶空间**，记为E'.

例 2　δ 分布是 $\mathscr{D}$ 上如下定义的广函：

$$\langle\delta(x-x^0),\varphi(x)\rangle=\varphi(x^0),\forall\varphi\in\mathscr{D}. \tag{9}$$

读者可核验这样确定的δ分布确实是$\mathscr{D}$上的一个连续线性泛函. δ分布通常称为 **Dirac 分布或测度**;在技术科学中则称为**脉冲符号或脉冲函数.**

例 3　任一经典的局部L可积函数(即在$\boldsymbol{R}^n$的任一有界域上 Lebesgue 可积的函数)$f(x)$以如下方式确定一个广函①：

$$\langle f,\varphi\rangle=\int\overline{f(x)}\varphi(x)dx,\forall\varphi\in\mathscr{D}. \tag{10}$$

据$\mathscr{D}$中收敛性定义并注意 $\mathrm{supp}\varphi$ 为有界闭集，容易看出：当$\varphi_j \to 0(\mathscr{D})$时，由 Lebesgue 积分理论中的极限交换定理，确有$f(\varphi_j)\to 0$,故(10)定义一个广函. (10)中的$\overline{f(x)}$是$f(x)$的复共轭值. 以后会看到,对复值泛函,换f或φ为其复共轭值,有其方便之处。(10)中用$\bar{f}$而不用$\bar{\varphi}$，为的是符合定义1中的线性要求：$f(a\varphi)=af(\varphi)$,而不是$f(a\varphi)=\bar{a}f(\varphi)$.

由(10)知广函空间$\mathscr{D}'$包含所有的局部L可积函数. 故$\mathscr{D}'$为非空集;另一方面,由于$\mathscr{D}'$还包含δ分布这种“非经典”的广函，所以广函空间$\mathscr{D}'$确实扩大了经典的函数空间. 为此须证明：由(9)定义的δ分布不能用任何一个局部L可积函数表示为形式(10). 应用反证法. 设存在某个局部L可积函数$f(x)$(因δ作用于实的φ

---

① 有时也用到不取复共轭值的形式，而用圆括号表示：

$$(f,\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx.$$

取实值,可取 f 为实值函数),使

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\int f(x)\varphi(x)dx=\varphi(0),\quad \forall\varphi\in\mathscr{D}.$$

特别对由(5)确定的 $\varphi(x;a,a,1)\in\mathscr{D}$,有

$$\int_{|x|\leq a} f(x)\varphi(x;a,a,1)dx=\varphi(0;a,a,1)=\frac{1}{e},$$

注意右边的值与a无关. 令 $a\to 0$, 上式左边的值因积分域缩为一点而趋于零,而与右边的值e^{-1}不相等. 所得矛盾表明 δ 分布确不能用经典的局部 L 可积函数表示为(10)的形式. 这种情况引出下面的定义.

定义 2 由局部L可积函数$f(x)$ 按(10) 确定的广函称为**函数型广函**或**正规广函**;非正规广函统统称为**奇型广函**.

δ分布是奇型广函,但不是仅有的奇型广函,下面还会见到其他的奇型广函. 注意任一奇型广函不能由局部L可积函数表示为(10)的形式.

例 4 对任一局部L可积函数$f(x)$,由

$$\langle f,\varphi\rangle=\int\overline{f(x)}\partial^p\varphi(x)dx,\quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n) \tag{11}$$

也确定一个广函$f\in\mathscr{D}'$. 根据$\mathscr{D}$中收敛性定义,容易核验这个线性泛函的连续性. 当$|p|>0$ 且 f 处处不存在导数时,(11) 给出一个奇型广函.

定义 3 当$|p|\equiv p_1+\cdots+p_n$是使广函 $f\in\mathscr{D}'$ 表为形式(11)的最小阶数时,称 f 为**$|p|$ 阶广函**. 若$|p|<\infty$, 则称 f 为**有限阶广函**. $\mathscr{D}$上所有的有限阶广函组成的空间记作$\mathscr{D}'_F$.

根据定义 3 ,正规广函为零阶广函. 以后会看到,n 维空间的δ分布是n阶广函.

此后经常要用到两个广函相等的概念.

定义 4 若广函$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$在Ω的某一子域ω中使得

$$\langle f,\varphi\rangle=0,\ \forall\varphi\in\mathscr{D}(\omega), \tag{12}$$

则称f在ω内为**零广函**. 若广函f及g在ω内使$f-g$为零广函, 则称f与g **在ω中相等**;若f与g在Ω的任一子域ω中相等,即称f与g **在Ω中相等**. 使广函f为零广函的最大开子集$\omega\subset\Omega$的余集, 称为广函f的**台或支集**,记作 supp f.

例 5 等式$\delta(x_1,\cdots,x_n)=\delta(x_1)\cdots\delta(x_n)$在$\mathscr{D}'$中按如下意义成立:

$$\begin{aligned}\langle\delta,\varphi\rangle&=\langle\delta(x_1),\langle\delta(x_2),\cdots,\langle\delta(x_n),\varphi(x_1,\cdots,x_n)\rangle\cdots\rangle\rangle\\&=\langle\delta(x_1),\langle\delta(x_2),\cdots,\langle\delta(x_{n-1}),\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1},0)\rangle\cdots\rangle\rangle\\&=\cdots=\varphi(0,\cdots0),\ \forall\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n),\end{aligned}$$

即$\delta(x_1)\cdots\delta(x_n)$为**张量积**$\delta(x_1)\otimes\cdots\otimes\delta(x_n)$,并按上式作用.

还可核验(作为习题)

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(\ln|x|-1)\varphi''(x)\,dx=\left\langle \mathrm{Pv}\,\frac{1}{x},\ \varphi\right\rangle$$

$$\equiv\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx,\ \forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^1), \tag{13}$$

这里 Pv$\frac{1}{x}$记由右边极限定义的非局部可积函数$\frac{1}{x}$的 Cauchy 主值. 于是$\frac{1}{x}$也是$\mathscr{D}'$中的奇型广函. 以后会看到,$\frac{1}{x}$的各阶导数也在$\mathscr{D}'$中.因此,$\mathscr{D}'$也包含许多非局部可积的经典函数. 但奇性太高的函数,例如$e^{\frac{1}{x}}$,$e^{\frac{1}{x^2}}$等,则不在$\mathscr{D}'$中.

最后考虑急降函数空间(L.Schwartz$S$空间)$\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)=\{\varphi(x):\ \sup_{\alpha,\beta}|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|<\infty,\ x\in\boldsymbol{R}^n,\quad |\alpha|,\ |\beta|=0,1,2,\cdots\} \tag{14}$$

即$\mathscr{S}$中函数φ当$|x|\to\infty$时比$|x|^{-1}$的任何正幂更快地趋于零,

φ 的各阶导数 $\partial^\alpha\varphi$ 也具此性质．故$\mathscr{S}$称为**急降函数空间**，$\mathscr{S}$中元 φ 称为**急降函数**．$\mathscr{S}$中函数列 $\{\varphi_j(x)\}$的**收敛性**如下定义(显然，$\mathscr{S}$在这种收敛下的完备空间)：

$$\varphi_j(x)\to 0(\mathscr{S}):\quad \lim_{j\to\infty}\sup_{x\in R^n}\left|x^\alpha\partial^\beta\varphi_j(x)\right|=0,$$

$$\forall\alpha,\beta\in N^n,\forall x\in \boldsymbol{R}^n. \tag{15}$$

由此可引进$\mathscr{S}$上的连续线性泛函空间$\mathscr{S}'$，即$\mathscr{S}$ 上 的 广 函 空间 $\mathscr{S}'$．$\mathscr{S}$上广函当$|x|\to\infty$时仅仅能具幂增率 $O(|x|^k)$，故$\mathscr{S}'$ 称为**缓增广函空间**．显然有包含关系：

$$\mathscr{D}\subset\mathscr{S},\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'.$$

$\mathscr{S}$中不属于$\mathscr{D}$的函数有$e^{-|x|^2}$，$\mathscr{D}'$中不属于$\mathscr{S}'$的广函有$e^{|x|^2}$．

6.1.2. 广函的基本运算

根据广函定义，容易把经典函数的一些运算 法则推 广到广函空间．以下仅就$\mathscr{D}'$考察；$\mathscr{S}'$中的情况基本上是类似的，在有不同之处，再特别提出．

$\mathscr{D}'$中任意两个广函 f 及 g 的和 $f+g$ 定义为如 下的广函：

$$\langle f+g,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle+\langle g,\varphi\rangle,\forall\varphi\in\mathscr{D}. \tag{1}$$

不难看出：$f+g$ 确作成$\mathscr{D}$上的连续线性泛函．特别当 f 及 g 都是经典的局部 L 可积函数时，和 $f+g$ 归为通常的函 数和$f(x)+g(x)$．

广函 f 与数 a 的积 af 定义为广函：

$$\langle af,\varphi\rangle=\bar{a}\langle f,\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n). \tag{2}$$

易知这样定义的积 af 确为$\mathscr{D}$上的连续线性泛函，且当 f 为经典函数 $f(x)$时，积 af 归为通常的积 $af(x)$．

结合以上两种运算，知$\mathscr{D}'$以实或复数域作为系数域形成线性空间．

还可定义广函 f 与任一无穷可微函数 $a(x)\in\mathscr{E}\equiv C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$的

积：

$$\langle af,\varphi\rangle=\langle f,\bar{a}\varphi\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n). \tag{3}$$

这样定义的泛函 af 显然是线性的，尚须核验它的连续性. 为此只须注意当 $\varphi_j\to 0(\mathscr{D})$ 时，确有 $(\bar{a}\varphi_j)\to 0(\mathscr{D})$. 事实上，由乘积微分运算方面的 Leibniz 法则

$$\partial^\alpha(\bar{a}\varphi)=\sum_{|j|=0}^{|\alpha|}\binom{\alpha}{j}\partial^j\bar{a}\,\partial^{\alpha-j}\varphi$$

及 $\mathscr{D}$ 中收敛性定义，知上述收敛性成立. 于是线性泛函 af 的连续性得到保证. 显然，当 f 为经典的局部 L 可积函数 $f(x)$ 时，积 af 归为通常的乘积 $af(x)$.

注 1 函数型广函的作用形式 6.1.1(10)中的复共轭值 $\bar{f}$，显然不影响上述三种运算的经典情况. 例如，和 $f+g$ 归为通常的和 $f(x)+g(x)$，而不是 $\overline{f(x)}+\overline{g(x)}$：因为 6.1.1(10)只是一种作用关系，而不是在任一点给出 $\bar{f}+\bar{g}$ 的值. 这里我们顺便强调一下：经典的连续函数由它在其定义域中每点 x 处的值确定；而广函作为连续线性泛函，则由它作用于空间 $\mathscr{D}$ 中每个元 φ 的值所确定.

注 2 对于 $\mathscr{S}'$，在由(3)定义的积 af 中，还要求 $a(x)$ 具性质：

$$a(x)=O(|x|^k),\quad a\in\mathscr{E}, \tag{4}$$

k 为某非负整数，即 a 具幂增率. 这个要求是显然的，因为 $\mathscr{S}'$ 中广函只能具幂增率. 具性质(4)的函数 $a(x)$，称为空间 $\mathscr{S}$ 或 $\mathscr{S}'$ 上的**乘子**.

注意，一般不能定义 $\mathscr{D}'$ 中任意两个广函的乘积，例如，$\delta\cdot\delta$ 一般是没有意义的(近年来，物理学界和数学界都以多种方式定义这类乘积). 容易看出，$\mathscr{D}'$ 上具结合性的乘法运算会导致矛盾：

$$\left[\left(\mathrm{Pv}\frac{1}{x}\right)\cdot x\right]\cdot\delta=1\cdot\delta=\delta,$$

$$\mathrm{Pv}\frac{1}{x}\cdot(x\cdot\delta)=\mathrm{Pv}\frac{1}{x}\cdot 0=0.$$

这里用到由定义式(3)立即推出的结果$x\delta=0$：

$$\langle x\delta,\varphi\rangle=\langle\delta,x\varphi\rangle=(x\varphi)|_{x=0}=0,\quad \forall\varphi\in\mathscr{D}.$$

例 1 $a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x)$.

事实上，根据定义式(3)有：

$$\langle a(x)\delta(x),\varphi(x)\rangle=\langle\delta(x),\bar{a}(x)\varphi(x)\rangle=\bar{a}(0)\varphi(0)$$
$$=\langle a(0)\delta(x),\varphi(x)\rangle,\forall\varphi\in\mathscr{D}.$$

定义 1 $\mathscr{D}'$中广函列$\{f_j\}$的极限f如下理解：

$$\lim_{j\to\infty}\langle f_j,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathscr{D}. \tag{5}$$

这种借助通常数列收敛性引进的收敛性，称为**弱收敛性**；相应极限称为**弱极限**. 定语“弱”常被略去. (5)可简记为

$$f_j\to f(\mathscr{D}'). \tag{6}$$

类似地可定义广函级数$\sum_j f_j$的收敛性及$\mathscr{D}'$中的弱基本列.

注意列$\{f_j\}\subset\mathscr{D}'$的弱极限$f$的连续性有待证明.

定理 1 若$\mathscr{D}'$中广函列$\{f_j\}$有弱极限f，则$f\in\mathscr{D}'$；从而$\mathscr{D}'$为弱完备空间，即$\mathscr{D}'$中每个弱基本列$\{f_j\}$有弱极限$f\in\mathscr{D}'$.

证明 f显然为线性泛函；对每个$\varphi\in\mathscr{D}$，有确定的数$\lim\limits_{j\to\infty}\langle f_j,\varphi\rangle$与$\varphi$相对应. 为了证明$f$的连续性，只须核验：当$\varphi_j\to 0(\mathscr{D})$时，有$\langle f,\varphi_j\rangle\to 0$. 应用反证法. 设存在列$\{\varphi_j\}\subset\mathscr{D}$，使

$$|\langle f,\varphi_j\rangle|\geqslant c>0,\ j=1,2,\cdots, \tag{7}$$

且$\varphi_j\to 0(\mathscr{D})$，即

$$|\partial^\alpha\varphi_j|\leqslant 1/4^j,\ |\alpha|=0,1,2,\cdots. \tag{8}$$

取$\psi_j=2^j\varphi_j\in\mathscr{D}$，显然有$\psi_j\to 0(\mathscr{D})$，但$|\langle f,\psi_j\rangle|\to\infty$. 选$\{\psi_j\}$的