HZ BOOKS
华章教育

高等院校软件工程专业规划教材

离散数学及算法

第2版

曹晓东　史哲文　编著

Discrete Mathematics and Algorithms

Second Edition

机械工业出版社
China Machine Press

高等院校软件工程专业规划教材

离散数学及算法

第2版

曹晓东　史哲文　编著

Discrete Mathematics and Algorithms

Second Edition

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

离散数学及算法 / 曹晓东，史哲文编著．—2 版．—北京：机械工业出版社，2013.7
（高等院校软件工程专业规划教材）

ISBN 978-7-111-42771-1

Ⅰ．离…　Ⅱ．①曹…　②史…　Ⅲ．离散数学－高等学校－教材　Ⅳ．O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 120788 号

本书主要介绍离散数学的基本理论及算法实现，分为两篇。第一篇介绍计算机科学中广泛应用的离散结构基本概念和基本原理，包括以下内容：数理逻辑、集合论、二元关系、函数、代数系统和图论。第二篇给出了与第一篇各章内容密切相关的算法和程序，使理论在计算机上得到具体实现。附录部分给出了近年来考研试题的分析和离散数学名词中英文对照表。

本书叙述通俗易懂，可以作为高等院校计算机及相关专业离散数学课程的本科生教材和教学参考书，也可供计算机科学工作者和科技人员阅读与参考。

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　　邮政编码　100037）
责任编辑：迟振春
藁城市京瑞印刷有限公司印刷
2013 年 8 月第 2 版第 1 次印刷
185mm × 260mm · 18.25 印张
标准书号：ISBN 978-7-111-42771-1
定　　价：35.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：(010) 88378991　88361066　　　投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68326294　88379649　68995259　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

第 2 版前言

本书自 2007 年出版以来已经过去 6 年的时间了，在这期间我们将其作为示范性软件学院本科生离散数学课程的教材，取得了丰富的教学经验，发现并挖掘出了很多和软件工程理论密切相关的实例。全书配有完整的课件，典型课件不仅具有动漫效果而且具有智能性，此外节后习题配上了解答，书中主要算法配有程序代码。这些对学习者都会有很大启发和帮助，对教材使用者也会提供很大方便。第 2 版对和密码学相关的群论部分进行了较详细的论述，并对第 1 版的印刷错误进行了订正。

我们希望给学习离散数学课程的学生提供一本比较全面的教材，而且也为从事离散数学课程教学的教师提供一本好的参考书。当然，由于我们的经验和理论水平有限，书中还会存在不少不足之处，恳请读者在阅读本书时给我们提出宝贵的建议和意见，以便在今后再版时加以改进。

编　者

2013 年 5 月于大连

第1版前言

计算机科学发展迅速，应用广泛，已成为科学之林的佼佼者。计算机科学之所以能取得这样辉煌的成就，与其具有雄厚的理论基础——离散数学是分不开的。离散数学不仅是计算机科学基础理论的核心课程，也是人工智能的数学基础之一。

本书介绍离散数学的结构体系，包括：

- 数理逻辑
- 集合论
- 关系
- 函数
- 代数系统
- 图论

其中，数理逻辑是用数学方法研究判定和推理的一门学科，它使用特指的表意符号构成一套形式化语言。使用这套形式化语言可以准确地描述集合的并集、交集、笛卡儿乘积等概念。关系是笛卡儿乘积的子集，函数又是关系的子集。利用函数可以定义运算，利用集合和运算可以定义代数系统，半群与群、环和域、格与布尔代数则是代数系统的特例。图也是一个特殊的代数系统，而且是计算机科学应用领域中最活跃的一个分支。

从离散数学的结构体系不难看出，离散数学内容丰富，涉及的知识面广泛，各部分的内容既是独立的又是相关的。离散数学与计算机科学中的数据结构、数据库原理、操作系统、编译原理和软件工程等密切相关。

本书分为两大篇，第一篇介绍离散数学的基本理论，共七章，分别是命题逻辑、谓词逻辑、集合论、二元关系、函数、代数系统和图论。第二篇给出离散数学中涉及的主要算法的程序实现，使学习者在学习基本理论、建立抽象思维能力和逻辑思维能力的同时，有一个与实践结合的平台，使理论落到实处，同时对提高学习者的程序设计能力也有一定帮助。

附录中给出了近年来考研的例题解析，这对考研的学生会有很大帮助。

曹晓东主编了全书，原旭担任副主编并且实现了所有算法的程序设计，刘文杰和栾青对计算机辅助教学部分作出了极大的贡献。侯蕾对公式和图表的编辑做了大量工作。

本书不仅可以作为高等院校计算机科学与技术及相关专业的教材，也可作为考研及计算机工作者的参考书。

由于编者水平有限，书中错误和疏漏之处在所难免，恳请读者不吝指正。

最后，再一次感谢为本书出版作出积极贡献的同志们。

编　者

2007 年 6 月

教学建议

离散数学在本科计算机专业的授课内容分为四大部分:数理逻辑、集合论、代数系统、图论。表面上这四个部分相互独立,实际上紧密连接。数理逻辑描述了一个符号化体系,进而进行判定与推理,这个符号化体系可以描述集合论中的所有概念。集合论中又有三个小模块:集合、关系、函数。关系是集合中笛卡儿乘积的子集,函数是关系的子集。利用函数可以定义运算,利用集合和运算又可以定义代数系统。图论是一类特殊的代数系统。本书的基本理论部分的章节结构与这四个部分的对应关系如下图所示:

数理逻辑	命题逻辑	(第1章)
	谓词逻辑	(第2章)
集 合 论	集合	(第3章)
	关系	(第4章)
	函数	(第5章)
代数系统		(第6章)
图　　论		(第7章)

除了基本理论部分,本书还包括了算法部分,对离散数学中涉及的主要算法用程序进行了实现,使学习者在学习基本理论、建立抽象思维能力和逻辑思维能力的同时,有一个和实践结合的平台。

本书适合作为计算机科学与技术、软件工程等专业的学生学习操作系统、编译原理、数据库技术、软件工程等课程的先修课教材,建议在大学一年级下学期或大学二年级开设。根据一般经验,完成全部内容需要大约 64 ~96 学时。使用本书的教师可以以基本理论部分(第一篇)为主进行讲解,第二篇作为学习参考留给学生自己练习。强调计算机技术、计算机应用的专业可以略去本书第 6 章和第 7 章中的部分内容(例如环与域,格与布尔代数,特殊图,网络)。如果学时允许,建议讲解本书的全部章节。

目录

第二篇 离散数学中的算法

第一篇　计算机科学中的离散结构

第 1 章

■ 命题逻辑

1.1 引言

命题逻辑与谓词逻辑统称为**数理逻辑**(又名**符号逻辑**),是用数学方法研究推理的一门科学。旧逻辑学的创始人是公元前 4 世纪的希腊思想家亚里士多德(Aristotle);新逻辑学的创始人是 17 世纪的德国哲学家莱布尼茨(Leibniz)和 19 世纪中叶的英国数学家乔治·布尔(George Boole)。

逻辑学的主要目的是要探索出一套完整的规则,按照这些规则可以确定任何特定的论证是否有效。这种规则称为推理规则。要想把这种推理规则应用到各个学科领域中去,就必须使用一种概括性较强,并且又是独立于任何特定的论证或者所涉及的学科的语言。这种语言是一种符号化的形式语言,它没有二义性。使用这种形式化语言可以将推理过程公式化,并且依据推理规则可以机械地确定论证的有效性。

本章将介绍这套符号化形式体系的制定,以及它在命题逻辑中的应用。

1.2 命题及命题逻辑联结词

1.2.1 命题

一个具有真假意义的陈述句称为一个**命题**。也就是说,一个命题的真值只能是真或是假,不能兼而有之,也不能是疑问句或是祈使句等其他类型的句子。如果一个命题的真值是真,则用 1 或 T(True)来表示;如果一个命题的真值是假,则用 0 或 F(False)来表示。

命题用大写的英文字母,如 $P,Q,R,\cdots$ 来表示。

例 1.2.1 下面所举均是命题:

(1)2008 奥运会在美国举行。

(2)$2\times2=5$。

(3)闪电比雷声传播得快。

(4)$1+101=110$。

(5)程序的始祖是拜伦的独生女儿爱达。

以上命题(1)和(2)的真值是 F;(3)的真值是 T;(4)的真值则取决于采用哪种数制,若采用二进制,则取值为 T,其他进制则取值为 F;(5)的真值则取决于考证的结果。

例 1.2.2 下面所举均不是命题:

(1)我们的祖国多辽阔呀!

(2)明天开会吗?

(3)真好啊!

(4)$x+1>3$。

(5)我正在说谎。

因为(1)、(2)和(3)不是陈述句,所以它们不是命题。(4)中某些 x 能够使得 $x+1>3$ 为真,某些 x 使 $x+1>3$ 为假,x 的值不确定,因而无法确定 $x+1>3$ 的真假,所以不是命题。与例 1.2.1 中(4)的区别在于 $1+101=110$ 可以由外因也就是上下文确定其真假,而此处是内因 x 变量决定的。(5)是悖论。因为如果他确实是说谎,那么"我在说谎"便是真,于是就会得出,如果他是说谎,那么他是讲真话;另一方面,如果他确实说的是真话,那么"我正在说谎"便是假,于是会得出,如果他是讲真话,那么他是说谎。从以上分析我们只能得出这样的结论——他必须既不说谎又不讲真话,这显然是矛盾的。也就是说,对于陈述句"我正在说谎"已无法指定它的真值。这样的陈述句称为**悖论**,不是命题。

若一个命题不能再分解为更简单的命题,则这个命题称为原子命题。

例 1.2.1 中的命题均是原子命题。原子命题用大写的英文字母 $P,Q,R,\cdots$表示。

1.2.2 逻辑联结词

除了原子命题,可分解的命题称为**复合命题**或**分子命题**。例如"如果明天是晴天,那么我就去海边",就是由联结词"如果…,那么…"把两个原子命题"明天是晴天"和"我去海边"联结起来组成的复合命题。现实生活中有很多这种联结词,例如"不"、"并且"、"或者"、"当且仅当"等。在数理逻辑中,也引入联结词,它们是从现实生活中抽象出来的,但与现实生活不同,这些联结词有着严格的定义,没有二义性。例如,

P:今天下午有篮球比赛

Q:北京是中国的首都

利用逻辑联结词——否定、合取、析取、单条件和双条件等,可以分别构成新的命题如下。

$\neg P$:今天下午没有篮球比赛

$P\wedge Q$:今天下午有篮球比赛,并且北京是中国的首都

$P\rightarrow Q$:如果今天下午有篮球比赛,那么北京是中国的首都

$P\leftrightarrow Q$:今天下午有篮球比赛,当且仅当北京是中国的首都

在代数式 $x+y$ 中,x 和 y 称为运算对象,$+$ 称作运算符,$x+y$ 则表示运算结果。在命题演算中,也有同样的术语,联结词就是命题演算中的运算符,称为**逻辑运算符**或**逻辑联结词**。逻辑联结词和复合命题密切相关。下面给出 6 个常用的逻辑联结词的定义和符号表示。

1. 逻辑联结词否定——"¬"

设 P 是一个命题,则 P 的否定是一个新的命题,记作"$\neg P$",读作"非 P"。其真值是这样定义的,若 P 的真值是 T,那么$\neg P$ 的真值是 F;若 P 的真值是 F,则$\neg P$ 的真值是 T。命题 P 与其否定$\neg P$ 的关系如表 1-1 所示,它指明如何用运算对象的真值来决定一个应用运算符(即逻辑联结词)的命题的真值。这样的表称为**真值表**。利用真值表可以求出任一复合命题的真值,并判断两个复合命题是否等价,以及一个命题是否是某些命题的逻辑结果等,这种方法称为**真值表技术**。

表 1-1 逻辑联结词"¬"的定义

P	$\neg P$		P	$\neg P$
F	T	或	0	1
T	F		1	0

真值表的左边列出运算对象真值所有可能的组合,结果命题的真值在最右边的一列给出。

例 1.2.3

(1)令 P:所有的素数都是奇数。于是$\neg P$:并非所有的素数都是奇数。

注意 翻译成“所有的素数都不是奇数”是错误的。这是因为否定是对整个命题进行的。

(2)令 Q:大连是座海滨城市。于是$\neg P$:大连不是座海滨城市。

逻辑联结词否定是一元运算符。

2. 逻辑联结词合取——“∧”

设 P 是一个命题,Q 是一个命题,那么“P 合取 Q”是一个命题,记作“$P\wedge Q$”,读作“P 与 Q”或“P 并且 Q”。它的真值是这样定义的:当且仅当 P 和 Q 的真值都为 T 时,$P\wedge Q$ 的真值才为 T,否则,$P\wedge Q$ 的真值为 F。逻辑联结词“∧”的定义如表 1-2 所示。

表 1-2 逻辑联结词“∧”的定义

P	Q	$P\wedge Q$		P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.2.4 令 P:今天有雨。

令 Q:王平是三好学生。

于是 $P\wedge Q$:今天有雨并且王平是三好学生。

在自然语言中,上述命题是没有意义的,因为 P 和 Q 毫不相关。但是,在数理逻辑中,P 和 Q 的合取 $P\wedge Q$ 仍可成为一个新的命题。只要 P 和 Q 的真值给定,$P\wedge Q$ 的真值即可确定。由此可以得出,数理逻辑研究的是抽象的推理,而不涉及各个命题的具体内容以及有无内在联系。

除此之外,使用逻辑联结词 ∧ 时应注意,虽然 ∧ 的使用很灵活,自然语言中的“既…又…”、“一边…一边…”、“不但…而且…”、“虽然…但是…”都可以符号化为 ∧,但是,并不是所有的“…与…”、“…和…”都可以符号化为 ∧。例如“李强与王红是同学”,“李强和王红是好朋友”,这里的“与”和“和”不代表两件事情同时存在或发生,仅仅代表了主语是两个人构成的,而整个句子依然是简单命题。

3. 逻辑联结词析取——“∨”

设 P 是一个命题,Q 是一个命题,于是“P 析取 Q”是一个新的命题,记作“$P\vee Q$”,读作“P 或 Q”或“P 析取 Q”。其真值是这样的定义的:当且仅当 P 和 Q 的真值均为 F 时,$P\vee Q$ 的真值为 F,其余情况均为 T。逻辑联结词“∧”是二元运算符,它的真值表如表 1-3 所示。

表 1-3 逻辑联结词“∨”的定义

P	Q	$P\vee Q$		P	Q	$P\vee Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	T		1	1	1

从上述定义可以看出,逻辑联结词 ∨ 与自然语言中的“或”不完全相同。自然语言中的“或”具有二义性,例如,“从单位到家步行需要七或八分钟”,这里的“或”表示约数、近似数,整个句子依然是简单命题。此外,自然语言中的“或”还可以表示“可兼或”(即 ∨ 联结的两个命题可同时为真),也可以表示“排斥或”(即 ∨ 联结的两个命题不可同时为真)。而逻辑联结词 ∨ 指的仅仅是“可兼或”,并不表示其他意义的“或”。

例 1.2.5 令 P:大连电视台第三套节目今晚七点播放电视剧。

令 Q:大连电视台第三套节目今晚七点播放女排比赛。

于是命题“大连电视台第三套节目今晚七点播放电视剧或播放女排比赛”不能用 $P \vee Q$ 来表示。因为这里自然语言陈述的或是排斥或,这种意义的或我们用另一个逻辑联结词“异或”(“$\bar{\vee}$”)来表示,后面我们将给出它的定义。

例 1.2.6 令 P:张亮是跳高运动员。

令 Q:张亮是跳远运动员。

于是命题“张亮可能是跳高或跳远运动员”就可以用 $P \vee Q$ 来表示,因为这里的或是可兼或。

4. 逻辑联结词单条件——“→”

设 P 是一个命题,Q 是一个命题,那么“如果 P 则 Q”是一个新的命题,记作“$P \to Q$”,读作“如果 P 则 Q”或“如果 P 那么 Q”。其中 P 称为**前件**,Q 称为**后件**。$P \to Q$ 的真值是这样定义的:当且仅当 $P \to Q$ 的前件 P 的真值为 T,后件 Q 的真值为 F 时,$P \to Q$ 的真值为 F,否则,$P \to Q$ 的真值为 T。单条件逻辑联结词“→”的真值表如表 1-4 所示。

表 1-4 逻辑联结词“→”的定义

P	Q	$P \to Q$		P	Q	$P \to Q$
F	F	T		0	0	1
F	T	T		0	1	1
T	F	F	或	1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.2.7

(1)令 P:天不下雨。

令 Q:草木枯黄。

于是 $P \to Q$:如果天不下雨,则草木枯黄。

(2)令 R:他学习用功。

令 S:他成绩优秀。

于是 $R \to S$:如果他学习用功,那么他成绩优秀。

(3)令 U:大海的颜色是蓝色的。

令 V:李老师是大学教授。

于是 $U \to V$:如果大海的颜色是蓝色的,那么李老师是大学教授。

此例中(1)和(2)是有因果关系的,而(3)在自然语言中是毫无道理的,是风马牛不相及的事情。但在命题演算中,一个单条件逻辑联结词的前件并不需要联系到它的后件,它给出的是一种实质性的因果关系,而不单单是形式上的因果关系。也就是说,只要前件 P 和后件 Q 的真值确定下来,命题 $P \to Q$ 的真值就可以确定。

在使用逻辑联结词→时,需要特别注意其真值表。当前件 P 为假时,无论后件 Q 如何,$P \to Q$ 的真值都为真。虽然难以理解,但在自然语言中,我们也经常采用这种思维。例如政治家在竞选时,可能会说“如果我当选,那么我会减税”,只有在他确实当选,但是没有减税时才被认为说了假话;若没有当选,无论是否减税,都不会被质疑说谎。

在自然语言中,“如果 P 那么 Q”为真,则说明 Q 是 P 的必要条件。在自然语言中,Q 是 P 的必要条件的叙述方式不止一种,除了“如果 P 那么 Q”,还可以描述为“只要 P 就 Q”,“因为 P 所

以 Q”,“只有 Q 才 P”,“除非 Q 才 P”等。这些叙述方式在符号化时,都应该符号化为 $P \to Q$。

5. 逻辑联结词双条件——“$\leftrightarrow$”

设 P 是一个命题,Q 是一个命题,于是,“P 等值于 Q”是一个新的命题,记作“$P \leftrightarrow Q$”,读作“P 当且仅当 Q”或“P 等值于 Q”。$P \leftrightarrow Q$ 的真值是这样定义的:当且仅当 P 和 Q 有相同的真值时,$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 T,否则,$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 F。$P \leftrightarrow Q$ 的真值表如表 1-5 所示。

表 1-5　逻辑联结词“$\leftrightarrow$”的定义

P	Q	$P \leftrightarrow Q$		P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T		0	0	1
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.2.8

(1)程序是错的,当且仅当苹果是红的。

(2)电灯不亮,当且仅当灯泡发生故障或开关发生故障。

(3)王宏是三好学生,当且仅当他德、智、体全优。

令 P:程序是错的。

Q:苹果是红的。

于是(1)可表示为:$P \leftrightarrow Q$。

令 R:电灯不亮。

S:灯泡发生故障。

T:开关发生故障。

于是(2)可表示成:$R \leftrightarrow (S \vee T)$。

令 A:王宏是三好学生。

B:王宏德育是优。

C:王宏体育是优。

D:王宏智商是优。

于是(3)可表示为:$A \leftrightarrow (B \wedge D \wedge C)$。

从上面的例子可以看出,等值式也和前面的逻辑联结词 $\wedge$、$\vee$、$\to$一样可以毫无因果关系,而其真值仅仅从等值的定义而确定。

6. 逻辑联结词异或——“∇”

设 P 是一个命题,Q 是一个命题,于是“P 异或 Q”是一个新的命题,记作“$P \nabla Q$”,读作“P 异或 Q”。其真值是这样定义的:当且仅当 P 和 Q 有不同的真值时,$P \nabla Q$ 的真值为 T,否则,$P \nabla Q$的真值为 F。$P \nabla Q$ 的真值表如表 1-6 所示。

表 1-6　逻辑联结词“∇”的定义

P	Q	$P \nabla Q$		P	Q	$P \nabla Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T		0	1	1
T	F	T	或	1	0	1
T	T	F		1	1	0

例 1.2.9

令 P:大连电视台三套节目今晚八点播放电视剧。

令 Q:大连电视台三套节目今晚八点播放女排比赛。

于是 $P\nabla Q$:大连电视台三套节目今晚八时播放电视剧或播放女排比赛。

从逻辑联结词“∇”的定义和逻辑联结词“$\leftrightarrow$”的定义不难看出,$P\nabla Q$ 与$\neg(P\leftrightarrow Q)$的真值表相同,即它们恒等(等价)。也就是说,逻辑联结词异或可以用双条件逻辑联结词及逻辑联结词否定来代替。

以上我们介绍了五个基本的逻辑联结词:$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$。它们运算的优先级为:$\neg$优先级最高,其次是$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$。如果有括号,则括号优先,在括号里从左往右依然遵守这个顺序。

习题

1. 给出下列命题的否定命题:
   (1)大连的每条街道都临海。
   (2)每一个素数都是奇数。
2. 对下述命题用中文写出语句:
   (1) $(\neg P\wedge R)\rightarrow Q$
   (2) $Q\wedge R$
3. 将下列命题符号化,并指出其真值:
   (1)5 不是素数当且仅当 4 不是基数。
   (2)4 或 5 是偶数。
   (3)4 不是偶数或者 5 不是偶数。
   (4)4 和 5 中只有一个是偶数。
4. 给定命题 $P\rightarrow Q$,我们把 $Q\rightarrow P$、$\neg P\rightarrow\neg Q$、$\neg Q\rightarrow\neg P$ 分别称为命题 $P\rightarrow Q$ 的逆命题、反命题、逆反命题。
   给出下列命题的逆命题、反命题和逆反命题。
   (1)如果天不下雨,我将去公园。
   (2)仅当你去我才逗留。
   (3)如果 n 是大于 2 的正整数,那么方程 $x^n+y^n=z^n$ 无整数解。
   (4)要想身体好,天天锻炼是很有必要的。
   (5)只有支付了费用,你才能按期收到货物。
5. 设 P:离散数学是操作系统的一门先修课;Q:辣椒的原产地在中国。将下列命题用自然语言表述,并指出其真值。
   (1)$P\rightarrow Q$
   (2)$Q\rightarrow P$
   (3)$\neg Q\rightarrow P$
   (4)$Q\leftrightarrow P$
   (5)$\neg P\nabla Q$
6. 符号化下列命题。
   (1)火车恰好在我乘坐的日子晚点。
   (2)要选修数据库原理课,你必须已经选修了离散数学以及操作系统。
   (3)这本书要被出版或销毁。
   (4)每当吃海鲜王宏就会过敏。

7. 给 P 和 Q 指派真值 T，给 R 和 S 指派真值 F，求出下列命题的真值。

(1) $(\neg(P\wedge Q\vee\neg R)\vee((Q\leftrightarrow\neg P)\to(R\vee\neg S)))$

(2) $Q\wedge(P\to Q)\to P$

(3) $(P\vee(Q\to(R\wedge\neg P)))\leftrightarrow(Q\vee\neg S)$

(4) $(P\to R)\wedge(\neg Q\to S)$

8. 构成下列公式的真值表：

(1) $Q\wedge(P\to Q)\to P$

(2) $\neg(P\vee Q\wedge R)\leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

(3) $(P\vee Q\to Q\wedge P)\to P\wedge\neg R$

(4) $\neg(P\to P\wedge\neg Q\to R)\wedge Q\vee\neg R$

9. 使用真值表证明：如果 $P\leftrightarrow Q$ 为 T，那么 $P\to Q$ 和 $Q\to P$ 都为 T，反之亦然。

10. 使用真值表证明：对于 P 和 Q 的所有值，$P\to Q$ 与 $\neg P\vee Q$ 有同样的真值。

11. 一个有两个运算对象的逻辑运算符，如果颠倒其运算对象的次序，产生一逻辑等价命题，则称此逻辑运算符是**可交换的**。

(1)确定所给出的逻辑运算符哪些是可交换的：$\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow$。

(2)用真值表证明你的判断。

12. 设 $*$ 是具有两个运算对象的逻辑运算符，如果 $(x*y)*z$ 和 $x*(y*z)$ 逻辑等价，那么运算符 $*$ 是可结合的。

(1)确定逻辑运算符 $\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow$ 哪些是可结合的？

(2)用真值表证明你的判断。

13. 令 P 表示命题"苹果是甜的"，Q 表示命题"苹果是红的"，R 表示命题"我买苹果"。试将下列命题符号化：

(1)如果苹果甜而红，那么我买苹果。

(2)苹果不是甜的。

(3)我没买苹果，因为苹果不红也不甜。

14. 一个探险者被几个吃人者抓住了。吃人者有两种，一种是总说谎的，一种是总说真话的。除非探险者能够判断出一位指定的吃人者是总说谎的还是总说真话的，否则要被吃掉。探险者只能问吃人者一个问题。如何问？

1.3 命题变元和合式的公式

在上一节中我们曾指出，不可再分的命题称为原子命题。换句话说，不包含任何逻辑联结词的命题称为原子命题。应该指出的是，这里所说的原子命题，是指其中的原子是有了确定的真值的；否则，原子没有确定的真值指派，而其原子的取值是在{T,F}这个域上的，则称此原子为**命题变元**。由命题变元、逻辑联结词及圆括号可以构成合式公式。下面给出命题演算中合式公式的递归定义。

(1)单个命题变元是合式公式。

(2)如果 A 是合式公式，那么 $\neg A$ 是合式公式。

(3)如果 A 和 B 均是合式公式，那么 $(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\to B)$ 和 $(A\leftrightarrow B)$ 都是合式公式。

(4)当且仅当有限次地应用(1)、(2)和(3)，由逻辑联结词、圆括号所组成的有意义的符号串是合式公式。

以上定义方法称为**递归定义法**。其中(1)称为**递归定义的基础**,(2)和(3)称为**递归定义的归纳**,(4)称为**递归定义的界限**。

今后我们还会经常使用这种递归定义的方法。

按照上面的定义,下面的字符串都是合式公式:

(1) $\neg(P\wedge Q)$

(2) $\neg(P\rightarrow Q)$

(3) $(P\rightarrow(P\wedge\neg Q))$

(4) $((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\leftrightarrow(S\leftrightarrow T)$

下面的字符串则不是合式公式:

(1) $(P\rightarrow Q)\rightarrow(\wedge Q)$

(2) $(P\rightarrow Q$

(3) $(P\wedge Q)\rightarrow Q)$

今后,我们把合式公式简称为命题公式。一般一个命题公式的真值是不确定的,只有当用确定的命题去取代命题公式中的命题变元,或对其中的命题变元进行真值指派时,命题公式才成为具有确定真值的命题。

给定两个命题公式,若对其中变元的所有可能的真值指派两个命题公式具有相同的真值,则称它们是相互等价的。可以利用真值表技术来判定两个命题公式的等价性。

例 1.3.1

(1)给出命题公式 $\neg((P\vee Q)\wedge P)$ 的真值表。

(2)使用真值表技术证明:命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 与 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$ 是相互等价的。

解 构造(1)的真值表如表 1-7 所示。

表 1-7

P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

对于(2)构造真值表,如表 1-8 所示。

表 1-8

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

从真值表可以清楚地看出,命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 与 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$ 对于变元 P 和 Q 的各种真值指派,它们的真值表完全一致。所以它们是相互等价的。