

高等学校数学学习辅导教材

# 高等数学

# 习题全解

(上下册合订本)

同济·高等数学(三、四版)

陈小柱 陈敬佳 编著

大连理工大学出版社

433467

高等学校数学学习辅导教材

# 高等数学习题全解

同济高等数学(三版、四版)

陈小柱 陈敬佳 编著  
姜乃斌 主审



204334675

大连理工大学出版社

策划 刘杰

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解/陈小柱,陈敬佳编著. —大连:大连理工大学出版社,1998.12

ISBN 7-5611-1520-2

I. 高… II. ①陈…②陈… III. 高等数学-解題  
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 20937 号

大连理工大学出版社出版发行  
大连市凌水河 邮政编码 116024  
电话:0411-4708842 传真:0411-4708898  
E-mail:dlutp@mail.dlptt.ln.cn  
大连业发印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米 1/32 字数:625 千字 印张:21.75  
印数:20001—30000 册  
1998 年 12 月第 1 版 2000 年 2 月第 4 次印刷

责任编辑:刘杰

责任校对:清伶

封面设计:孙宝福

定价:21.80 元

## 卷首赠言

著名教育家钱令希院士指出：“学习如同在硬木头上钻螺丝钉，开头先要搞正方向，锤它几下，然后拧起来就顺利了。否则钉子站得不稳不正，拧起来必然歪歪扭扭，连劲也使不上。求学之道慎起步啊！”

——摘自《中国科学院院士自述》

著名数学家北大教授姜伯驹院士指出：“高等数学最重要的概念是什么，有相当一部分同志对这个问题看法是：高等数学这个课程中最重要、最基本的概念是极限，我不是太赞成这个看法”，“你要说高等数学，那首先是微分、积分这些概念弄清楚，并且会用，我觉得高等数学的重点首先应该是这个”

——摘自《数学的实践与认识》1997.4

## 前 言

高等数学课的重要性是众所周知的。在高等数学的教学过程中,正面临着一个无法回避却日益突出的矛盾:一方面,高等数学课的学时普遍减少,另一方面,期末考试、后续专业课程及考研对学生学习这门课又有较高的要求。

正是为了解决这一问题,我们编写了这本具有工具书性质的《高等数学习题全解》。

对于想更进一步学好高等数学这门课程的学生是大有益处的。

由于同济四版教材只对三版教材每章末增加了总习题,其它习题基本上沿用了第三版,故本书既适合三版的读者,也适合四版的读者。每道题我们都选用了较好的解题思路,但限于篇幅,一题多解的工作只好留给读者。

为了给尽可能多的读者提供便利,本书三部分分别是:同济大学主编《高等数学》(上、下册)第三版习题全解、第四版第1章~12章总习题全解及考研资料。

本书由姜乃斌教授担任主审,参加审稿的有刘晓东教授及王志平副教授。

限于编者水平,加之时间仓促,不妥之处一定存在,希望广大读者提出批评和指正。

编 者

1998年10月

# 目 录

## 卷首赠言 前 言

## 第一部分

### 高等数学习题全解(同济三版)

#### 第一章 函数与极限..... (1)

习题 1-1 ..... (1)      习题 1-2 ..... (7)

习题 1-3 ..... (13)      习题 1-4 ..... (16)

习题 1-5 ..... (19)      习题 1-6 ..... (22)

习题 1-7 ..... (26)      习题 1-8 ..... (29)

习题 1-9 ..... (30)      习题 1-10 ..... (33)

习题 1-11 ..... (36)

#### 第二章 导数与微分 ..... (38)

习题 2-1 ..... (38)      习题 2-2 ..... (44)

习题 2-3 ..... (49)      习题 2-4 ..... (55)

习题 2-5 ..... (58)      习题 2-6 ..... (66)

习题 2-7 ..... (76)      习题 2-8 ..... (80)

#### 第三章 中值定理与导数应用 ..... (86)

习题 3-1 ..... (86)      习题 3-2 ..... (92)

习题 3-3 ..... (97)      习题 3-4 ..... (100)

习题 3-5 ..... (106)      习题 3-6 ..... (111)

|                       |       |               |       |
|-----------------------|-------|---------------|-------|
| 习题 3-7 .....          | (118) | 习题 3-8 .....  | (125) |
| 习题 3-9 .....          | (133) | 习题 3-10 ..... | (138) |
| 第四章 不定积分 .....        | (141) |               |       |
| 习题 4-1 .....          | (141) | 习题 4-2 .....  | (146) |
| 习题 4-3 .....          | (156) | 习题 4-4 .....  | (164) |
| 习题 4-5 .....          | (182) |               |       |
| 第五章 定积分 .....         | (184) |               |       |
| 习题 5-1 .....          | (184) | 习题 5-2 .....  | (188) |
| 习题 5-3 .....          | (192) | 习题 5-4 .....  | (199) |
| 习题 5-5 .....          | (207) | 习题 5-6 .....  | (211) |
| 习题 5-7 .....          | (213) |               |       |
| 第六章 定积分的应用 .....      | (218) |               |       |
| 习题 6-2 .....          | (218) | 习题 6-3 .....  | (226) |
| 习题 6-4 .....          | (231) | 习题 6-5 .....  | (235) |
| 习题 6-6 .....          | (243) |               |       |
| 第七章 空间解析几何与向量代数 ..... | (246) |               |       |
| 习题 7-1 .....          | (246) | 习题 7-2 .....  | (248) |
| 习题 7-3 .....          | (249) | 习题 7-4 .....  | (251) |
| 习题 7-5 .....          | (255) | 习题 7-6 .....  | (259) |
| 习题 7-7 .....          | (262) | 习题 7-8 .....  | (266) |
| 习题 7-9 .....          | (273) |               |       |
| 第八章 多元函数微分法及其应用 ..... | (278) |               |       |
| 习题 8-1 .....          | (278) | 习题 8-2 .....  | (282) |
| 习题 8-3 .....          | (286) | 习题 8-4 .....  | (291) |

|                     |       |                 |       |
|---------------------|-------|-----------------|-------|
| 习题 8-5 .....        | (299) | 习题 8-6 .....    | (306) |
| 习题 8-7 .....        | (310) | 习题 8-8 .....    | (313) |
| 习题 8-9 .....        | (317) | 习题 8-10 .....   | (321) |
| 第九章 重积分 .....       | (323) |                 |       |
| 习题 9-1 .....        | (323) | 习题 9-2(1) ..... | (327) |
| 习题 9-2(2) .....     | (338) | 习题 9-2(3) ..... | (347) |
| 习题 9-3 .....        | (351) | 习题 9-4 .....    | (359) |
| 习题 9-5 .....        | (364) | 习题 9-6 .....    | (374) |
| 第十章 曲线积分与曲面积分 ..... | (379) |                 |       |
| 习题 10-1 .....       | (379) | 习题 10-2 .....   | (285) |
| 习题 10-3 .....       | (392) | 习题 10-4 .....   | (400) |
| 习题 10-5 .....       | (407) | 习题 10-6 .....   | (412) |
| 习题 10-7 .....       | (416) |                 |       |
| 第十一章 无穷级数 .....     | (424) |                 |       |
| 习题 11-1 .....       | (424) | 习题 11-2 .....   | (429) |
| 习题 11-3 .....       | (435) | 习题 11-4 .....   | (439) |
| 习题 11-5 .....       | (443) | 习题 11-6 .....   | (448) |
| 习题 11-7 .....       | (451) | 习题 11-8 .....   | (455) |
| 习题 11-9 .....       | (459) | 习题 11-10 .....  | (462) |
| 习题 11-11 .....      | (467) |                 |       |
| 第十二章 微分方程 .....     | (469) |                 |       |
| 习题 12-1 .....       | (469) | 习题 12-2 .....   | (471) |
| 习题 12-3 .....       | (478) | 习题 12-4 .....   | (484) |
| 习题 12-5 .....       | (494) | 习题 12-6 .....   | (499) |

|                |       |                |       |
|----------------|-------|----------------|-------|
| 习题 12-7 .....  | (501) | 习题 12-8 .....  | (509) |
| 习题 12-9 .....  | (514) | 习题 12-10 ..... | (519) |
| 习题 12-11 ..... | (530) | 习题 12-12 ..... | (535) |
| 习题 12-13 ..... | (543) |                |       |

## 第二部分

### 总习题全解(同济四版)

|             |       |             |       |
|-------------|-------|-------------|-------|
| 总习题一 .....  | (553) | 总习题二 .....  | (558) |
| 总习题三 .....  | (563) | 总习题四 .....  | (570) |
| 总习题五 .....  | (577) | 总习题六 .....  | (586) |
| 总习题七 .....  | (590) | 总习题八 .....  | (598) |
| 总习题九 .....  | (606) | 总习题十 .....  | (615) |
| 总习题十一 ..... | (626) | 总习题十二 ..... | (639) |

## 第三部分

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| 1998 年研究生入学(试卷一)试题解答 ..... | (656) |
| 1998 年研究生入学(试卷二)试题解答 ..... | (662) |
| 1999 年研究生入学(试卷一)试题解答 ..... | (668) |
| 1999 年研究生入学(试卷二)试题解答 ..... | (677) |

# 第一章 函数与极限

万丈高楼平地起,打好基础最要紧。

——陈景润

## 习题 1-1

1. 用区间表示变量的变化范围:

(1)  $2 < x \leq 6$ ;

(2)  $x \geq 0$

(3)  $x^2 < 9$ ;

(4)  $|x-3| \leq 4$

解 (1)  $(2, 6]$ ;

(2)  $[0, +\infty)$

(3)  $(-3, 3)$ ;

(4)  $[-1, 7]$

2. 求函数

$$y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

的定义域和值域。

解 定义域:  $(-\infty, +\infty)$ ; 值域:  $[-1, 1]$

3. 下列各题中, 函数  $f(x)$  和  $g(x)$  是否相同? 为什么?

(1)  $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x$

(2)  $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$

(3)  $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$

解 (1) 不同。因为定义域不同。

(2) 不同。因为对应法则不同,  $x < 0$  时,  $g(x) = -x$

(3) 相同。因为定义域、对应法则均相同。

4. 求下列函数的定义域:

(1)  $y = \frac{1}{1-x};$

(2)  $y = \sqrt{3x+2}$

(3)  $y = \frac{1}{1-x^2};$

(4)  $y = \sqrt{x^2-4}$

(5)  $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2};$

(6)  $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$

(7)  $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$

(8)  $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$

解 (1)  $1-x \neq 0, x \neq 1$  定义域为  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ (2)  $3x+2 \geq 0, x \geq -\frac{2}{3}$  定义域为  $[-\frac{2}{3}, +\infty)$ (3)  $1-x^2 \neq 0, x \neq \pm 1$  定义域为  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ (4)  $x^2-4 \geq 0, |x| \geq 2$  定义域为  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ (5)  $1-x^2 \neq 0$  且  $x+2 \geq 0$ 即  $x \neq \pm 1$  且  $x \geq -2$  定义域为  $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ (6)  $x \neq 0$  且  $1-x^2 \geq 0, x \neq 0$  且  $|x| \leq 1$  定义域为  $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (7)  $4-x^2 > 0, |x| < 2$  定义域为  $(-2, 2)$ (8)  $x^2-3x+2 \neq 0, x \neq 1$  且  $x \neq 2$ 定义域为  $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ 5. 用描点法作出函数  $y = \frac{1}{x^2}$  的图形。

解 (略)。

6. 设  $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ , 求下列函数值:

$$f(0), f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{a}\right), f(x_0), f(x_0+h)$$

解  $f(0) = \sqrt{4+0} = 2$   $f(1) = \sqrt{4+1^2} = \sqrt{5}$

$$f(-1) = \sqrt{4+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{4+\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{|a|} \sqrt{4a^2+1}$$

$$f(x_0) = \sqrt{4+x_0^2}, f(x_0+h) = \sqrt{4+(x_0+h)^2}$$

7. 若  $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$ , 证明  $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ 

证明:  $f\left(\frac{1}{t}\right) = 2\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2} + \frac{5}{\frac{1}{t}} + 5\frac{1}{t}$

$$= 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t = f(t)$$

8. 设  $y = \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$  求  $\varphi(\frac{\pi}{6})$ ,  $\varphi(\frac{\pi}{4})$ ,  $\varphi(-\frac{\pi}{4})$ ,  $\varphi(-2)$ 。并作

出函数  $y = \varphi(x)$  的图形。

解  $\varphi(\frac{\pi}{6}) = |\sin \frac{\pi}{6}| = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi(\frac{\pi}{4}) = |\sin \frac{\pi}{4}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi(-\frac{\pi}{4}) = |\sin(-\frac{\pi}{4})| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\varphi(-2) = 0$

$y = \varphi(x)$  的图形为

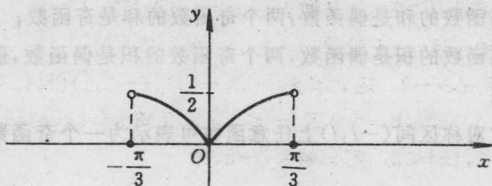


图 1-1

9. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1)  $y = x^2(1-x^2)$ ;

(2)  $y = 3x^2 - x^3$

(3)  $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ;

(4)  $y = x(x-1)(x+1)$

(5)  $y = \sin x - \cos x + 1$ ;

(6)  $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$

解 (1)  $f(-x) = (-x)^2[1-(-x)^2] = x^2(1-x^2) = f(x)$

偶函数;

(2)  $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3$

既非奇函数又非偶函数;

(3)  $f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

偶函数;

(4)  $f(-x) = (-x)[-(-x)-1][-(-x)+1] = -x(x-1)(x+1) = -f(x)$

奇函数;

(5)  $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1$

既非奇函数又非偶函数;

$$(6) f(-x) = \frac{a^{(-x)} + a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^x + a^{-x}}{2} = f(x)$$

偶函数。

$$10. \text{ 设 } f(x) = 2x^2 + 6x - 3, \text{ 求 } \varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ 及 } \Psi(x) =$$

$$\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \text{ 并指出 } \varphi(x) \text{ 及 } \Psi(x) \text{ 中哪个是奇函数? 哪个是偶函数?}$$

解  $\varphi(x) = 2x^2 - 3$  是偶函数;

$\Psi(x) = 6x$  是奇函数。

11. 设下面所考虑的函数都是定义域在对称区间  $(-l, l)$  上的, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的积是偶函数, 两个奇函数的积是偶函数, 偶函数与奇函数的积是奇函数;

(3) 定义在对称区间  $(-l, l)$  上任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

证明 设  $f_1(x), f_2(x)$  均为偶函数, 令

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\text{则 } F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x)$$

故  $F(x)$  为偶函数。

设  $g_1(x), g_2(x)$  均为奇函数, 令

$$G(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

$$\text{则 } G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x)$$

故  $G(x)$  为奇函数。

(2) 设  $f_1(x), f_2(x)$  均为偶函数, 令

$$F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

$$\text{则 } F(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = F(x)$$

故  $F(x)$  为偶函数。

设  $g_1(x), g_2(x)$  为奇函数, 令

$$G(x) = g_1(x)g_2(x)$$

$$\text{因 } G(-x) = g_1(-x)g_2(-x) = [-g_1(x)][-g_2(x)] = g_1(x)g_2(x) = G(x)$$

故  $G(x)$  为偶函数。

设  $f(x)$  为偶函数,  $g(x)$  为奇函数, 令

$$H(x) = f(x)g(x)$$

因  $H(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x) = -H(x)$   
故  $H(x)$  为奇函数。

(3) 设  $f(x)$  为定义于  $(-l, l)$  上的任意一个函数, 令

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ \varphi(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) + f(-(-x))] \\ &= \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \varphi(x)\end{aligned}$$

所以  $\varphi(x)$  为偶函数。

令  $\Psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

因为  $\begin{aligned}\Psi(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(-(-x))] \\ &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] \\ &= -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -\Psi(x)\end{aligned}$

所以  $\Psi(x)$  为奇函数。

而  $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \varphi(x) + \Psi(x)$

所以  $f(x)$  可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和。

12. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1)  $y = x^2, (-1, 0)$ ;

(2)  $y = \lg x, (0, +\infty)$ ;

(3)  $y = \sin x, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。

解 (1)  $\forall x_1, x_2 \in (-1, 0)$  且  $x_1 < x_2$ ,

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$$\because x_1 + x_2 < 0, \quad x_2 - x_1 > 0$$

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{ 即 } f(x_2) < f(x_1)$$

$\therefore f(x)$  在  $(-1, 0)$  单调减少

(2) 设  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  且  $x_1 < x_2$ ,

$$\because f(x_2) - f(x_1) = \lg x_2 - \lg x_1 = \lg \frac{x_2}{x_1}$$

而  $\frac{x_2}{x_1} > 1, \lg \frac{x_2}{x_1} > 0 \therefore f(x_2) - f(x_1) > 0$

即  $y = \lg x$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加。

(3) 设  $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , 且  $x_1 < x_2$

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$\text{而 } -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}, \therefore \cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$$

$$\text{又 } 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}, \therefore \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$$

所以,  $f(x_2) - f(x_1) > 0$

即  $y = \sin x$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  内单调增加。

13. 设  $f(x)$  为定义在  $(-l, l)$  内的奇函数, 若  $f(x)$  在  $(0, l)$  内单调增加, 证明  $f(x)$  在  $(-l, 0)$  内也单调增加。

证明 设  $x_1, x_2 \in (-l, 0)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则

$$-x_1, -x_2 \in (0, l), \text{ 且 } -x_2 < -x_1$$

由  $f(x)$  在  $(0, l)$  内单调增加

则  $f(-x_2) < f(-x_1)$ , 因为  $f(x)$  在  $(-l, l)$  内是奇函数, 所以

$$f(-x_2) = -f(x_2), f(-x_1) = -f(x_1)$$

所以  $-f(x_2) < -f(x_1)$  亦即  $f(x_1) < f(x_2)$

这就证明了对  $(-l, 0)$  内任取的  $x_1 < x_2$ , 都有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 因此,  $f(x)$  在  $(-l, 0)$  内也单调增加。

14. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

(1)  $y = \cos(x-2)$ ;

(2)  $y = \cos 4x$

(3)  $y = 1 + \sin \pi x$ ;

(4)  $y = x \cos x$

(5)  $y = \sin^2 x$

解 (1) 是周期函数, 周期  $l = 2\pi$ ;

(2) 是周期函数, 周期  $l = \frac{\pi}{2}$ ;

(3) 是周期函数, 周期  $l = 2$ ;

(4) 不是周期函数;

(5) 是周期函数, 周期  $l = \pi$ 。

15. 求下列函数的反函数:

(1)  $y = \sqrt[3]{x+1}$ ;

(2)  $y = \frac{1-x}{1+x}$

(3)  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad-bc \neq 0$ ), 当  $a, b, c, d$  满足什么条件时, 这反函数与直接函数相同?

解 (1)  $y = \sqrt[3]{x+1}$  改写为  $x = \sqrt[3]{y+1}$  得  $y = x^3 - 1$

(2)  $y = \frac{1-x}{1+x}$  改写为  $x = \frac{1-y}{1+y}$  得  $y = \frac{1-x}{1+x}$

(3)  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  改写为  $x = \frac{ay+b}{cy+d}$  得  $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$

令  $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-dx+b}{cx-a}$ , 若使反函数与直接函数相同, 则有

$$c(a+d)x^2 + (d-a)(d+a)x - (d+a)b \equiv 0$$

$$a+d=0 \text{ 或 } a+d \neq 0, b=c=0, d=a \neq 0$$

16. 对于函数  $f(x) = x^2$ , 如何选择邻域  $U(0, \delta)$  的半径  $\delta$ , 就能使与任一  $x \in U(0, \delta)$  所对应的函数值都在邻域  $U(0, 2)$  内?

解 欲使  $f(x) \in U(0, 2)$ , 只需  $|f(x)| < 2$

由于  $|f(x)| = x^2$

即  $|x| < \sqrt{2}$

取  $\delta = \sqrt{2}$ , 则当  $x \in U(0, \delta)$  时,  $f(x) \in U(0, 2)$

(显然取任何小于  $\sqrt{2}$  的正数作半径  $\delta$  亦可)。

## 习题 1-2

1. 求下列函数的定义域:

(1)  $y = \sin \sqrt{x}$ ;

(2)  $y = \lg(x+1)$

(3)  $y = \arcsin(x-3)$ ;

(4)  $y = \sqrt{3-x} + \arctg \frac{1}{x}$

(5)  $y = \ln(x+1)$ ;

(6)  $y = e^{\frac{1}{x}}$

解 (1)  $[0, +\infty)$

(2)  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

(3)  $2 \leq x \leq 4$ , 即  $[2, 4]$

(4)  $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

(5)  $(-1, +\infty)$

(6)  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2. 设  $f(x) = \arcsin x$ , 求下列函数值:

$$f(0), f(-1), f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), f(1)$$

解  $f(0)=0, f(-1)=-\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3},$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}, f(1)=\frac{\pi}{2}$$

3. 设  $G(x) = \frac{1}{2} \arccos \frac{x}{2}$ , 求下列函数值:

$$G(0), G(1), G(\sqrt{2}), G(-\sqrt{3}), G(-2)$$

解  $G(0)=\frac{\pi}{4}, G(1)=\frac{\pi}{6}, G(\sqrt{2})=\frac{\pi}{8},$

$$G(-\sqrt{3})=\frac{5}{12}\pi, G(-2)=\frac{\pi}{2}$$

4. 设  $F(x) = e^x$ , 证明:

(1)  $F(x) \cdot F(y) = F(x+y);$

(2)  $\frac{F(x)}{F(y)} = F(x-y).$

证明 (1)  $F(x) \cdot F(y) = e^x \cdot e^y = e^{x+y} = F(x+y);$

(2)  $\frac{F(x)}{F(y)} = \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} = F(x-y).$

5. 设  $G(x) = \ln x$

证明 当  $x > 0, y > 0$ , 下列等式成立:

(1)  $G(x) + G(y) = G(xy);$

(2)  $G(x) - G(y) = G\left(\frac{x}{y}\right).$

证明 (1)  $G(x) + G(y) = \ln x + \ln y = \ln(xy) = G(xy);$

(2)  $G(x) - G(y) = \ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right) = G\left(\frac{x}{y}\right).$

6. 利用  $y = \sin x$  的图形, 作出下列函数的图形:

(1)  $y = \frac{1}{2} + \sin x;$

(2)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

(3)  $y = 3\sin x;$

(4)  $y = \sin 2x$

(5)  $y = 3\sin\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right)$

解 (略)

7. 利用图形的“叠加”, 作出下列函数的图形: