INFINITE ANALYSIS INTRODUCTION

无穷分析引论

（上）

[瑞士]欧拉 著　　张延伦 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INFINITE ANALYSIS INTRODUCTION

无穷分析引论

（上）

［瑞士］欧拉　著　　　张延伦　译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是作为微积分预备教程，为弥补初等代数对于微积分的不足，为学生从有穷概念向无穷概念过渡而写，读者对象是准备攻读和正在攻读数学的学生、数学工作者和广大数学爱好者. 本书在数学史上地位显赫，是对数学发展影响最大的七部名著之一.

图书在版编目(CIP)数据

无穷分析引论. 上/(瑞士)欧拉著；张延伦译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.3

ISBN 978-7-5603-3999-3

Ⅰ. ①无… Ⅱ. ①欧…②张… Ⅲ. ①无限-数学分析-概论 Ⅳ. ①O173

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 025845 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王 慧
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 18.25 字数 400 千字
版 次 2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3999-3
定 价 88.00 元

中译者的话

本书在数学史上地位显赫，是对数学发展影响最大的七部名著之一. 初版(1748 年)至今虽已 200 多年，但大数学家 A. Weil 教授 1979 年称道其现实作用说：学生从它所能得到的益处，是现代的任何一本数学教科书都比不上的. 笔者手边的俄、德、英译本依次出版于 1961，1985，1988，这大概可视为其现实作用的一个证明.

欧拉贡献巨大，著述极为多产. 本书是它著作中最杰出的，书中结果几乎或为他自己所得，或为他用自己的方法推出. 他的作法是把最基本的东西解释得尽量清楚，讲明引导他得出结论的思路，而把进一步展开留给读者，使读者有机会驰骋自己的才能. 这大概都是 A. Weil 教授前面那段话的根据.

本书是作为微积分预备教程，为弥补初等代数对于微积分的不足，为帮助学生从有穷概念向无穷概念过渡而写. 读者对象是准备攻读和正在攻读数学的学生、数学工作者和广大数学爱好者.

本书从英译本转译，参考俄、德译本作了些订正和改动.

限于水平，中译文错误难免，敬希指正.

几 段 话

1. 高斯:“学习欧拉的著作,乃是认识数学的最好工具.”

2. 拉普拉斯:“读读欧拉,他是我们大家的老师.”

3. 波利亚很欣赏欧拉的作法:坦率地告诉人们引导他作出发明的思路.

4. Alberto Dou,S. J 教授将欧拉的许多著作译成了西班牙文. 他对本书的英译者说:“《无穷分析引论》是欧拉著作中最杰出的.”

5. A. Weil 教授 1979 年在 Rochester 大学的一次讲演中说:“今天的学生从欧拉的《无穷分析引论》中所能得到的益处,是现代的任何一本数学教科书都比不上的.”

英译者序(节译)

1979 年 10 月,Andre Weil 教授在 Rochester 大学,以欧拉的生平和工作为题,作了一次报告.报告中他向数学界着力陈述的一点是:今天的学生从欧拉的《无穷分析引论》中所能得到的益处,是现代的任何一本数学教科书都比不上的.我查到了该书的法、德、俄三个语种的译本,但查不到英文全译本,就是在这样的背景下,我着手对该书进行翻译的.

欧拉的序言中说得明白,这是一本微积分预备教程.书中有几处,那里的东西只提了一下,把处理留给了微积分,用微积分处理要简单容易许多.凡这种地方书中都有交待.

关于书名,欧拉原文中的无穷(Infinitorum)是复数.看来这复数主要指:无穷级数、无穷乘积和连分式三种无穷.因而书名应译为《有关几种无穷的分析引论》,不顺口,我译它为《无穷分析引论》.

任教于巴塞罗那大学的 S. J. Alberto Dou 教授将欧拉的很多著作译成了西班牙文,最近译者曾与他谈起过本书.我们就用那次谈话中他的一句话作为这段序言的结束:“在欧拉的著作中《无穷分析引论》最为杰出.”

作 者 序

接触到的学生，他们学习无穷分析之所以遇到困难，往往是由于在必须使用无穷这一陌生概念时，初等代数刚学，尚未登堂入室．虽然无穷分析并不要求初等代数的全部知识和技能，问题是有些必备的东西，初等代数或者完全没讲，或者讲得不够详细．本书力求把这类东西讲得既充分又清楚，求得完全弥补初等代数对无穷分析的不足．书中还把相当多的难点化易，使得读者逐步地、不知不觉地掌握到无穷这一思想，有很多通常归无穷分析处理的问题，本书使用了代数方法．这清楚地表明了分析与代数两种方法之间的关系．

本书分上、下两册，上册讲纯分析，下册讲必要的几何知识，这是因为无穷分析的讲解常常伴以对几何的应用．别的书中都讲的一般知识本书上、下册都不讲．本书所讲是别处不讲的，或讲得太粗的，或虽讲但所用方法完全不同的．

整个无穷分析所讨论的都是变量及其函数，因此上册细讲函数，讲了函数的变换、分解和展开为无穷级数．对函数，包括属于高等分析的一些函数进行了分类．首先分函数为代数函数和超越函数．变量经通常的代数运算形成的函数叫代数函数，经别的运算或无穷次代数运算形成的函数叫超越函数．代数函数又分为有理函数和无理函数．对有理函数讲了分解它为因式和部分分式，分解为部分分式之和这种运算在积分学中有着重要应用．对无理函数给出了用适当的代换变它为有理函数的方法．无理函数和有理函数都可以展开成为无穷级数，但这种展开对超越函数用处最大．无穷级数的理论可用于高等分析，为此增加了几章，用于考察很多无穷级数的性质与和．其中有些级数的和不用无穷分析是很难求出的，其和为对数和弧度的级数就是．对数和弧度是超越量，可通过求双曲线下的和圆的面积确定，主要由无穷分析对它们进行研究．接下去从以底为变量的幂转向了以指数为变量的幂．作为以指数为变量之幂的逆，自然而有成果地得到了对数概念．对数不仅本身有着大量应用，而且由它可得到一般量的无穷级数表示．还讲了造对数表的简单方法．类似地，我们考察了弧度．弧度与对数虽然是两种完全不同的量，但它们却有着如此密切的关系，当一种为虚数形式时，可化为另一种，重复了几何中多倍角和等分角正弦和余弦的求法之后，从任意角的正弦余弦导出了极小角的正弦和余弦，并导出了无穷级数．由此，从趋于消失的角其正弦等于角度，余弦等于半径，我们可以通过无穷级数使任何一个角度等于它的正弦或余弦．这里我们得到了如此之多的各种各样的有限的和无穷的这种表达式，以至于无需再对其性质进行研究．对数有着它自己的特殊算法，这种算法应用于整个分析．我们推出了三角函数的算法，使得对三角函数的运算如同对数运算和代数运算一样地容易．从书中有几章的内容可以看出，三角函数算法在解决难题时，

其应用范围是何等的广. 事实上,这种例子从无穷分析中还可举出很多,日常的数学学习和数学工作中也会遇到很多.

分解分数函数为实部分分式在积分学中有着重要应用,而三角函数算法对分解分式为实部分分式有极大帮助,我们对它进行详细讨论的原因正在于此. 接下去的讨论是分数函数展成的无穷级数——递推级数. 讨论了它的和、通项和另外一些重要性质. 递推级数考虑的是因式乘积的倒数,我们也考虑了展多因式,甚至无穷个因式的乘积为级数. 这不仅可导致对无穷多个级数的研究,而且利用级数可表示成无穷乘积,我们找到了一些方便的数值表达式,用这些表达式可以容易地计算出正弦、余弦和正切的对数,利用展因式乘积为级数,我们推出了许多有关拆数为和这类问题的解. 倘不利用这一点,看来分析对拆数为和是无能为力的.

本书涉及方面之广,完全可以写成几册书,因而我们力求简单明了,把最基本的东西解释得尽量清楚,而把进一步展开留给读者,使读者有机会驰骋自己的才能,自己来进一步发展分析. 我坦率地告诉读者,本书含有许多全新的东西,并且从本书的很多地方可以得到重要的进一步的发现.

下册讨论的问题,一般地说都属于高等几何,处理方法同于上册. 一般教科书讲这一部分时都从圆锥曲线开始,本书先讲曲线的一般理论,再讲圆锥曲线,为的是能够应用曲线理论去研究任何一种曲线. 本书利用描述曲线的方程,而且只用这种方程来研究曲线. 曲线的形状和基本性质都从方程推出. 我觉得这种处理方法的优越性,在圆锥曲线上表现得最突出. 即或有人对它应用分析方法,那也是显得生硬、不自然的. 我们先从二阶曲线的一般方程解释了二阶曲线的一般性质. 接下去根据有无伸向无穷的分支,也即是否介于某个有限区域之中,对二阶曲线进行了分类. 对于无穷分支,我们进一步考虑分支的条数,并考虑各条分支有无渐近线. 这样我们得到了通常的三种圆锥曲线. 第一种是椭圆,它介于一个有限区域之中;第二种是双曲线,它有四条伸向无穷的分支,趋向两条渐近线;第三种是抛物线,有两条伸向无穷的分支,没有渐近线.

接下去,对三阶曲线用类似的方法,阐述了其一般性质,并将它分为 12 类,事实上是把牛顿的 72 种划分成了 12 类. 对这一方法我们的描述是充分的,不难用它对更高阶曲线进行分类. 书中用它对四阶曲线进行了分类.

在分阶进行考察之后,我们转向了寻求曲线的共同性质. 讲了曲线的切线和法线的定义方法,也讲了用密切圆半径表示的曲率. 虽然这些问题现在一般都用微积分来解决,但本书只在通常代数的基础上对它进行讨论,为的是使读者能够比较容易地从有穷分析过渡到无穷分析. 我们也对曲线的拐点、尖点、二重点和多重点进行了研究. 讲了如何从方程求出这些点,求法都不难. 但我不否认用微分学的方法来求更容易. 我们也讲到了关于二阶尖点这有争论的问题. 二阶尖点,即有同朝向的两段弧收敛于它的尖点. 我们讨论的深度不越出看法一致的范围.

加写了几章,用来讨论具有某些性质的曲线的求法. 最后给出了与圆有关的几个问题的解.

几何中有几部分是学习无穷分析所必备的. 有鉴于此,我们添上了一个附录,用计算

的方式讲立体几何中有关立体和曲面的一些知识.讲了如何用三元方程表达曲面的性质,然后照曲线那样,根据方程的阶数将曲面分了类,并证明了只有一阶曲面才是平面.根据它伸向无穷的部分将二阶曲面分成了六类.对更高阶的曲面也可以用类似的方式进行分类.我们对两个曲面的交线进行了讨论.交线多数都不在一个平面上,我们讲了如何用方程表示交线.最后对曲面的切线和法面进行了一些讨论.

这里声明一点,书中很多东西是别人已经得到了的,恕我没有一一指出.本书力求简短,如果对问题的历史进行讨论,那将突破本书的篇幅限制.作者可聊以自慰的是,对别人已经得到了的东西,其中很多本书是用另一种方法进行讨论的.很希望多数读者从方法新和全新特别是全新的东西中得到益处.

目　　录

第一章　函　数 …………………………………………………… 1
第二章　函数变换 ………………………………………………… 10
第三章　函数的换元变换 ………………………………………… 27
第四章　函数的无穷级数展开 …………………………………… 38
第五章　多元函数 ………………………………………………… 50
第六章　指数和对数 ……………………………………………… 57
第七章　指数函数和对数函数的级数表示 ……………………… 69
第八章　来自圆的超越量 ………………………………………… 76
第九章　三项式因式 ……………………………………………… 91
第十章　利用已知因式求无穷级数的和 ………………………… 110
第十一章　弧和正弦的几种无穷表示 …………………………… 125
第十二章　分解分数函数为实部分分式 ………………………… 139
第十三章　递推级数 ……………………………………………… 152
第十四章　多倍角和等分角 ……………………………………… 173
第十五章　源于乘积的级数 ……………………………………… 193
第十六章　拆数为和 ……………………………………………… 216
第十七章　应用递推级数求根 …………………………………… 234
第十八章　连分数 ………………………………………………… 249

第一章　函　数

§1

常量是固定的保持不变的量.

常量可以取定一个数值,一旦取定即保持常值不变. 在需要用符号表示常量时,使用拉丁字母表中开始部分的字母 a,b,c 等. 这是分析与代数的不同. 代数的考察对象是固定的量,在代数中 a,b,c 等代表已知数,x,y,z 等代表未知数. 而分析中前者代表常量,后者代表变量.

§2

变量是不确定的,是可以取不同数值的量.

确定的量都只可以是一个数,变量可以取每一个数. 也即确定的量,或者常量与变量的关系有如单个事物与一类事物. 一类事物包含这类事物的每一个,变量包含每一个确定的量. 变量通常用拉丁字母表中结尾部分的字母 x,y,z 等表示.

§3

指定变量为某个确定的值,它就成了常量.

变量可以取任何数,因而它的确定方式是无穷的. 取不遍所有确定的数,这变量就依然是变量,不是常量,这样变量就包容着正数和负数、整数和分数、无理数和超越数等这一切数. 零和虚数也一样地在它的取值范围之中.

§4

变量的函数是变量、常量和数用某种方式联合在一起的解析表达式.

只含一个变量 z,余者都为常量,这样的解析表达式叫做 z 的函数. 表达式

$$a+3z, az-4z^2, az+b\sqrt{a^2-z^2}, z^2$$

等就都是 z 的函数.

§5

变量的函数本身也是一个变量.

可以用任何一个确定的值来代替变量,因而函数可以取无穷多个值. 又由于变量可以取虚数值,因而函数可以取任何值. 例如,函数$\sqrt{9-z^2}$,如果限制 z 只取实数值,那么$\sqrt{9-z^2}$ 就取不到大于3的值. 如果允许 z 取虚数值,那就没有$\sqrt{9-z^2}$ 取不到的值. 例如,可以让 z 取 $5\sqrt{-1}$. 但有时会遇到只是像函数的函数,不管变量取什么值,它总保持为常数. 例如

$$z^0,1^z,\frac{a^2-az}{a-z}$$

它们样子像函数,但实际上都是常量.

§6

函数由变量与常量联合而成. 函数之间的基本区别就在于这联合方式.

联合方式决定于运算,运算规定量之间的关系. 这运算首先是代数运算,即加、减、乘、除、乘方和开方,以及解方程. 其次是超越运算,即指数运算,对数运算,以及积分学提供的大量其他运算等.

这里指出两种简单的函数,一种是倍数,例如

$$2z,3z,\frac{3}{5}z,az,\cdots$$

再一种是幂,例如

$$z^2,z^3,z^{\frac{1}{2}},z^{-1},\cdots$$

它们都只含有单一的一种运算. 下面我们对包含多于一种运算的表达式加以分类,并赋予每类一个名称.

§7

函数分为代数函数和超越函数,前者只含代数运算,后者含有超越运算.

z 的倍数,z 的幂以及由前面所说的代数运算形成的任何一个表达式,例如

$$\frac{a+bz^n-c\sqrt{2z-z^2}}{a^2z-3bz^3}$$

都是代数函数,代数函数常常不能显式表出. 例如由方程

$$Z^5=az^2Z^3-bz^4Z^2+cz^3Z-1$$

确定的 z 的函数 Z 就不能显式表出. 虽然这个方程解不出,但可以肯定这个 Z 等于 z 和常数构成的某个表达式,因而这个 Z 是 z 的函数. 关于超越函数要指出的一点是,超越运算

必须作用于变量. 如果超越运算只作用于常量,这样的函数依旧是代数函数. 例如,记半径为 1 的圆的周长为 c,这 c 是个超越量. 对这个超越量 c,表达式

$$c+z,cz^2,4z^c$$

等仍然是代数函数. 有人对 z^c 是否为代数函数提出疑问,也有人认为指数为无理数的幂,如 $z^{\sqrt{2}}$,不该归入代数函数,并给它们起了个名字叫半超越函数. 这都无关紧要.

§8

代数函数又分为有理函数和无理函数. 有理函数其变量不受根号作用,无理函数其变量受到根号的作用.

有理函数只含有加、减、乘、除和整数次的乘方运算. 如

$$a+z,a-z,az,\frac{a^2+z^2}{a+z},az^3-bz^5$$

等就都是 z 的有理函数. 而表达式

$$a+\sqrt{a^2-z^2},(a-2z+z^2)^{\frac{1}{3}},\frac{a^2-z\sqrt{a^2+z^2}}{a+z}$$

就都是无理函数.

无理函数又分为显式的和隐式的. 显式无理函数,如我们刚举出的例子,是可以用根号表示出来. 隐式无理函数是从方程产生的. 例如,方程

$$Z^7=azZ^2-bz^5$$

确定的 Z 就是 z 的隐式函数. 代数理论还没有达到能够从该方程求出 Z 的显式表达式这样的完善程度,允许使用根号也不行.

§9

有理函数又分为整函数和分数函数.

分母中不含变量 z,且变量 z 的指数中没有负数,这样的有理函数叫整函数. 分母中含有 z,或者 z 的指数中有负数,这样的有理函数叫分数函数. 整函数的一般形状为

$$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\cdots$$

凡整函数都在该表达式之中,由于几个分数可以合成为一个分数,所以分数函数的形状都为

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\cdots}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\zeta z^5+\cdots}$$

这里须指出一点,常量 $a,b,c,d,\cdots$ 和 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$ 可为正数,可为负数;可为整数,可为分数;可为无理数,甚至可为超越数. 这都不影响该表达式为分数函数.

§ 10

接下来我们考虑单值函数和多值函数.

单值函数指,从变量 z 的每一个值都只得到一个确定的函数值;多值函数指,从变量 z 的每一个值都可以得到多于一个确定的函数值. 有理函数中的整函数和分数函数都是单值函数,因为这类表达式,每一个 z 值都只产生一个函数值. 无理函数都是多值的,根号给出两个值. 超越函数就不同了,有单值的,也有多值的,甚至有无穷多值的. 反正弦函数就是无穷多值的,其变量 z 的每一个值都对应无穷多个角度.

我们用字母 P,Q,R,S,T 等表示 z 的单值函数.

§ 11

二值函数,指从每一个 z 值都得到函数 Z 的两个值.

平方根,例如$\sqrt{2z+z^2}$,就是二值函数. 对每一个 z 值,表达式$\sqrt{2z+z^2}$ 都有一正一负两个值. 一般地,如果 Z 由二次方程

$$Z^2 - PZ + Q = 0$$

确定,它就是一个二值函数. 当然,这里假定 P,Q 都是 z 的单值函数. 从这个二次方程我们得到

$$Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)P^2 - Q}$$

也即每一个确定的 z 值都对应两个确定的 Z 值. 须指出,Z 的两个值必定同为实数或同为虚数,而且由方程的知识我们知道:这两个值,和等于 P,积等于 Q.

§ 12

三值函数,指每一个 z 值都给出函数的三个确定的值.

三次方程的解就是一个三值函数. 如果 P,Q,R 是 z 的单值函数,且

$$Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$$

那么 Z 就是 z 的三值函数,因为从 z 的任何一个值都能得到 Z 的三个值. Z 的这三个值,必定或者全为实数,或者一实两虚,且这三个值,和等于 P,积等于 R,两个两个之积的和等于 Q.

§ 13

四值函数,指每一个 z 值都给出函数的四个确定的值.

四次方程的解就是一个四值函数. 如果 P,Q,R,S 都是 z 的单值函数,且

$$Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0$$

那么 Z 就是 z 的四值函数,因为 z 的每一个值都对应 Z 的四个值. 这四个值,或者都是实的,或者两实两虚,或者都是虚的. 而且这四个值,和等于 P,积等于 S,两个两个之积的和等于 Q,三个三个之积的和等于 R. 类似地可以定义五值函数、六值函数,等等.

§14

这样一来,如果 Z 由方程

$$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \cdots = 0$$

确定,那么 Z 就是 z 的 n 值函数,从 z 的每一个值都可以得到 Z 的 n 个值.

这里应该指出,n 必须为整数. 也即要知道 Z 是 z 的 n 值函数,应先化 Z 的方程为有理形式,这时 Z 的最高次幂的次数为 n,Z 就是 z 的 n 值函数,从 z 的每一个值就可以得到 Z 的 n 个值. 还应记住,$P,Q,R,S,\cdots$ 都应该是单值函数. 如果其中某一个是多值的,那么从 z 的每一个值得到的 Z 值的个数,将比 $P,Q,R,S,\cdots$ 都是单值函数时多很多. Z 值中虚数的个数必定为偶数. 由此我们得到,如果 n 为奇数,则 Z 的值中至少有一个是实的,如果 n 是偶数,Z 可以没有实值.

§15

如果 z 的多值函数 Z 恒有并且只有一个实值,那么这个 Z 就可以被看成单值函数,并且在多数情况下就可以当作单值函数来使用. 如

$$\sqrt[3]{P},\sqrt[5]{P},\sqrt[7]{P},\cdots$$

就是这样的函数,P 为 z 的单值函数时,它们都给出并且只给出一个实值,其余的值都是虚的. 因此形状如 $P^{\frac{m}{n}}$ 的函数,不管 m 为奇数还是偶数,只要 n 是奇数,就可以当作单值函数. 如果 n 为偶数,那么 $P^{\frac{m}{n}}$ 或者没有实根,或者有两个实数. 因此 n 为偶数时,表达式 $P^{\frac{m}{n}}$ 可以被当作二值函数. 这里要求 $\frac{m}{n}$ 为最简单分数.

§16

如果 y 是 z 的函数,那么 z 也就是 y 的函数.

y 是 z 的函数,不管是单值的还是多值的,那就有一个方程. 通过这个方程,y 由 z 和常量决定. 通过这同一个方程,z 也可以由 y 和常量决定. 这样 z 就可以等于由 y 和常量构成的表达式. 这就是说 z 是 y 的函数. 并且我们也可以得出从一个 y 值能确定几个 z 值. 可以有这样的情形,y 是 z 的单值函数,但 z 是 y 的多值函数. 例如,y,z 通过方程 $y^3 = ayz - bz^2$ 相联系时,y 是 z 的三值函数,而 z 是 y 的二值函数.

§ 17

如果 y 和 x 都是 z 的函数,那么 y 和 x 就也互为对方的函数.

y 是 z 的函数,从而 z 也是 y 的函数;类似地 z 也是 x 的函数. 这两个函数 z 相等,由此得到一个关于 x,y 的方程. 通过这个方程,y 和 x 可互由对方表出,也即互为对方的函数. 由于代数技巧的不足,两个函数 z 往往都不是显式的,但这并不影响它们相等这一性质. 再者,给定两个方程,一个含 y 和 z,一个含 x 和 z,那么用传统的方法消去 z,我们就也得到一个表示 x 和 y 之间关系的方程.

§ 18

下面我们考虑特殊的几类函数. 先考虑偶函数. z 取 $+k$ 和 $-k$ 时,函数值相等的函数叫偶函数.

z^2 就是 z 的一个偶函数. $z=k$ 和 $z=-k$ 时,表达式 z^2 的值相同,都是 $z^2=k^2$. 类似地,z^4,z^6,z^8,一般地,只要 m 为偶数,不管为正为负,幂 z^m 都为偶函数. 另外,由于当 n 为奇数时,可以把 $z^{\frac{m}{n}}$ 当作单值函数,所以 m 为偶数 n 为奇数时,$z^{\frac{m}{n}}$ 是偶函数. 进一步,由偶次幂以任何方式组成的函数仍然是偶函数,例如

$$Z=a+bz^2+cz^4+dz^6+\cdots$$

$$Z=\frac{a+bz^2+cz^4+dz^6+\cdots}{\alpha+\beta z^2+\gamma z^4+\delta z^6+\cdots}$$

都是 z 的偶函数. 对分数指数也类似

$$Z=a+bz^{\frac{2}{3}}+cz^{\frac{2}{5}}+dz^{\frac{4}{7}}+\cdots$$

$$Z=a+bz^{-\frac{2}{3}}+cz^{-\frac{4}{3}}+dz^{-\frac{2}{5}}+\cdots$$

$$Z=\frac{a+bz^{\frac{2}{7}}+cz^{-\frac{4}{5}}+dz^{\frac{8}{3}}}{\alpha+\beta z^{\frac{2}{3}}+\gamma z^{-\frac{2}{5}}+\delta z^{\frac{4}{7}}}$$

都是 z 的偶函数. 而且这类表达式全是单值函数,因而也称它们为单值偶函数.

§ 19

$z=+k$ 和 $z=-k$ 时取值完全相同的多值函数称为多值偶函数.

含 Z 和 z 的方程,Z 的最高次数为 n,Z 就是 z 的 n 值函数. 如果 z 的次数都是偶数,那么这种方程确定的就是 Z 的多值偶函数. 如果

$$Z^2=az^4Z+bz^2$$

那么 Z 就是 z 的二值偶函数;如果

$$Z^3-az^2Z^2+bz^4Z-cz^8=0$$

那么 Z 就是 z 的三值偶函数. 如果 P,Q,R,S,T 等表示 z 的单值偶函数,那么

$$Z^2 - PZ + Q = 0$$

确定的 Z 就是 z 的二值偶函数

$$Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$$

确定的 Z 就是 z 的三值偶函数,类推.

§20

可见由常量和变量 z 构成的偶函数,不管单值的还是多值的,z 的次数都必须是偶数.

我们已经举过一些这样的单值函数的例子,再如,表达式

$$a + \sqrt{b^2 - z^2}, az^2 + \sqrt[3]{a^6z^4 - bz^2}, az^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{z^2 + \sqrt{a^4 - z^4}}$$

等也是这样的函数.

因而可定义偶函数为 z^2 的函数.

如果 $y = z^2$,而 Z 是 y 的函数,那么换 y 为 z^2,Z 就成了指数全为偶数的 z 的函数. 须指出,作为 y 的函数,Z 中不能含有 $\sqrt{y}$ 或类似于 $\sqrt{y}$ 的,使得换 y 为 z^2 时产生 z 的奇次幂. 例如 $y + \sqrt{ay}$ 是 y 的函数,但换 y 为 z^2,它成为 $z^2 + z\sqrt{a}$,不是 z 的偶函数. 排除掉这种情况,我们做成的偶函数就都是 z^2 的函数. 这定义既适用又便于构成偶函数.

§21

换 z 为 $-z$ 时,其值变号的函数叫 z 的奇函数.

z 的奇次幂 $z^1, z^3, z^5, z^7, \cdots$ 及 $z^{-1}, z^{-3}, z^{-5}, \cdots$ 都是 z 的奇函数. 当 m, n 都是奇数时,$z^{\frac{m}{n}}$ 也是奇函数. 更一般地,由这类幂组成的表达式,如

$$az + bz^3, az + az^{-1}$$

及

$$z^{\frac{1}{3}} + az^{\frac{3}{5}} + bz^{-\frac{5}{3}}$$

等都是 z 的奇函数. 奇函数的形式及性质的获得都可以比照着偶函数进行.

§22

z 的偶函数乘上 z 或 z 的任何一个奇函数,得到的积为 z 的奇函数.

设 P 是 z 的偶函数,则换 z 为 $-z$ 时,P 的值不变,这时换 Pz 的 z 为 $-z$ 得 $-Pz$. 即 Pz 是奇函数. 现在设 P,Q 分别为 z 的偶函数和奇函数,由定义知,换 z 为 $-z$ 时,P 的值不变,Q 的值变为 $-Q$. 因而,换 PQ 的 z 为 $-z$ 时,其值变为 $-PQ$,即 PQ 是奇数. 例如 $a + \sqrt{a^2 + z^2}$ 是偶函数,z^3 是奇函数,所以乘积

$$az^3 + z^3\sqrt{a^2 + z^2}$$