"十二五"应用型本科系列规划教材

高等数学 上册

Advanced mathematics

杨国增　李青阳　邵君舟　主　编

王明建　主　审

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型本科系列规划教材

高 等 数 学

上 册

主 编 杨国增 李青阳 邵君舟

参 编 黄 坤 张瑞霞 王明建

主 审 王明建

机 械 工 业 出 版 社

本套教材是以“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为标准，以提高学生的数学素质与创新能力为目的，为高等学校各专业编写的高等数学类课程教材．

本套教材分为上、下两册。本书是上册，内容有函数极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、定积分的应用和常微分方程．特别针对教学时长较少，学生数学基础较薄弱的实际情况进行了优化设计．

本书适合普通高等院校作为高等数学课程教材使用，也可作为工程技术人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学　上册/杨国增，李青阳，邵君舟主编．—北京：机械工业出版社，2013.7

ISBN 978-7-111-42227-3

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①杨…②李…③邵…　Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 104831 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　汤　嘉
版式设计：常天培　责任校对：张　媛
封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
184mm × 240mm · 23.5 印张 · 405 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-42227-3
定价：45.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　网络服务
社服务中心：（010）88361066　教材网：http：//www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294　机工官网：http：//www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649　机工官博：http：//weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203　**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

伽利略说过："宇宙这本书是用数学语言写成的. 除非你首先学懂了它的语言，否则这本书是无法读懂的."而高等数学则是数学中最为精彩的一部分，它是以函数为研究对象，极限为理论基础，导数、级数为研究工具，微积分为核心内容的变量数学. 它与最早的初等数学即常量数学有着根本的区别. 高等数学是高等院校中的一门重要基础课. 理、工、经、管、农、林、医等专业甚至部分文科专业的学生都要学习高等数学. 高等数学也是众多专业研究生入学考试的必考科目.

鉴于高等数学课程如此重要，各高校都对高等数学的教学改革投入了大量的人力物力。高等数学课程的教材也根据教学改革的需要，因人、因时、因势而变. 本书也反映了我校各位同仁在高等数学教学改革方面的一些理解和感悟.

本书依据教育部数学基础课程教学指导委员会关于"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，适当考虑了硕士研究生入学考试的大纲，分上、下两册，共十二章，其主要特点包括：

1. 内容全面、结构严谨、推理严密、详略得当.

2. 本书对所涉及的重要问题都有一个全面的阐述，加星号的内容供选学.

3. 在一些知识板块的后面，通过思考题等形式的提示帮助读者对核心问题进行深入思考.

4. 每一章节后附有一定量的习题，题型更接近于各类选拔题，其中不少就是近几年来的考研题或专升本真题供读者练习和提高，也方便教师教学使用.

5. 本书涉及的数学家都作了简要介绍，在加深对教材内容理解的同时，帮助读者对数学学科的发展有时空上的直观认识.

本书有部分章节和习题加了"*"号，供选学.

本书可作为工科类本科专业的高等数学教材，也可作为硕士研究生入学考试高等数学第一阶段的复习用书，亦可供科技人员参考.

同时，本书是我校数学与统计学院高等数学精品课程建设的成果，我们也希望借助这套书与兄弟院校的同行们作广泛的教学交流.

本书的编写工作得到院、系、教务处各级领导的大力支持. 在编写过程中，很多同事、朋友对如何编好这套书提出了很多宝贵的建议. 在编写本书的时候，编者参考了国内外与高等数学相关的许多优秀著作，深受这些专家、院士的启发. 我们对以上诸位在此一并致以诚挚的谢意. 由于编者水平所限，书中不当之处在所难免，敬请广

大读者朋友、同行、专家学者批评指正．本书希望通过编者与读者、同行的共同努力，经日后修订，渐趋成熟．

全书由主编杨国增统稿，王明建教授审稿．具体编写情况如下：黄坤编写第1章；李青阳编写第2章、第3章；杨国增编写第4章；张瑞霞编写第5章；邵君舟编写第6章、第7章、数学家简介及附录．

编 者

目　录

第 1 章

函数极限与连续

在生活和学习中，我们常遇到两种基本量：常量和变量．所谓常量，即相对保持不变的量，这在初等数学中已经学习过．而所谓变量，即在一定范围内变化的量．变量与变量之间的依赖关系就是函数关系．高等数学主要的研究对象是函数，研究函数的基本方法之一就是极限，它将贯穿高等数学始终．本章介绍函数、极限及其性质，这些内容是高等数学的基础．

1.1 函数

1.1.1 函数的定义

定义 1.1 设 D 是一非空集合，如果有对应法则 f，使得对于每个 $x \in D$，都有唯一的数 y 与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$.

其中 x 称为自变量，y 称为因变量或函数值，数集 D 称为**定义域**．函数值 $f(x)$ 的全体构成的数集称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 R_f. 即

$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

函数主要有三种表示方法：列表法、图像法、解析法．

一般说来，我们都在函数的定义域内研究函数．两个函数相等不仅要有相同的解析式，还要有相同的定义域和值域．

下面将介绍几种常见的函数．

例 1.1 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=[0, +\infty)$.（见图 1-1）

例 1.2　分段函数

$$y=\begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ x-1, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=(-\infty, -1)\cup[0, +\infty)$，（见图 1-2）.

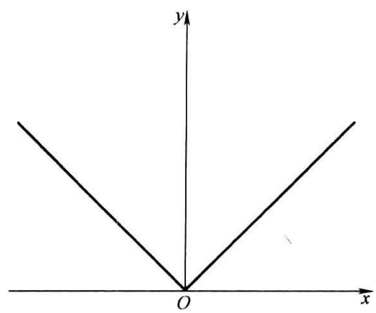


图　1-1

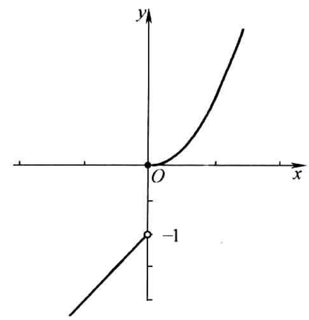


图　1-2

例 1.3　设 x 是任意实数，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y=[x]$ 称为**取整函数**.

例如：$[3.5]=3$，$\left[\frac{1}{2}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$\left[-\frac{3}{2}\right]=-2$.（见图 1-3）

例 1.4　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\{-1, 0, 1\}$.（见图 1-4）

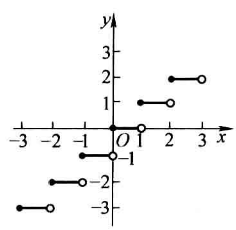


图　1-3

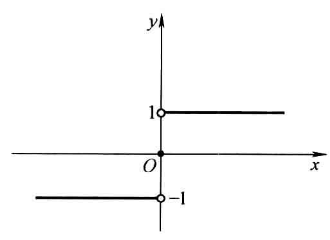


图　1-4

对于任何实数 x，有下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

例 1.5　最值函数

最大值函数　$y=\max\{f(x), g(x)\}$（见图 1-5）

最小值函数　$y=\min\{f(x),\ g(x)\}$（见图 1-6）

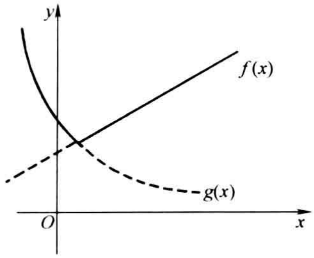


图　1-5

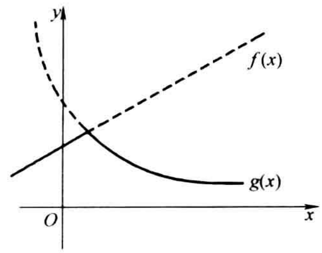


图　1-6

例 1.6　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q},\\ 0, x\in\mathbb{Q}^{C}.\end{cases}$$

这里$\mathbb{Q}$表示有理数，$\mathbb{Q}^{C}$表示无理数．（见图 1-7）

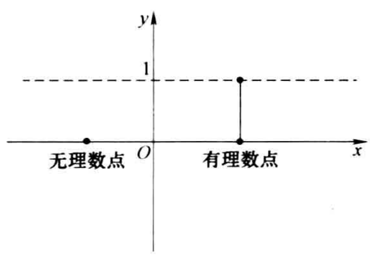


图　1-7

1.1.2　函数的性质

1. 有界性　设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I\subset D$ 内有定义，对于每个 $x\in I$，如果存在数 $M_1(M_2)$，使得 $f(x)\leqslant M_1(f(x)\geqslant M_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有**上(下)界**．若函数 $f(x)$ 在区间 I 内既有上界，又有下界，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**有界**．即对于每个 $x\in I$，存在正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$．反之，若这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**无界**．（见图 1-8、图 1-9）

例如：对于每个 $x\in(-\infty,\ +\infty)$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$ 在其定义域内有界．其中上界均为 1，下界均为 -1．

注　有界与区间有关系．例如：函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内

无界，而在区间$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$内有界.

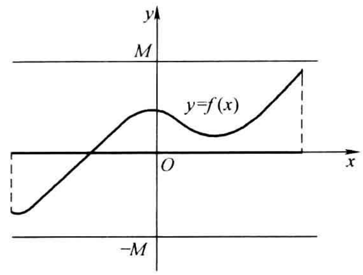


图　1-8

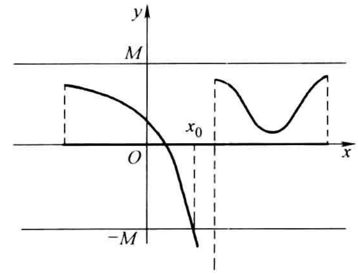


图　1-9

2. 单调性　设函数在区间 I 内有定义，若对于任意数 x_1，$x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，总有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)\,(f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内为**单调递增(减)函数**. 特别地，若$f(x_1) < f(x_2)\,(f(x_1) > f(x_2))$时，称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内为**严格单调递增(减)函数**.（见图 1-10、图 1-11）

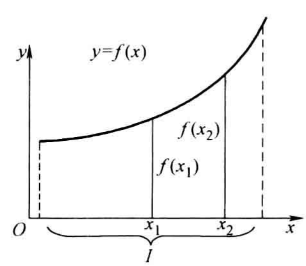


图　1-10

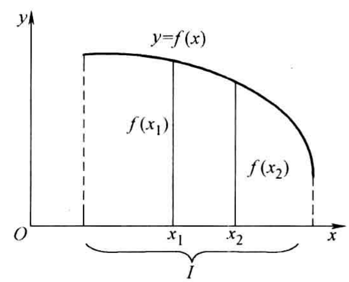


图　1-11

例如：函数 $y=x^2$ 在区间$[0, +\infty)$内为单调递增函数，在区间$(-\infty, 0)$内为单调递减函数. 而在整个区间$(-\infty, +\infty)$内不是单调函数.

3. 奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于每个 $x \in D$，都有

$$f(-x) = -f(x),\ (f(-x) = f(x)),$$

则称函数$f(x)$为区间 D 内的**奇(偶)函数**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.（见图 1-12、图 1-13）.

例如：在区间$(-\infty, +\infty)$内，函数 $y=\sin x$ 是奇函数. 因为

$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$. 函数 $y=\cos x$ 是偶函数. 因为 $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$. 而函数 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

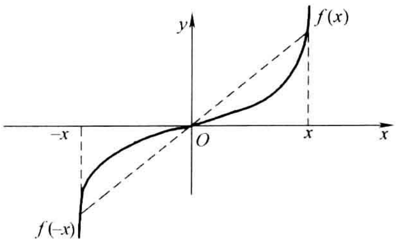


图 1-12

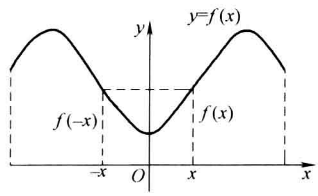


图 1-13

4. 周期性 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 T，使得对于任意 $x\in D$，$x\pm T\in D$，总有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**，所有周期中最小的正周期，称为**最小正周期**，简称**周期**.（见图 1-14）

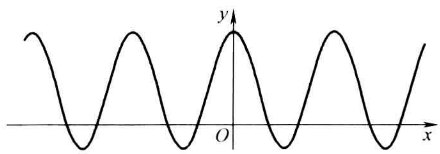


图 1-14

例如：函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期为 2π，函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 的周期为 π.

1.1.3 复合函数和反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(u)$，其定义域为 D，函数 $u=g(x)$ 的值域为 W，若 $W\subset D$，则称函数 $y=f(g(x))$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数**. 简记为 $f\circ g$，u 称为**中间变量**.

例如：$y=\sin^3 x$ 是由函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 复合而成.

定义 1.3 若函数 $f: D\to f(D)$ 是一个单射（即任何一个 $y\in f(D)$ 的原像 $x\in D$ 只有一个），且变量 x 也是 y 的函数，其逆映射 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

例如：函数 $y=2^x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$. 其反函数为 $y=\log_2 x$，定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$.

从函数的图像上来看，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.（见图 1-15）

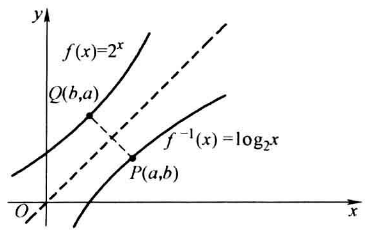
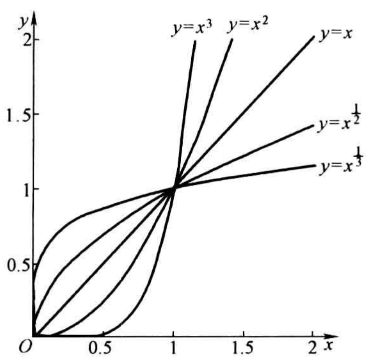
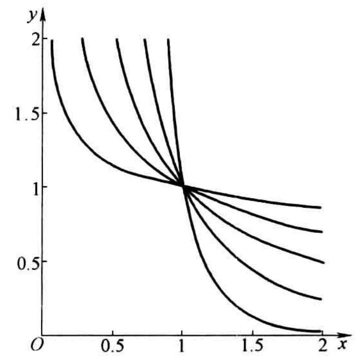


图　1-15

1.1.4　初等函数

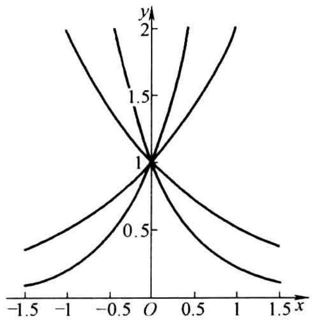
我们简单回顾一下在初等数学中已经学习过的常见函数，如表 1-1 所示．

表 1-1　常见函数

1. 幂函数 $y=x^a(a>0)$	幂函数 $y=x^a(a<0)$
	
曲线过点(0，0)和(1，1)，当 $x>1$ 时，a 越大曲线上升越快． 当 a 为偶数，函数为偶函数，在区间 $(-\infty,0)$ 内为单调递减函数，在区间 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数； 当 a 为奇数，函数为奇函数，函数单调递增	曲线过点(1，1)，当 $x>1$ 时，$\lvert a \rvert$ 越大曲线下降越快． 当 a 为负偶数，函数为偶函数，在区间 $(-\infty,0)$ 内为单调递增函数，在区间 $(0,+\infty)$ 内为单调递减函数； 当 a 为负奇数，函数为奇函数，函数单调递减

（续）

2. 指数函数　$y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$

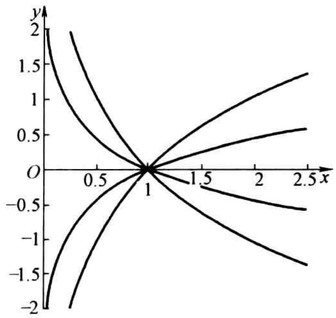


曲线通过点$(0,\ 1)$，定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为$(0,\ +\infty)$.

当$0<a<1$时，函数为单调递减函数，当$a>1$时，函数为单调递增函数，

函数为非奇非偶函数，渐近线为$y=0$

3. 对数函数 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$



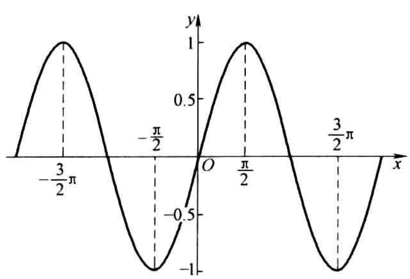
曲线通过点$(1,\ 0)$，定义域为$(0,\ +\infty)$，值域为$(-\infty,\ +\infty)$.

当$0<a<1$时，函数为单调递减函数，当$a>1$时，函数为单调递增函数.

函数为非奇非偶函数，渐近线为$x=0$

4. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$



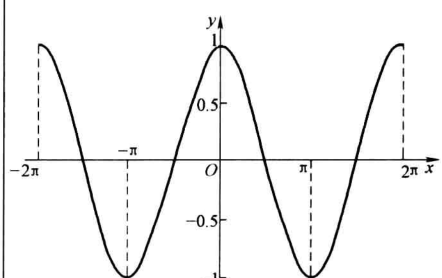
函数定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为$[-1,\ 1]$.

函数为奇函数，周期：$T=2\pi$.

在区间$\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$内为单调递增函数.

在区间$\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$内为单调递减函数

余弦函数 $y=\cos x$



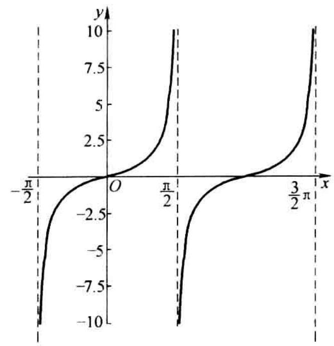
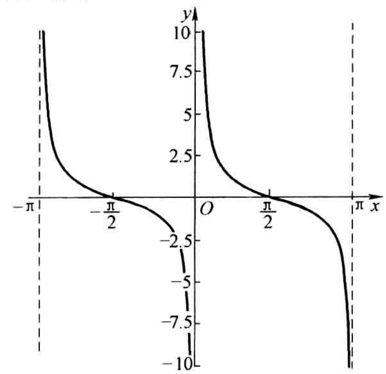
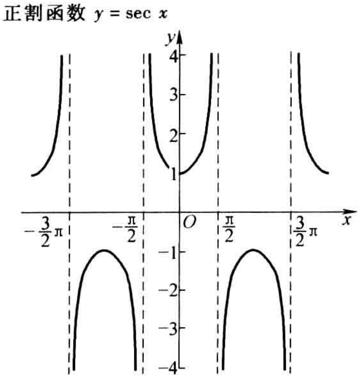
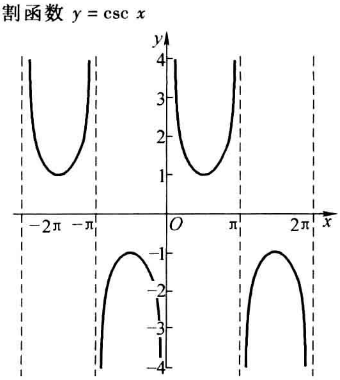
函数定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为$[-1,\ 1]$.

函数为偶函数，周期：$T=2\pi$.

在区间$(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$内为单调递减函数.

在区间$(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+2\pi)$内为单调递增函数

（续）

正切函数 $y=\tan x$  函数定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 函数为奇函数，周期：$T=\pi$. 在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内为单调递增函数． 渐近线：$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	余切函数 $y=\cot x$  函数定义域为 $x\neq k\pi$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 函数为偶函数，周期：$T=\pi$. 在区间 $(k\pi,\ k\pi+\pi)$ 内为单调递减函数． 渐近线：$x=k\pi$
正割函数 $y=\sec x$  函数定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 函数为偶函数，周期：$T=2\pi$. 渐近线：$x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$. 在区间 $\left(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi\right)$ 内为单调递增函数． 在区间 $\left(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ 2k\pi+2\pi\right)$ 内为单调递减函数	余割函数 $y=\csc x$  函数定义域为 $x\neq k\pi$，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 函数为奇函数，周期：$T=2\pi$. 在区间 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi\right)\cup\left(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内为单调递减函数． 在区间 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi\right)\cup\left(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内为单调递增函数． 渐近线：$x=k\pi$