普通高等教育“十一五”国家级规划教材

随机过程理论

（第3版）

周荫清　主编

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

随机过程理论

（第3版）

周荫清　主编

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书为普通高等教育"十一五"国家级规划教材。

本书系统介绍随机过程的基本理论、分析方法及在实际中应用广泛的几类随机过程。全书共8章，内容包括：随机过程的基本概念，随机过程的线性变换，窄带随机过程，高斯随机过程，泊松过程，马尔可夫链和马尔可夫过程。各章配有适量习题，书末附有习题提示与答案。

本书深入浅出，表述简洁、概念清晰，系统性强，注重可读性，可作为高等院校有关专业的本科生、研究生教材或教学参考书，还可供通信、雷达、导航、控制、系统工程、生物医学工程、社会科学等有关领域的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程理论 / 周荫清主编. -- 3版. -- 北京 ：北京航空航天大学出版社，2013.3

ISBN 978-7-5124-1024-4

Ⅰ.①随… Ⅱ.①周… Ⅲ.①随机过程 Ⅳ.①0211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第287100号

随机过程理论(第3版)

周荫清 主编

责任编辑 蔡 喆

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

读者信箱：goodtextbook@126.com 邮购电话：(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：787×1092 1/16 印张：17.75 字数：454千字

2013年3月第3版 2013年3月第1次印刷 印数：3000册

ISBN 978-7-5124-1024-4 定价：34.00元

前　言

本书是在周荫清编著的《随机过程导论》第 1 版的基础上，根据教材历年来的教学使用情况，并适应本科生的教学需要，重新修订而成的。本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

随机过程理论经过半个多世纪的发展，已经成为一个十分活跃的学科领域。它已广泛应用于通信、雷达、导航、控制、生物、社会科学以及其他工程科学技术领域中。人们已经认识到，在现代科学技术高度发展的过程中，学习和掌握随机过程的基本理论日益成为一种需要。现实科研活动启示我们，只有熟悉和掌握随机过程的基本理论、基本分析方法，才能更好地学习现代科学技术，探索新的科学领域。

近 30 年来，本书作者为北京航空航天大学电子信息工程学院高年级本科生和研究生开设随机过程理论课程，同时编写了《随机过程导论》教材，于 1987 年 11 月由北京航空学院出版社出版，之后于 1993 年 9 月由我国台湾儒林图书有限公司在台湾出版。作为教材本书注重基本理论、基本概念和读者使用适当的数学工具就能够准确、系统地认识和掌握随机过程的基本理论和分析方法，既不过于简化，又不拘泥于数学细节。对于凡学习过概率论、线性代数的读者基本上都可以自学此书。

本书着重讨论随机过程的基本理论和基本方法，重点介绍应用中常见的几类随机过程。全书共分 8 章。第 1 章是根据本书后续章节需要，概述一些重要的概率论知识；第 2 章详细论述随机过程的基本概念，重点介绍随机过程两类基本分析方法；第 3 章研究具有随机输入的线性系统输出过程的统计特征；第 4 章至第 8 章分别介绍窄带随机过程、高斯随机过程、泊松随机过程和马尔可夫过程。

本书力图在内容编排上由浅入深，表述简洁，注重可读性。有意注重教材编写的特色，加强物理概念的阐述，以最易接受的方式介绍随机过程的基本理论及各类常用的随机过程。书中列出较多例题，都是在教学过程中经过精心挑选的，以便对基本理论加深理解。本书既保证该教材理论的完整及系统性，又注意形成一种理论面向应用的特点。为了提高分析问题和解决问题的能力，做习题是必不可少的，为此每章后面配有大量习题可根据需要选用。（标 * 的习题难度较大，可视学生情况选做），书末附有相应的习题答案或提示。

本教材内容可作为高等院校有关专业的本科生教材和研究生教材。参考学时数为 48～64。

在 2006 年 10 月出版的《随机过程理论（第 2 版）》的基础上，根据历年来教材使用情况，为满足教学和广大读者的需求，作者对本书进行了必要的修订。书中第 1、2 章由周荫清修订；第 3 章由李春升修订；第 4 章由李景文修订；第 5 章由周芳修订；第 6 章由徐华平修订；第 7、8 章由陈杰修订；全书习题由于泽修订；最后由周荫清统稿。

参加修订工作的还有青年教师王鹏波、孙兵等，他们为本书出版亦付出了许多辛勤劳动。

在本书修订过程中，得到了北京航空航天大学出版社理工事业部蔡喆主任的热情支持与帮助，并提出了许多宝贵意见，使本书得以顺利出版，编者在此深表感谢。

为便于广大师生更好地学习和掌握随机过程理论课程的主要内容，作者编写的《随机过程理论学习指导及习题解析》由电子工业出版社出版。

在本书编写和修订过程中，参阅了国内外一些相关著作，均列于参考文献中，在此谨向这些著作的作者表示深深的谢意。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

周荫清

2012 年 10 月于北京航空航天大学

目　　录

第 1 章　概率与随机变量

1.1 集　合

在概率论中，事件和事件的集合起着极其重要的作用。事件的数学理论和集合论之间有着十分密切的对应关系。通过集合的概念可以认识概率论中事件发生的实质。因此，先介绍集合论的基本概念。

集合，简称为集。将为了某种目的而研究的对象的总体称为集。每一个属于这种集的对象称为元素。集合中的元素可以是任意的对象。换言之，任何对象的总体都可以构成集。例如，全体正整数组成的集；在一条给定的直线上的所有点组成的集；定义在区间$[a,b]$上的所有连续函数组成的集。

通常把只有有限个元素的集和无穷多个元素的集分别称为有限集合和无穷集合。若一个无穷集，它的元素可以与所有正整数一一对应地排列，则称为可列集或可数集。所有正整数，即由 1，2，3，…所组成的集合是可列集的一个简单例子。不满足上述性质的无穷集合称为不可列集成不可数集。一个直线段上所有点构成的集合是不可列集的一个简单例子。

若 X 是集 A 的元素就写成 $X\in A$；如不是集 A 的元素就写成 $X\notin A$。如果集 A 为全体自然数，则有 $2\in A$，$1/2\notin A$。

不含任何元素的集称为空集，常用$\varnothing$表示。例如，满足 $x^2+1=0$ 的实数的集是空集。

在许多研究中，要涉及已给集合的各种子集的性质和相互关系。这个包含有研究中出现的全部元素的“最大”集，称为空间，常用 Ω 表示。例如，研究那些在一条直线上的点所组成的不同集合，则可以取直线上所有的点组成的集作为空间，并称为 R^1 空间。空间 Ω 中的任何一个子集 A 简称为 Ω 中的集。

若有两个集合 A 和 B，而集 A 中的每一个元素均属于 B，则称 A 为 B 的子集。如果 $B=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$表示全体正整数组成的集合，集 $A=\{\omega_1,\omega_3,\cdots\}$表示全体正奇数组成的集合，显然，$A$ 为 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

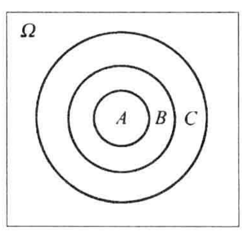


图 1.1　集的传递性

由定义，任意集 A 均有 $A\subset A$，$\varnothing\subset A$。而且集的包含关系具有传递性，即若 $A\subset B$，且 $B\subset C$，则 $A\subset C$，如图 1.1 所示。

若一个集 A 的元素都是集 A_1，A_2，…时，则称 A 为一个族，有时称为类，显然族是集的同义词。

1.1.1　集合的运算

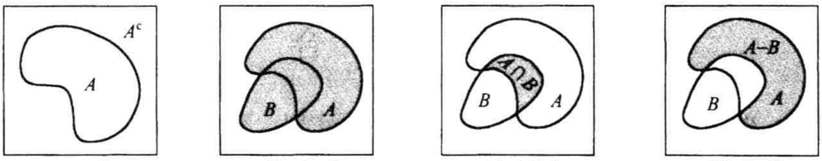
通过对集合的运算可以进一步认识集合。对集合的运算还可产生另外一些集合。现在研究集合运算中的加、减和乘法。设 A，B，C，…是空间 Ω 的子集，集合运算的结果将产生新的集合，下面简要介绍这些概念。

余集　集合 A 的余集是指在一个给定的空间 Ω 中，不属于 A 的那些点的集合，可以表示为

$$A^c = \{\omega \mid \omega \notin A\}$$

余集如图 1.2(a)所示。显然，$\Omega^c = \varnothing$，$\varnothing^c = \Omega$。这一运算有下述特性：对集 A 连续进行两次运算，又可重新得到集 A，即

$$(A^c)^c = A$$



(a) A^c　(b) $A \cup B$　(c) $A \cap B$　(d) $A-B$

图 1.2　集合的运算几何图

并集　两个集合 A 和 B 的并集是指至少属于 A 和 B 之一的点的集合，记为

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

也就是说并集是指属于 A 或属于 B，或者同时属于两者的所有元素 ω 所组成的集。并集如图 1.2(b)所示。

并集概念可以推广到包含任意数目(有限或可列无限)的集合的情况，并将其记为

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \tag{1.1.1}$$

交集　两个集合 A 和 B 的交集是指同时属于这两个集合的点的集合，记为

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 和 } \omega \in B\}$$

交集如图 1.2(c)所示。还可将 $A \cap B$ 简记为 AB。可以看出，若 $AB=0$，即集合 A 和 B 没有公共元素，就称其为互斥或不相交。

交集概念可以推广到包含任意数目(有限或可列无限)的集合的情况，并将其记为

$$A_1 A_2 A_3 \cdots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \tag{1.1.2}$$

若对每个 $i,j(i \neq j)$ 满足 $A_i A_j = 0$，则集 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是互斥的或互不相关的。

差集　两个集合 A 与 B 之差是指属于集 A 而不属于集 B 的点的集合，记为

$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 和 } \omega \notin B\}$$

这一运算既是不可交换的，也是不可结合的。差集如图 1.2(d)所示。按照差集的定义，显然有

$$A - \varnothing = A,\quad \Omega - A = A^c,\quad A - B = AB^c$$

在集的运算中，经常用到以下三个极重要的定律。

· 交换律

$$A \cup B = B \cup A,\quad A \cap B = B \cap A$$

· 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

· 分配律

加法分配律　　　　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

乘法分配律　　　　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

在余、交、并集三种运算中还服从德·摩根(De Morgan)律，即

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\quad (A\cap B)^c=A^c\cup B^c \tag{1.1.3}$$

式(1.1.3)中是两个极有用的定理。

将式(1.1.3)推广到有限、可数情况，则有

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c,\quad \left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)^c=\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c \tag{1.1.4}$$

1.1.2　博雷尔集合体

设有空间Ω,Ω中的一些子集A(一般是不可列的)组成的类$\mathscr{F}$称为Ω中的一个σ代数或称为博雷尔(Borel)集合体，如果$\mathscr{F}$满足条件：

① $\Omega\in\mathscr{F}$;

② 若$A\in\mathscr{F}$,则$A^c\in\mathscr{F}$;

③ 若$A_j\in\mathscr{F},j=1,2,\cdots$,则$\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$。

在上述条件中，前两个条件意味着

$$\varnothing=\Omega^c\in\mathscr{F}$$

利用德·摩根定理，从第二和第三个条件可得

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j=\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j^c\right)^c\in\mathscr{F} \tag{1.1.5}$$

因此，一个博雷尔体是一些集的类，它包括集$\varnothing$和空间Ω,对于它的一切可列集的并和交的运算是封闭的。显然，Ω的一切子集的类是博雷尔体。不过，在概率论中，这个特殊的博雷尔体太大而且不实用。因此，一般研究Ω的子集的最小类，它们既构成博雷尔体又包含被研究的一切元素和集。

1.2　概　　率

1.2.1　随机事件和样本空间

随机试验是概率论中极其重要的概念，它的各种结果是一些事件。通常把对自然现象进行观察或进行一次试验，统称为一个试验。如果这个试验满足下述条件，则称为随机试验E。

① 在相同条件下可重复进行；

② 每次试验结果不止一个，所有可能结果事先不能预测；

③ 每次试验之前不能确定哪一种结果出现。

随机试验是用来研究随机现象的。随机试验的每一个可能结果一般称为随机事件，或简称事件。最简单的事件称为基本事件。而随机试验的所有可能事件的集合叫做样本空间。举一个简单例子，投掷一个骰子构成的随机试验，每次投掷结果出现整数1,2,…,6中的一个数。出现整数1这个事件叫做基本事件。出现偶数点的事件为一个随机事件或称为观察事件。显然它不是基本事件，是一个复合事件，因为它表示一个基本事件的集。有时又称为样本空间的

子集。所有可能事件的集合{1,2,3,4,5,6}则是这个例子的样本空间。

给定一个随机试验 E,所有可能事件的集合是它的样本空间,它的元素是基本事件。因此,可观察事件是样本空间的一些子集。事件和样本空间的定义提供了一个结构,在这个结构内可以实现对事件的分析,这样的概率论中事件的所有定义和它们之间的关系都可以用集合论中一些集和集的运算来描述。如果研究元素 ω 的空间为 Ω,子集为 $A,B,\cdots$,则集合论和概率论之间的一些关系如表1.1所示。

表1.1 集合论和概率论之间的关系

集合论	概率论
空间 Ω	样本空间、必然事件
空集 $\varnothing$	不可能事件
元素 ω	基本事件
集 A	可观察事件或复合事件
A	出现 A
A^c	A 不出现
$A\cup B$	A 和 B 至少出现一个
AB	A 和 B 同时出现
$A-B$	A 出现而 B 不出现

在今后的讨论中,假定空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 都是可观察事件。并且要求它们与随机试验 E 有关的一切可观察事件的集组成博雷尔事件体 $\mathscr{F}$。这意味着一切由可列个可观察事件的并、交形成的事件也是可观察的,并包含在博雷尔事件体 $\mathscr{F}$ 中。于是,常常把对事件的分析转化为对集合的分析,用集合间的运算分析事件间的关系。从而用集合论的知识建立起事件的概率及其概率性质的概念。

1.2.2 概率函数

现在引进概率函数的概念。给定一个随机试验 E,对一切可观察事件的博雷尔事件体中的每一个事件集 A,对应一个有限数 $P(A)$。数 $P(A)$ 是事件集 A 的一个函数,假设定义在博雷尔事件体 $\mathscr{F}$ 中的所有集上,并满足下列性质:

① 概率的非负性:$P(A)\geqslant 0$;

② 概率的规范性:$P(\Omega)=1,P(\varnothing)=0$;

③ 概率的可列可加性:对 $\mathscr{F}$ 中互不相交的可列集 $A_1,A_2\cdots$,下列等式成立

$$P\Big\{\sum_i A_i\Big\}=\sum_i P(A_i) \tag{1.2.1}$$

则称 $P(A)$ 为 A 的概率测度或简称概率。

综上所述,一个随机试验的数学描述已经论述清楚了。它由三个基本要素组成,即样本空间 Ω,可观察事件的博雷尔事件体 $\mathscr{F}$ 和概率函数 P。这三个要素构成了与随机试验有关的概率空间,概率空间一般用三元总体 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 表示。

1.2.3 条件概率

1. 条件概率的定义和性质

在实际问题中,一般除了要考虑事件 A 的概率 $P(A)$ 外,还须考虑在"事件 B 已发生"的条件下,事件 A 的概率,称作条件概率,记为 $P(A|B)$。现在对条件概率做如下定义。

定义 设三元总体 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一个概率空间,$A\in\mathscr{F},B\in\mathscr{F}$,且 $P(B)>0$,在事件 B 已发生的条件下,事件 A 发生的条件概率为

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \tag{1.2.2}$$

条件概率 $P(A|B)$ 意味着事件 A 与事件 B 有关。若 $A\cap B=\varnothing$，即事件 A 和 B 互不相交，则 $P(A|B)=0$。

条件概率是一个确定的量。它具有下述性质：

① $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

② $P(\Omega|B)=1$；　　(1.2.3)

③ 若 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \mid B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i \mid B) \tag{1.2.4}$$

2. 乘法公式

由条件概率定义可得

$$P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A) \tag{1.2.5}$$

$$P(A\cap B)=P(B)P(A\mid B) \tag{1.2.6}$$

需要注意，式(1.2.5)与式(1.2.6)同时成立，是在条件 $P(A)>0$，且 $P(B)>0$ 之下而言的。若 $P(A)$ 或 $P(B)$ 的值中有一个为零，则以上两式不能同时成立；若 $P(B)=0$，则只有式(1.2.5)成立，而式(1.2.6)不成立，这是因为 $P(A|B)$ 无定义。

乘法公式(1.2.5)可以推广到 n 个事件的情况。设有 n 个事件 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots,n)$，且满足 $P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})>0$，则

$$\begin{aligned}P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=&P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdots\\&P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

3. 统计独立性

定义　设 A,B 为两个事件，若满足

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \tag{1.2.8}$$

则称 A,B 为统计独立的事件。

两个事件独立性的概念可以推广到 n 个事件相互独立的情况。

先推广到三个事件。设 A,B,C 是三个事件，若满足

$$P(A\cap B)=P(A)P(B),\quad P(B\cap C)=P(B)P(C),\quad P(A\cap C)=P(A)P(C) \tag{1.2.9}$$

和

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C) \tag{1.2.10}$$

则称 A,B,C 为相互独立的事件。若仅满足式(1.2.9)，则称三个事件 A,B,C 为两两相互独立。

再推广到 n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$。若对任意 $s(1\leqslant s\leqslant n)$，及任意 $i_k,k=1,2,\cdots,s$，且 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_s})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_s}) \tag{1.2.11}$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

4. 全概率公式

设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件，若

① $B_i\cap B_k=\varnothing,i\neq k;i,k=1,2,\cdots,n$。

② $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i=\Omega$。

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分。反之，若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，则进行一次试

验 E，事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中必有一个且仅有一个事件发生。

设 A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，则全概率公式为

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i) \tag{1.2.12}$$

5. 贝叶斯公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，对于任一事件 A，由条件概率的定义有

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

将式(1.2.12)代入上式，则得

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)} \tag{1.2.13}$$

式(1.2.13)称为贝叶斯公式。

设事件 A 可以在不同条件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 下实现，由以往得到的数据经分析可得 $P(B_i)$，称为先验概率。按某些理由也可得到条件概率 $P(A|B_i)$。当观察到 A 出现后，按贝叶斯公式算得的条件概率称为后验概率。贝叶斯公式说明：后验概率可以通过一系列先验概率求得。

全概率公式和贝叶斯公式有着密切的关系：前者用于许多情况$(B_1,B_2,\cdots,B_n)$下都可能发生的事件 A，求发生 A 的全概率；后者用于当事件 A 已发生的情况下，求发生事件 A 的各种原因的条件概率。

1.3 随机变量及其分布函数

1.3.1 随机变量

若仅讨论随机事件及其概率，则只能用来孤立地研究随机试验的一个或几个事件，而对于随机现象的数学分析是不够的。为了更深入地研究随机现象，需要把随机试验的结果数量化，也就是说用一个变量来描述随机试验的结果。为此引入随机变量的概率。引入随机变量之后，就能通过随机变量将各个事件联系起来，以便研究随机试验的全部结果，并有可能用数学分析的方法来研究随机试验。

要讨论随机变量，就必须对随机变量给以一定的约束或规定。为此，引入随机变量的下述数学定义。

定义 给定一个随机试验 E，它的结果 ω 是样本空间 Ω 的元素，$(\Omega,\mathscr{F},P)$是相应的概率空间。如果对每个 ω 有一个实数 $X(\omega)$与之对应，就得到定义在 Ω 上的实值点函数 $X(\omega)$。若对于任意实数 x，集$\{\omega:X(\omega)<x\}$是 $\mathscr{F}$ 中的事件，即

$$\{\omega:X(\omega)<x\}\in\mathscr{F}$$

则称 $X(\omega)$为随机变量。

从定义看出，随机变量 $X(\omega)$总是与一个概率空间相联系的，即关系式 $X=X(\omega)$将概率空间 Ω 中的每一元素 ω 映射到实轴 $R^1=(-\infty,\infty)$上的点 X，以建立起样本空间 Ω 与实数(或复数)空间或其一部分的对应关系。习惯上，为书写简便，不必每次都写出概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，并且可以将 $X(\omega)$关于 ω 的依赖性省略，简记为 X，把$\{\omega:X(\omega)<x\}$记为$\{X<x\}$等。另一方

面，由于要求$\{\omega: X(\omega)<x\} \in \mathscr{F}$，因此$P\{X<x\}$总是有意义的。

随机变量概念的产生是概率论的重大进展，它使概率论研究的对象由事件扩大为随机变量。

随机变量X的取值常用x或$x_1, x_2, \cdots$表示。显然，随机变量有着不同的取值。就其取值而言，随机变量可以分为离散型和连续型两类。

若随机变量X的一切可能取值是有限个或无限可数个孤立值$x_1, x_2, \cdots$，并且对这些值有确定的概率$P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots$，则称$X$是离散型随机变量。例如，射击时中靶的环数以及某电话交换台单位时间的呼叫次数等，都是离散型随机变量。

若随机变量X的一切可能取值是充满一个有限或无限区间的，则称X为连续型随机变量。例如，每次测量电压的误差，测试某一类电子器件的寿命等。

在许多实际场合中，一个随机试验的结果往往同时要用两个或更多个随机变量去描述。例如，接收机中频放大器中的干扰电流就要用随机振幅和随机相位两个随机变量来描述。又如正弦波信号经信道传输到达接收点时，其振幅、相位和角频率均变成随机参数，这时的信号在每一时刻就要用三个随机变量来描述。我们注意到，对n个随机变量的分析等价于研究一个含有n个随机变量作为分量的随机矢量，即

$$\boldsymbol{X}=\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

随机矢量的性质不仅由单独的n个随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$的性质所决定，而且还与这些随机变量之间的关联程度有关。

1.3.2　概率分布函数

为研究随机变量的统计规律性，不仅需要知道随机变量的一切可能值，还必须知道各个可能值所对应的概率是多少。在此基础上，就可以建立起随机变量的各个可能值与其相应概率之间的各种不同形式的对应关系。把所有这些不同形式的对应关系统称为随机变量的分布律，或分布函数。从概率的观点看，给定了随机变量的分布律，随机变量就被完全描述出来了。

1. 离散型随机变量的概率分布

设离散型随机变量的一切可能取值为$x_i, i=1,2,\cdots$，且有$x_1<x_2<\cdots$，X取值x_i的概率，亦即事件$\{X=x_i\}$的概率为

$$P\{X=x_i\}=p_i \quad i=1,2,\cdots \tag{1.3.1}$$

则称式(1.3.1)为离散型随机变量X的概率分布。显然

$$p_i \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots; \quad 且\sum_{i=1}^{\infty} p_i=1$$

离散型随机变量X的分布可用表格描述。如表1.2所示。常称这样的表格为分布列。不同的随机变量将有不同的概率分布。

表 1.2　随机变量 X 的分布

X	$x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots$
$P(X=x_i)$	$p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots$

描述离散型随机变量的概率分布除用分布列之外，还可用概率函数，如图1.3所示。

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i)=\sum_i p_i \tag{1.3.2}$$

离散型分布函数$F(x)$可用图1.4表示，它是左连续的阶梯函数。