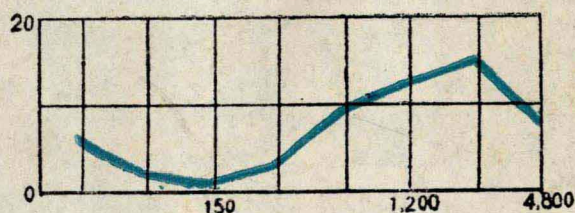


国外齿轮传动噪声控制与标准

南昌齿轮研究所 编

Gear Noise Control



江西省机械工程学会

1986·2

目 录

一、齿轮噪声产生机理

- 1、齿轮系统激振项的分析——基本理论..... (1)
- 2、齿轮噪声的声源..... (47)
- 3、直齿轮啮合频率空气动力噪声..... (50)
- 4、齿轮偏心误差的噪声谱特性..... (57)
- 5、窄齿面斜齿轮的振动..... (65)

二、齿轮噪声分析和声信号应用

- 1、齿轮变速器噪声分析方法..... (74)
- 2、声源箱体的声辐射..... (78)
- 3、齿轮噪声模拟..... (86)
- 4、预测运行中齿轮齿面疲劳的声学方法..... (89)

三、齿轮噪声控制和低噪声设计

- 1、齿轮噪声及其防治..... (94)
- 2、齿轮变速器的声学降噪..... (128)
- 3、箱体对齿轮装置的降噪作用..... (134)
- 4、振动阻尼法降低齿轮噪声..... (148)
- 5、齿轮噪声消除设计..... (150)
- 6、齿轮渐近, 渐远啮合的轮齿分离量选择..... (156)
- 7、正齿轮齿廓修形对动载荷及声级的影响..... (163)

四、齿轮噪声标准

- 1、ISO/TC 60/wG9——N30E
齿轮装置辐射于空气中声功率的测定..... (172)
- 2、ISO/TC 60/w9——N31E
确定齿轮装置机械振动的验收试验标准..... (186)
- 3、ISO/TC 60G/w9——N19E
齿轮装置产生的机械振动的测定与评价..... (191)
- 4、JIS B 1735 1976
齿轮装置的噪声测量方法..... (196)
- 5、AGMA 297.01
封闭式斜齿轮、人字齿轮和螺旋伞齿轮传动装置的噪声..... (208)
- 6、AGMA 295.04
高速斜齿轮装置的噪声测量规范..... (212)

五、附录

- 1、噪声(分贝)加减诺谟图..... (216)
- 2、声学名词解释..... (217)

六、编后记..... (221)

齿轮系统激振项的分析

——基本理论

Willian D·Mark

一个普通齿轮系统的运动方程在频域内的表达式,需要求出激振项各分量的傅里叶系数,这些分量是齿轮系统中各对齿轮的静态传动误差。本文推导出了静态传动误差的一般表达式,并把它分解为由于轮齿弹性变形所引入的分量和齿面几何误差*所引入的分量。齿面几何误差所引入的分量又进一步分解为平均分量和任意分量。发生在与轮齿啮合频率成整数倍的谐波成分,是由轮齿变形以及齿面几何误差的平均分量引起的。而发生在与齿轮旋转频率成整数倍的谐波成分,是由齿面几何误差的任意分量引起的。本文利用齿对局部刚度和刚度加权的几何误差的二维傅里叶变换,推导出静态传动误差各分量的傅里叶系数的表达式。结论对任意的或特定的齿面接触区域同样有效,直齿轮可作为螺旋角为零的特殊情况处理。

引言

齿轮系统的主要激振源是啮合齿对之间相对角运动的不稳定分量。静态传动误差描述了这种位移型的激振项。本文推导出了静态传动误差的平均和任意分量的傅里叶系数表达式,另外,还导出了任意分量功率谱的表达式。这些表达式是用单位长度接触线上的齿对局部刚度,和齿面几何误差的二维傅里叶变换来描述的。这些推导是对按名义渐开线设计的斜齿轮进行的。直齿轮可作为螺旋角为零的特殊情况处理。

本文结论可用于几个方面:(i)预测出给定齿轮系统的振动激励,(ii)弄清制造误差对振动激励的影响,从而在作齿轮制造的技术要求时,可考虑到振动和噪声的因素,(iii)弄清各设计参数(如周节、基圆和顶圆半径、压力角、齿侧间隙、齿面宽、螺旋角和齿面接触区)对振动激励的影响,(iv)在强度、磨损、润滑、重量、尺寸和其它一些设计条件的约束下,设计出合理的齿面几何误差,以使振动激励最小,(v)解释所测出的振动谱,以判断机器的质量。

一对刚性的、具有均匀间距的理想渐开线齿轮能够精确地传递均匀角运动^[1]。然而,实际齿面都设计得略为偏离理想渐开线齿面,并且,它们还包含了逐齿不同的制造误差。另外,当一对齿轮啮合传递力矩时,轮齿会发生弹性变形,引起两齿轮相对角运动的不稳定分量。这个不稳定分量是由于齿轮啮合刚度的周期性变化而引起的,而啮合刚度的周期性变化,则归因于转动过程中参加啮合的齿对数目的周期性变化,和由于转动过程中接触线位置发生

*齿面几何误差是指实际齿面与具有均匀导程和均匀间隔的理想渐开线齿面之间的偏差。——译者注

变化而引起的每对齿的刚度发生变化。人为的齿形修缘、制造误差、磨损以及轮齿变形，都给啮合齿间精确均匀的相对角运动引进了不可忽略的偏差。以上各因素的综合影响用静态传动误差来描述〔2—4〕，静态传动误差的定义为：当一对齿轮传递恒定载荷，并以足够低的速度运转以至于可以完全忽略惯性的影响时，从动齿轮的实际角位置 θ 与其在理想传动情况下所应占据的角位置之间的偏差 $\delta\theta$ 。在本文中我们只涉及到线值传动误差 $\xi = R_b\delta\theta$ ，其中 R_b 是齿轮的基圆半径， $\delta\theta$ 是角传动误差。目前普遍认为，静态传动误差描述了齿轮系统的主要激振源〔2—9〕。

当齿轮系统在正常速度下运转时，各对齿轮的传动误差在该对齿轮所传递的总作用力上引起一个不稳定分量（方向垂直于齿面）；这一不稳定的力量是由齿轮系统的转动惯性所引起的。因为，作为一阶近似，可把齿轮的运动看作单纯的（不稳定）转动，这个不稳定的力，必然会在支承两齿轮的轴承上产生不稳定的支反力，这样，啮合齿对的静态传动误差在齿轮箱体上引起了不稳定的作用力，使箱体振动并发射噪声〔7〕。

为了阐明如何用静态传动误差来写出齿轮系统的运动方程，我们先研究图1所表示的一对齿轮的啮合情况。两齿轮的基圆柱面半径分别用 $R_b^{(1)}$ 和 $R_b^{(2)}$ 表示。各对轮齿的接触都发生在啮合面内，啮合面切于两齿轮的基圆柱面。

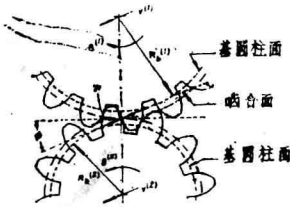


图1 一对齿轮的啮合情况

图1

根据渐开线的性质，在接触点的齿面总是正交于啮合面，因而轮齿所传递的力 W 总是在啮合面内，如图所示。

用 $v^{(1)}$ 和 $v^{(2)}$ 分别表示平行于啮合面方向测得的齿轮平动位移不稳定分量， $\theta^{(1)}$ 、 $\theta^{(2)}$ 表示转动位移不稳定分量。用 C_T 表示（瞬时）啮合柔度， $\xi^{(1)}$ 、 $\xi^{(2)}$ 分别表示空

载时齿轮（1）和（2）上的轮齿静态传动误差分量，它是由于齿面几何误差所引起的。误差 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$ 是在啮合面与正交于转轴的平面的交线方向测量的，当 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$ 等价于齿面下凹时规定为正。

如果我们比较一对受载荷 W 作用的实际齿轮的位置和一对假想的空载理想渐开线齿轮的位置，很明显，在载荷 W 作用下，实际齿轮的轮齿要保持接触，它们必须相对于理想齿轮的位置相互靠近一个距离 $C_T W + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$ 。 $\xi = C_T W + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$ 就是传动误差。因为理想渐开线齿轮传递均匀运动，从图1可以得出，两齿轮的转动和平动位移的不稳定分量与传动误差 $\xi = C_T W + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$ 间有如下关系

$$\begin{aligned} R_b^{(1)} \theta^{(1)} + v^{(1)} - R_b^{(2)} \theta^{(2)} - v^{(2)} \\ = C_T W + \xi^{(1)} + \xi^{(2)} \end{aligned}$$

如前所述，瞬时啮合柔度 C_T 随两齿轮转动位置而变动。用 $\overline{C_T}$ 表示啮合柔度的时间平

均值, 用

$$\delta C_T \triangleq C_T - \overline{C_T}$$

表示啮合柔度的瞬时变化量。另外, 我们把与载荷有关的传动误差分量表示为

$$\xi' \triangleq W \delta C_T, \quad (1)$$

它是由于啮合柔度的变化而引起的。这样, 我们可以将上述包含了齿轮转动和平动不稳定分量的表达式改写为

$$\begin{aligned} R_b^{(1)} \theta^{(1)} + v^{(1)} - R_b^{(2)} \theta^{(2)} - v^{(2)} \\ = \overline{C_T} W + \xi' \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $\xi' \triangleq \xi'_w + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$

如图1所示, 依据作用在各啮合处的动态力 W , 就可以直接写出所研究的齿轮系统的运动微分方程。另外, 再对齿轮系统中每对啮合齿轮写出类似于式(2)的方程, 作为补充方程, 得到齿轮的微分方程组。可以按下面步骤求微分方程组的近似解。从每一个类似于式(2)的方程中, 用代数方法解出 W , 然后代入原始的运动微分方程, 使得除 ξ' 外, 新方程对随时间变化的力 W 的明显函数关系被消除。这样得到的联立微分方程组, 其右边只有齿轮系统中各对齿轮的分量 $\xi' = \xi'_w + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$ 所组成的传动误差激振项矢量。

令每个 ξ' 中的 W 值等于齿轮所传递的平均力 W_0 , 可求得这个方程组的解。除了常量 $\overline{C_T} W_0$ 外, 所得出的激振项矢量中各分量 $\xi' = \xi'_w + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$ 就是系统中各对齿轮的静态传动误差。所得到的与时间无关的线性微分方程组, 可在频域内非常方便地求解。为了得出在频域中的解, 我们需要求出令 W 近似等于常量 W_0 时, 各静态传动误差分量

$\xi' = \xi'_w + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$ 的傅里叶系数。静态传动误差的傅里叶系数表达式在正文中推导出。

在一些实际应用中, 还可用迭代法得到更精确的解。上面令 ξ' 中的 W 等于近似值 W_0 的解, 得出一系列随时间变化的齿轮系统的转动和平动位移(或它们的转换量)。将解出的转动和平动位移(或它们的转换量)代入类似于式(2)的各方程中, 从所得到的表达式用代数方法解出随时间变化的力 W (或其转换量)。然后可以解出消去了 W 的微分方程组, 在求第二组解时必须使用随时间变化的力 W 的近似值来计算传动误差激振项函数 $\xi' = \xi'_w + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$ 中与力有关的分量 ξ'_w 。这样, 第二组解就产生了转动和平动位移或它们的转换量。利用这第二组位移量重复前面的步骤, 又可以求出第三组位移量, 依此类推。换言之, 如果完全在频域内进行求解, 而不消去各式中的 W , 全部联立方程组可以“精确地”求解。

I. 斜齿轮运动中的力学问题

A. 轮齿啮合的几何关系

图2表示了一对具有均匀轴向导程的理想渐开线斜齿轮, 在空载条件下的一些有关几何

性质^[9]。轮齿的接触，局限于两齿轮顶圆与啮合面相交所截得的区域内，如下半图粗实

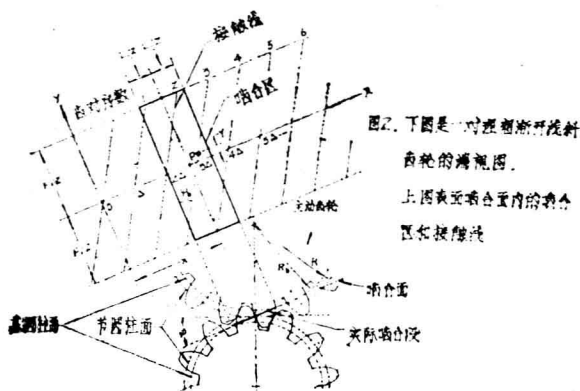


图2

线所示。上半图表示了啮合区域，图中的啮合平面为纸面。啮合区的大小取决于啮合线的长度 L ，和齿面的工作宽度 F 。基节 Δ 是在基圆上量得的相邻两齿对应点间的弧长。基圆螺旋角 ψ 是基圆柱面上的螺旋角。图2的下半图中的 ϕ 角叫做压力角。节圆和基圆半径分别为 R 和 R_0 。这些量之间的关系在以后会用到，已在附录A中推导出。

当图2所示的两齿轮绕各自的轴转动时，上半图所示的啮合区保持不动，而接触线从右向左通过啮合区。我们可以设想这些接触线是画在一条带子上，而带子又绕在两齿轮的基圆柱面上，当齿轮转动时，这条带子以及上面的接触线通过啮合区。这根带子上的线和用来定义两啮合齿轮的渐开线齿面所设想的“带子”上的线是完全一样的。因此，在任意瞬时，两啮合齿轮间的接触，发生在啮合面内的接触线上。

如图2所示，我们在这条带子上附上直角坐标系 $x-y$ ，坐标系的原点取在任意指定为 $j=0$ 的一对齿的接触线中点，坐标 x 的值表示啮合区中心线相对于 $j=0$ 齿对的接触线中点的位置。如果我们用 θ 表示基圆半径为 R 的齿轮的角位置，那么 x 和 θ 有如下关系

$$x = R_0 \theta \quad (3)$$

这里，起始点 $\theta=0$ 和啮合区位置 $x=0$ 相对应。 y 值表示接触线上任一点 P 的轴向位置，如图2上半部分所示。

现在研究正交于齿轮轴心线的平面所截出的一对接触中的轮齿。根据定义，在该平面上所有点，都具有相同的 y 值。对齿轮转动过程中的任一角位置（因而对每一 x 值），在坐标值 y 所确定的平面内，一对轮齿只有一点接触。因而，对任意的一对轮齿 j ，给定了 x 、 y 值就确定了第 j 对齿面上唯一的一个接触点。

B. 传动误差的表达式

图3表示了坐标值 y 所确定的正交于齿轮轴心线的平面内，一对轮齿的啮合。实线表示了

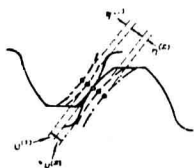


图3 一对啮合的轮齿，平面正交于齿轮的转动轴心线。——刚性理想渐开线齿廓；——具有弹性变形 $U^{(1)}$ 、 $U^{(2)}$ 的齿廓；——具有几何误差 $\eta^{(1)}$ 、 $\eta^{(2)}$ 和应接触齿具有几何误差 $\eta^{(1)}$ 、 $\eta^{(2)}$ 时的齿廓

图3

刚性理想渐开线齿廓。当齿轮传递力矩时，两齿廓在接触点产生弹性变形 $u_j^{(1)}(x, y)$ 和 $u_j^{(2)}(x, y)$ ，上标表示齿轮(1)和(2)，下标表示第 j 对齿。另外，未受载的实际齿面和具有均匀导程和均匀间距的理想渐开线齿面之间也有偏差。这种空载时的偏差用 $\eta_j^{(1)}(x, y)$ 和 $\eta_j^{(2)}(x, y)$ 表示，如图3所示。弹性变形量 $\mu^{(\cdot)}(x, y)$ 和齿面几何误差 $\eta^{(\cdot)}(x, y)$ ，

是在啮合面与坐标为 y 的正交于齿轮轴心线的平面的交线方向测量。当等价于使空载的理想渐开线齿面下凹时, $\mu_j^{(\cdot)}(x, y)$ 和 $\eta_j^{(\cdot)}(x, y)$ 规定为正。

用 $\zeta(x)$ 表示引言中所定义的传动误差。这里, 传动误差已表示为啮合区位置 x 的函数通过式(3), x 又与齿轮转动的角位置 θ 相联系。在以下的推导中, 假定 $\zeta(x)$ 与 y 无关, 这一假定相当于这样一个设想, 即设想画在齿圈上的与齿轮轴心线平行的线, 当齿轮传递力矩时, 仍保持与轴心线平行。根据图3和以上说明, 要保证轮齿在啮合区内每一 y 值处保持接触, 则两齿面相对于刚性理想渐开线齿面靠近了一段距离

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \mu^{(1)}(x, y) + \mu^{(2)}(x, y) \\ &\quad + \eta^{(1)}(x, y) + \eta_j^{(2)}(x, y) \\ &= \mu(x, y) + \eta_i^{(1)}(x, y) + \eta_j^{(2)}(x, y)\end{aligned}\quad (4)$$

这里, 我们看到两个齿轮上的弹性变形能方便地组合为一个变形量, 即

$$\mu(x, y) \triangleq \mu^{(1)}(x, y) + \mu_j^{(2)}(x, y) \quad (5)$$

式(4)还不能完全确定出 $\zeta(x)$ 。因为 ζ 与 y 值和齿对序数 j 无关, 所以 $\mu(x, y)$ 必然随 y 和 j 变化, 以使得由齿轮刚度所决定的力—变形关系得以满足。由式(4)可得到

$$\mu_j(x, y) = \zeta(x) - \eta_j^{(1)}(x, y) - \eta_j^{(2)}(x, y) \quad (6)$$

$\mu_j(x, y)$ 假定总大于或等于零。用 $K_{Tj}(x, y)$ 表示齿对 j 每单位长度接触线上的局部刚度, 其定义见附录B。用 $W_j(x)$ 表示齿对 j 所传递的总作用力, 力是在啮合面与正交于齿轮轴心线的平面的方向上测量, 用 dl 表示接触线微长度, 则有

$$dl = \sec\psi_b dy \quad (7)$$

此关系式可以从图2上半部分直接得出。根据 $K_{Tj}(x, y)$ 的定义, 有

$$W_j(x) = \int K_{Tj}(x, y) \mu_j(x, y) dl \quad (8a)$$

$$= \sec\psi_b \int_{y_A}^{y_B} K_{Tj}(x, y) \mu_j(x, y) dy \quad (8b)$$

$$\begin{aligned}&= \sec\psi_b \int_{y_A}^{y_B} K_{Tj}(x, y) \times [\zeta(x) - \eta_j^{(1)}(x, y) \\ &\quad - \eta_j^{(2)}(x, y)] dy\end{aligned}\quad (8c)$$

上式的推导使用了式(6)和式(7)。积分限 y_A 和 y_B 是齿对序数 j 和啮合区位置 x 的函数, 这个界限表示第 j 对齿上接触线两端的 y 坐标值。对图2所示的理想情况, 积分限由图中的啮合区所确定。

进行精确地分析时, 还必须考虑到 y_A 和 y_B 将随逐齿不同的齿面几何误差 $\eta_j^{(\cdot)}(x, y)$ 而变化。齿轮的振动会引起啮合区的进一步变化。要计入这些影响, 势必会使分析大大地复杂化, 在本文中将假定啮合区与振动以及逐齿不同的 $\eta_j^{(\cdot)}(x, y)$ 无关。

我们规定

$$\widetilde{K_{Tj}}(x) \triangleq \sec\psi_b \int_{y_A}^{y_B} K_{Tj}(x, y) dy \quad (9)$$

它是齿对 j 在啮合区内啮合线的刚度。对齿轮(1)和(2),我们再规定

$$\tilde{\eta}_{kj}^{(\cdot)}(\mathbf{x}) \triangleq \sec\psi_b \int_{y_A}^{y_B} K_{Tj}(\mathbf{x}, y) \eta_j^{(\cdot)}(\mathbf{x}, y) dy \quad (10)$$

它是第 j 对齿面上刚度加权的几何误差沿接触线的积分。这样,啮合过程中传递的总啮合力可表示为

$$\begin{aligned} W &= \sum_j W_j(\mathbf{x}) \\ &= \zeta(\mathbf{x}) \sum_j \tilde{K}_{Tj}(\mathbf{x}) \\ &\quad - \sum_j [\tilde{\eta}_{kj}^{(1)}(\mathbf{x}) + \tilde{\eta}_{kj}^{(2)}(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (11)$$

这里,我们用到了式(8)~(10)的关系,并对如图2所示的啮合区内的所有齿对 j 进行求和。解出式(11)的 $\zeta(\mathbf{x})$,可以得到传动误差的表达式

$$\zeta(\mathbf{x}) = \frac{W}{\sum_j \tilde{K}_{Tj}(\mathbf{x})} + \frac{\sum_j [\tilde{\eta}_{kj}^{(1)}(\mathbf{x}) + \tilde{\eta}_{kj}^{(2)}(\mathbf{x})]}{\sum_j \tilde{K}_{Tj}(\mathbf{x})} \quad (12)$$

式中,啮合传递的总啮合力 W ,是在啮合面内垂直于齿轮轴心线的方向上测量。

因为 $\tilde{K}_{Tj}(\mathbf{x})$ 是齿对 j 的刚度,式(12)右边两项中的分母,就叫做总啮合刚度,它是啮合区位置 $\mathbf{x}$ 的函数。因而,右边第一项表示了传动误差中,由载荷 W 所引起的弹性变形分量。根据式(9)和式(10),式(12)右边的第二项表示了几何误差 $\eta_j^{(1)}$ 和 $\eta_j^{(2)}$ 的加权平均,在此,权函数是齿对局部刚度 $K_{Tj}(\mathbf{x}, y)$,并在啮合区内各啮合齿对接触线的总长度上取平均。

C. 轮齿坐标系的变换

齿对局部刚度 $K_{Tj}(\mathbf{x}, y)$ 和齿面几何误差 $\eta_j^{(\cdot)}(\mathbf{x}, y)$,都可以很方便地在直接描述齿面位置的坐标系内表示。图2所示的 $\mathbf{x}-y$ 坐标系不能满足这一要求。下面我们进行坐标系变换,使我们能在“齿面”坐标系内来描述刚度 $\tilde{K}_{Tj}(\mathbf{x})$ 和几何误差 $\tilde{\eta}_{kj}^{(\cdot)}(\mathbf{x})$ 。

因为我们研究的是斜齿轮,所以,为了方便,在确定新坐标系之前,我们先把一个普通齿轮轮齿部分展到一个平面上。在该齿轮的基本齿条上建立齿面坐标系,就可以严密地做到这点^[9]图4表示了基本齿条和别的一些讨论中将用到的资料。很容易看出,基本齿条和原始齿轮的齿形角 ϕ ,基节 ∇ 、基圆螺旋角 ψ_b 、啮合面、接触线和啮合区都完全相同。因为基本齿条和原始齿轮的接触线完全相同,因此,我们可以在基本齿条上建立齿面坐标系,并在一般意义下,建立坐标值和具有有限直径的相应齿轮上各点之间的对应关系。

我们先集中讨论任一齿轮 j ，并定义坐标

$$s = x - j\Delta \quad (13)$$

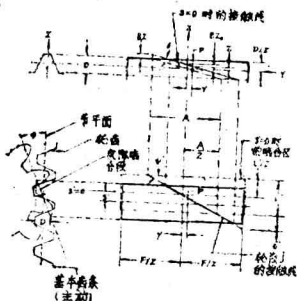


图4 下图是投影到平行于节平面的平面内的啮合区，上图表示了接触线在齿面上的位置。它是啮合区在齿面上的投影。

图4

当 $s=0$ 时，有 $x=j\Delta$ ；因而，当 $s=0$ 时，图2所示的啮合区中心线在 $y=0$ 处与第 j 个齿的接触线相交。这条接触线，表示在图4右下角的图中，它是啮合面在平行于节平面的平面内的投影。图4所示的啮合区位置由变量 s' 表示，它和 s 具有以下关系

$$s' = s \cos \phi \quad (14)$$

因为图4所示的啮合区是实际啮合区在节平面上的投影，所以它是位于基平面内。

图4表示了啮合区的两个位置。在虚线所示的位置，在 $y=0$ 处接触线通过啮合区的中心线，因此，在此位置 $s'=0$ 。由实线表示的啮合区位置，齿轮已相对于 $s'=0$ 的位置向前移动了一段。图4左下角所示的齿轮位置对应于后一啮合区。

图4的右上角，在基本齿条上画出了第 j 齿的接触线，上半图中的接触线分别画为虚线和实线，与下半图相对应。从上半图可以看出，当 s 和 x 增加时，接触线沿齿面平行于自身移动。

图4上半部所示的笛卡儿 (Cartesian) 坐标 (y, z) ，表示了我们将用来确定齿面上各点位置的坐标系。用 D 表示垂直于节平面方向测量得到的实际啮合段在齿面上的投影高度，如图4左下角所示。齿面坐标 z 的原点取在 $\frac{D}{2}$ 处，如图4右上角所示。这样，当啮合区位置 $s=0$ 时，在 $y-x$ 坐标系中，接触线通过坐标原点 $y=0, z=0$ ，如上半图所示。

在IA中已指出，原坐标系中的每一对 (x, y) 的值，确定了接触齿面上唯一的一个接触点，一旦指定了 j ，根据式(13)，每一对 (s, y) 的值也同样确定了齿面上唯一的一点，又根据式(14)，每一对 (s', y) 的值也一样。如图4所示，实线所表示的啮合区位置 s' ，和 y 值一起，必定也确定了第 j 个齿面上唯一的一个接触点 p 。对于任意一对 (s, y) 的值，附录C中已证明，在新的齿面坐标系中接触线上相应点的坐标值为

$$y = y \quad (15)$$

$$z = \beta s + \gamma y \quad (16)$$

式中，常数 β 和 γ 可用压力角 ϕ 和节圆螺旋角 ψ 表示为

$$\beta = \sin \phi \quad (17)$$

$$\gamma = -\sin \phi \cos \phi \tan \psi \quad (18)$$

令 $f_{cj}(y, z)$ 表示第 j 对齿上的新坐标 (y, z) 的实函数。这里，下标 C 表示 f_{cj} 是用图4上半部分所示的笛卡儿坐标 (y, z) 来描述的。实际上，这个函数可以代表齿对局部刚度、齿面几何误差或它们的乘积。令 $f_j(x, y)$ 表示和 $f_{cj}(y, z)$ 相同的物理量，但用

图2所示的 (x, y) 坐标来描述。根据式(13)、(15)、(16)以及前面的讨论, 可以用 $f_{Cj}(y, z)$ 来表示 $f_j(x, y)$

$$\begin{aligned} f_j(x, y) &= f_j(s + j\Delta, y) \\ &\equiv f_{Cj}(y, \beta s + \gamma y) \end{aligned} \quad (19)$$

为了免于分别处理式(9)和(10), 我们定义 $f_j(x, y)$ 在第 j 齿接触线上的积分为

$$\widetilde{f}_j(x) \triangleq \sec \psi_b \int_{y_A}^{y_B} f_j(x, y) dy \quad (20a)$$

$$= \sec \psi_b \int_{y_A(s)}^{y_B(s)} f_{Cj}(y, \beta s + \gamma y) dy \quad (20b)$$

式中第一行具有和式(9)和(10)相同的形式, 从第一行推到第二行, 用到了式(19)的恒等关系, 并把第 j 齿接触线的端点 y_A 、 y_B 表示为 s 的函数。对于图4所示的矩形接触区域的情况, 如附录D所推导, 式(20b)的积分限可用图5中标明为 $y_A(s)$ 和 $y_B(s)$ 的上、下两条曲线所确定。在附录D中, 还用齿轮的基本参数表示了 A 和 L 的值。

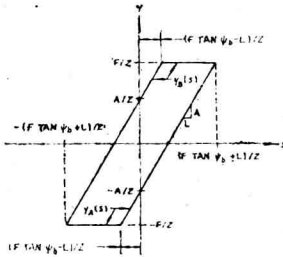


图5 上下两曲线表示了式(20b)的积分限, 它们是啮合区位置 s 的函数。图中方图是和图4所表示的矩形接触区的情形

图5

从图4和5可以明显看出, 我们需要将式(20b)的积分域限制在 $y \leq \frac{1}{2}F$ 范围内, 把 $|y| > \frac{1}{2}F$ 的部分截去。这种截取可以用矩形函数 $\text{rect}(y/F)$ 乘以式(20b)中的被积函数来实现, 矩形函数的定义为^[11]

$$\text{rect } x \triangleq \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (21)$$

如果我们要在公式中明显地体现这一要求, 根据图5所示的积分限的斜率和 y 截距, 可把式(20b)改写为

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_j(x) &= \sec \psi_b \int_{\frac{A}{L}s - \frac{A}{2}}^{\frac{A}{L}s + \frac{A}{2}} \text{rect}\left(\frac{y}{F}\right) f_{Cj}(y, \beta s + \gamma y) dy \\ &= \frac{A}{L} \sec \psi_b \int_{s - \frac{L}{2}}^{s + \frac{L}{2}} \text{rect}\left(\frac{A\xi}{FL}\right) \end{aligned}$$

$$\times f_{Cj}\left(\frac{A\xi}{L}, \beta s + \frac{\gamma A\xi}{L}\right) d\xi \quad (22)$$

式中, 利用变换 $\xi = (L/A)y$ 推导了式(22)可写为

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j(\mathbf{x}) &= \frac{A}{L} \sec \psi_b \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{s-\xi}{L}\right) \\ &\times \text{rect}\left(\frac{A\xi}{FL}\right) f_{Cj}\left(\frac{A\xi}{L}, \beta s + \frac{\gamma A\xi}{L}\right) \\ &\times d\xi \end{aligned} \quad (23)$$

根据式(C4)、(17)、(18)、(A4)和(C8), 可把式(23)进一步简化为

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j(\mathbf{x}) &= \csc \psi_b \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\xi}{FL/A}\right) \text{rect}\left(\frac{s-\xi}{L}\right) \\ &\times f_{Cj}\left(\frac{\xi}{L/A}, \frac{s-\xi}{L/D}\right) d\xi \end{aligned} \quad (24)$$

式中, A/L 和 D/L 都可用附录C和D中推出的关系式, 由齿轮各基本参数来表示。式(24)是 $f_{Cj}(y, z)$ 在第 j 个齿接触线上的积分表达式, 其啮合区位置为 $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{j} \Delta$ 。函数 $f_{Cj}(y, z)$ 是在图4右上角所示的笛卡儿坐标系中表示的。式(24)可用于当接触发生在图4所示的齿面接触区域的情况。

D. 推广到任意接触区

式(24)中的两个矩形函数, 是在矩形齿面接触区域的情况下, 式(20b)的积分限 $y_A(s)$ 和 $y_B(s)$ 的直接结果。因为 $y_A(s)$ 和 $y_B(s)$ 表示图4右上角所示的接触线端点, 式(24)可以作如下推广。我们先用齿面坐标 (y, z) 定义“齿面接触函数” $\Omega_C(y, z)$ 为

$$\Omega_C(y, z) = \begin{cases} 1 & \text{在接触区内} \\ 0 & \text{在接触区外} \end{cases} \quad (25)$$



图6: 式(25)和(39)所定义的椭圆啮合区 $\Omega_C(y, z)$ 。它在椭圆内为1, 椭圆外处处为零。

图6

图6中表示了一个椭圆接触区。如果我们用 $\Omega_C(y, z)$ 乘以一般函数 $f_{Cj}(y, z)$, 可以将式(20b)的积分限换为 $y_A = -\infty$ 和 $y_B = \infty$, 即

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j(\mathbf{x}) &= \sec \psi_b \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_C(y, \beta s + \gamma y) \\ &\times f_{Cj}(y, \beta s + \gamma y) dy \end{aligned} \quad (26)$$

随之, 对式(25)所确定的一般接触区, 式(24)可写为

$$\begin{aligned}\widetilde{f_j}(\mathbf{x}) = & \csc\psi_b \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_C\left(\frac{\xi}{L/A}, \frac{s-\xi}{L/D}\right) \\ & \times f_{Cj}\left(\frac{\xi}{L/A}, \frac{s-\xi}{L/D}\right) d\xi\end{aligned}\quad (27)$$

我们可以利用图4右上角所示的矩形接触区来验证这一结果。对于矩形接触区，有

$$\Omega_C(y, z) = \text{rect}(y/F) \text{rect}(z/D) \quad (28)$$

把式(28)代入式(27)，可得到式(24)。对于在齿面接触区外 $f_{Cj}(y, z)$ 恒等于零的情况，式(26)和(27)可简化为

$$\widetilde{f_j}(\mathbf{x}) = \sec\psi_b \int_{-\infty}^{\infty} f_{Cj}(y, \beta s + \gamma y) dy \quad (29)$$

和

$$\widetilde{f_j}(\mathbf{x}) = \csc\psi_b \int_{-\infty}^{\infty} f_{Cj}\left(\frac{\xi}{L/A}, \frac{s-\xi}{L/D}\right) d\xi \quad (30)$$

在第I节中，我们将多次用到函数 $\widetilde{f_j}(\mathbf{x})$ 的傅里叶变换。把式(26)的右边记为

$$\begin{aligned}\widetilde{f_j}(s) & \stackrel{\Delta}{=} \sec\psi_b \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_C(y, \beta s + \gamma y) \\ & \times f_{Cj}(y, \beta s + \gamma y) dy\end{aligned}\quad (31)$$

因而，从式(13)、(26)和(31)可得出

$$\widetilde{f_j}(\mathbf{x}) = \widetilde{f_j}(s) = \widetilde{f_j}(\mathbf{x} - \mathbf{j}\Delta) \quad (32)$$

即 $\widetilde{f_j}(s)^*$ 等同于 $\widetilde{f_j}(\mathbf{x})$ ，只是自变量的原点平移了 $\mathbf{j}\Delta$ 个单位。我们把 $\widetilde{f_j}(s)$ 、 $f_{Cj}(y, z)$

和 $\Omega_C(y, z)$ 的傅里叶变换定义为

$$\widehat{\widetilde{f_j}}(g) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f_j}(s) \exp(-i2\pi gs) ds^{**} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}\widehat{f_{Cj}}(g_1, g_2) & \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{Cj}(y, z) \\ & \times \exp[-i2\pi(g_1 y + g_2 z)] dy dz\end{aligned}\quad (34)$$

$$\text{和} \quad \widehat{\Omega_C}(g_1, g_2) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_C(y, z)$$

* 原文中误为 $\widetilde{f_j}(\mathbf{x})$ ——译者注

**原文式(33)中误为 $\widehat{\widetilde{f_j}}(s)$ ——译者注

$$\times \exp [-i2\pi (g_1 y + g_2 z)] dy dz \quad (35)$$

式中脱字号“ $\sim$ ”表示傅里叶变换，在附录E中将证明，对于式(25)所定义的任意齿面接触区， $\hat{f}_j(s)$ 的傅里叶变换可以用 $\hat{f}_{Cj}(y, z)$ 和 $\hat{\Omega}_C(y, z)$ 的二维傅里叶变换表示为

$$\begin{aligned} \hat{f}_j^*(g) = & (L/D) \sec \psi_b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{Cj}(g_1, g_2) \\ & \times \hat{\Omega}_C \left[\frac{L}{A} g - g_1, \frac{L}{D} g - g_2 \right] dg_1 dg_2 \end{aligned} \quad (36)$$

对图4所示矩形接触区的情况，我们可以取式(28)的傅里叶变换，得函数 $\hat{\Omega}_C(g_1, g_2)$ ，即

$$\hat{\Omega}_C(g_1, g_2) = FD \text{sinc}(Fg_1) \text{sinc}(Dg_2) \quad (37)$$

式中， $\text{sinc} x$ 中定义为^[11]

$$\text{sinc} x \triangleq \sin \pi x / \pi x \quad (38)$$

对图6所示的椭圆接触区，其边界由下式确定

$$[y^2 / (F/2)^2] + [z^2 / (D/2)^2] = 1 \quad (39)$$

我们可以证明。函数 $\hat{\Omega}_C(g_1, g_2)$ 有如下形式^[12]

$$\hat{\Omega}_C(g_1, g_2) = \frac{\pi FD}{2} \frac{J_1 \left[\pi (F^2 g_1^2 + D^2 g_2^2)^{\frac{1}{2}} \right]}{\pi (F^2 g_1^2 + D^2 g_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (40)$$

式中， $J_1(\cdot)$ 是第一类一阶贝塞尔(Bessel)函数。根据参考文献[13]第409页原文， $J_1(x)/x$ 的前五个零点出现在 $x = 3.832, 7.016, 10.173, 13.324$ 和 16.471 。式(40)右边

的最大值出现在原点 $g_1 = g_2 = 0$ ^[14]。

图7表示了式(36)的一般结果，这里，

$\hat{\Omega}_C(g_1, g_2)$ 为(28)式所确定的矩形齿面接触区的二维付里叶变换，如式(37)所表示。

对于任意的 g 值， $\hat{f}_j(g)$ 是由 $\hat{f}_{Cj}(g_1, g_2)$

加权积分得到，权函数是 $\hat{\Omega}_C \left[(L/A)g - g_1, (L/D)g - g_2 \right]$ ，在 $g_1 = (L/A)g$ 和

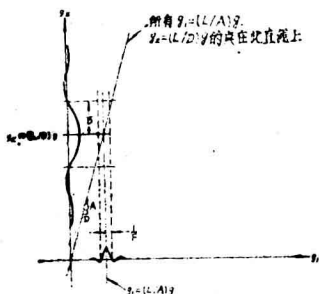


图7. 在 $\hat{\Omega}_C(g_1, g_2)$ 是由式(37)定义的场合下，式(36)中的函数 $\hat{\Omega}_C[(L/A)g - g_1, (L/D)g - g_2]$ 在 g_1 和 g_2 轴上的投影。

图7

* 原文误为 $\hat{f}_j(g)$ ——译者注

$g_2 = (L/D)g$ 附近, 加权较强。从式(37)和图7可以明显看出, 函数 $\widehat{\Omega}_C(g_1, g_2)$ 的性质主要由齿面接触区的尺寸F和D决定。对式(28)所确定的矩形区域的情况, 函数 $\widehat{\Omega}_C[(L/A)g - g_1, (L/D)g - g_2]$ 最靠近 $g_1 = (L/A)g, g_2 = (L/D)g$ 的零点的轨迹, 形成一个矩形, 如图7所示。对图6所示的椭圆接触区的情况, 式(40)表明, 函数 $\widehat{\Omega}_C[(L/A)g - g_1, (L/D)g - g_2]$ 最靠近 $g_1 = (L/A)g, g_2 = (L/D)g$ 的零点的轨迹形成一个椭圆。在 $g_1 - g_2$ 平面内, 椭圆内的面积比图7所示的零点轨迹的矩形面积大17%。

对式(29)和(30)所表示的情况, 在实际接触区外 $f_{Cj}(y, z)$ 恒为零, 我们可以在整个 $y-z$ 平面上取 $\Omega_C(y, z)$ 等于1, 比较式(26)、(27)和式(29)、(30)可以看出这一点。因此, 如果我们令 $F \rightarrow \infty, D \rightarrow \infty$, 并利用式(37)来求 $\widehat{\Omega}_C(g_1, g_2)$ 的值,

由式(36)可得出这种情况下 $\widehat{f}_j(g)$ 的准确值。然而, 利用已知积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \pi$$

从式(37)和(38)可以得出, 对于任意的F和D的值都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Omega}_C(g_1, g_2) dg_1 dg_2 = 1 \quad (41)$$

因而, 当 $F \rightarrow \infty$ 和 $D \rightarrow \infty$ 时, 式(37)的右边趋于两维的 δ 函数(delta function), 其单位面积集中于 $g_1 = 0, g_2 = 0$ 点。从以上讨论和式(36)可得知, 当用接触区外处处为零的函数 $f_{Cj}(y, z)$ 来计算 $\widehat{f}_j(g_1, g_2)$ 时, $\widehat{f}_j(g)$ 可从 $\widehat{f}_{Cj}(g_1, g_2)$ 得出

$$\widehat{f}_j(g) = (L/D) \sec \psi_b \widehat{f}_{Cj}[(L/A)g, (L/D)g] \quad (42)$$

式(42)也可以直接从式(29)或(30)推导出来, 先用 $f_j^*(s)$ 代换式(29)或(30)的左边, 然后对得到的式子取傅里叶变换。

I. 静态传动误差的谐波分析

A. 分解为平均和任意分量

让我们回到传动误差的一般表达式, 式(12)。并注意到式(10)中用到的刚度加权几何误差

$$\eta_{Kj}^{(\cdot)}(x, y) \triangleq K_{Tj}(x, y) \eta_j^{(\cdot)}(x, y) \quad (43)$$

* 原文误为 $\widehat{f}_j(s)$ ——译者注

以及在笛卡儿齿面坐标系中, 用 $\eta_{KCj}^{(\bullet)}(y, z)$ 表示的相同量, 即

$$\begin{aligned}\eta_{KCj}^{(\bullet)}(x, y) &= \eta_{KCj}^{(\bullet)}(s + j\Delta, y) \\ &\equiv \eta_{KCj}^{(\bullet)}(y, \beta s + \gamma y)\end{aligned}\quad (44)$$

和式(19)一样, 我们用到了式(15)和(16)的坐标变换关系。根据式(43), 笛卡儿坐标系中的表达式 $\eta_{KCj}^{(\bullet)}(y, z)$ 可写为

$$\eta_{KCj}^{(\bullet)}(y, z) = K_{TC}(y, z) \eta_{Cj}^{(\bullet)}(y, z) \quad (45)$$

式中, $K_{TC}(y, z)$ 是齿对每单位长度接触线上的局部刚度, $\eta_{Cj}^{(\bullet)}(y, z)$ 是空载时的齿面几何误差, 都是表示在齿面笛卡儿坐标系中。用齿面坐标表示的齿对局部刚度 $K_{TC}(y, z)$ 与齿对序数 j 无关。

现在, 把 $\eta_{KCj}^{(\bullet)}(y, z)$ 分解为平均分量 $m_{KC}^{(\bullet)}(y, z)$ 和任意分量 $\epsilon_{KCj}^{(\bullet)}(y, z)$, 这里, 平均分量是对同一齿轮的所有轮齿取平均, 即

$$m_{KC}^{(\bullet)}(y, z) = \frac{\Delta}{N^{(\bullet)}} \sum_{j=0}^{N^{(\bullet)}-1} \eta_{KCj}^{(\bullet)}(y, z) \quad (46)$$

$N^{(\bullet)}$ 表示所研究的齿轮的齿数。根据定义, $m_{KC}^{(\bullet)}(x, z)$ 与齿对序数无关。刚度加权的任意分量, 是刚度加权的几何误差与其平均分量之差

$$\epsilon_{KCj}^{(\bullet)}(y, z) = \Delta \eta_{KCj}^{(\bullet)}(y, z) - m_{KC}^{(\bullet)}(y, z) \quad (47)$$

根据式(45)和(46), $m_{KC}^{(\bullet)}(y, z)$ 可表示为

$$\begin{aligned}m_{KC}^{(\bullet)}(y, z) &= \frac{K_{TC}(y, z)}{N^{(\bullet)}} \sum_{j=0}^{N^{(\bullet)}-1} \eta_{Cj}^{(\bullet)}(y, z) \\ &= K_{TC}(y, z) m_C^{(\bullet)}(y, z)\end{aligned}\quad (48)$$

式中, 我们已定义空载时齿轮 $(\bullet)$ 上的平均几何误差为

$$m_C^{(\bullet)}(y, z) = \frac{\Delta}{N^{(\bullet)}} \sum_{j=0}^{N^{(\bullet)}-1} \eta_{Cj}^{(\bullet)}(y, z) \quad (49)$$

任意分量可定义为

$$\epsilon_{Cj}^{(\cdot)}(y, z) \triangleq \eta_{Cj}^{(\cdot)}(y, z) - m_C^{(\cdot)}(y, z) \quad (50)$$

从式(45)、(48)和(50)可知, 刚度加权的任意分量可表示为

$$\epsilon_{KCj}^{(\cdot)} = K_{TC}(y, z) \epsilon_{Cj}^{(\cdot)}(y, z) \quad (51)$$

根据式(10)和(20)所确定的关系, 利用式(43)和(44)的新的标记法, 有

$$\tilde{\eta}_{Kj}^{(\cdot)}(x) = \sec \psi_b \int_{y_A(s)}^{y_B(s)} \eta_{KCj}^{(\cdot)}(y, \beta s + \gamma y) dy \quad (52a)$$

$$= \tilde{m}_{Kj}^{(\cdot)}(x) + \tilde{\epsilon}_{Kj}^{(\cdot)}(x) \quad (52b)$$

式中, $\tilde{m}_{Kj}^{(\cdot)}(x)$ 或 $\tilde{\epsilon}_{Kj}^{(\cdot)}(x)$ 是用类似于式(52a)的方式进行确定的, 即

$$\tilde{m}_{Kj}^{(\cdot)}(x) \triangleq \sec \psi_b \int_{y_A(s)}^{y_B(s)} m_{KC}^{(\cdot)}(y, \beta s + \gamma y) dy \quad (53)$$

$$\tilde{\epsilon}_{Kj}^{(\cdot)}(x) \triangleq \sec \psi_b \int_{y_A(s)}^{y_B(s)} \epsilon_{KCj}^{(\cdot)}(y, \beta s + \gamma y) dy \quad (54)$$

这里, 使用了类似于式(47)的分解。同样, 利用式(9)和(24)的规定, 有

$$\tilde{K}_{Tj}(x) = \sec \psi_b \int_{y_A(s)}^{y_B(s)} K_{TC}(y, \beta s + \gamma y) dy \quad (55)$$

如果我们把式(52b)用于齿轮(1)和齿轮(2), 并代入式(12), 令瞬时总啮合刚度为

$$K_T(x) \triangleq \sum_j \tilde{K}_{Tj}(x) \quad (56)$$

再令传动误差的各分量为

$$\zeta_v(x) \triangleq \sum_j W/K_T(x) \quad (57)$$

$$\zeta_m^{(\cdot)}(x) \triangleq \sum_j \tilde{m}_{Kj}^{(\cdot)}(x) / K_T(x) \quad (58)$$

$$\zeta_r^{(\cdot)}(x) \triangleq \sum_j \tilde{\epsilon}_{Kj}^{(\cdot)}(x) / K_T(x) \quad (59)$$

我们可以把 $\zeta(x)$ 分解为平均分量 $\zeta_n(x)$ 和任意分量 $\zeta_r(x)$, 那么

$$\zeta(x) = \zeta_n(x) + \zeta_r(x) \quad (60)$$

这里, 当 W 为常数量 W_0 时, 平均分量 $\zeta_m(x)$ 就是载荷产生的分量 $\zeta_w(x)$, 与齿轮 (1) 和齿轮 (2) 上的平均几何误差分量 $\zeta_m^{(1)}(x)$ 和 $\zeta_m^{(2)}(x)$ 之和

$$\zeta_n(x) = \zeta_w(x)_0 + \zeta_m^{(1)}(x) + \zeta_m^{(2)}(x) \quad (61)$$

而任意分量 $\zeta_r(x)$ 就是齿轮 (1) 和 (2) 上任意分量之和

$$\zeta_r(x) = \zeta_r^{(1)}(x) + \zeta_r^{(2)}(x) \quad (62)$$

式中, $\zeta_w(x)_0$ 的下标 0 表示: 假定 W 为常数量 W_0 。

讨论: 从式 (46)、(48)、(49)、(53) 和 (58) 可知, $\zeta_m^{(1)}(x)$ 和 $\zeta_m^{(2)}(x)$ 是齿轮 (1) 和 (2) 上, 轮齿在空载时的平均几何误差所引起的传动误差分量。如果齿轮设计和制造缺陷不会引起式 (49) 所定义的平均误差的话, 那么, $\zeta_m^{(1)}(x)$ 和 $\zeta_m^{(2)}(x)$ 就只是人为设计的对理想渐开线齿面的偏差*所起的传动误差分量。

把 $\zeta(x)$ 分解为平均分量 $\zeta_m(x)$ 和任意分量 $\zeta_r(x)$, 也是为了便于在频域内进行分析。随着图 2 所示的齿轮对的转动, 当 x 分别经过 $N^{(1)}\Delta$ 和 $N^{(2)}\Delta$ 个单位距离时, 齿轮 (1) 和 (2) 又分别回到其起始位置。因此, 可以明显地看出, 当 W 为常数时, 静态传动误差 $\zeta(x)$ 是 x 的周期函数, 其周期为

$$\begin{aligned} N_F \Delta &= M_1 (N^{(1)} \Delta) \\ &= M_2 (N^{(2)} \Delta) \end{aligned} \quad (63)$$

式中, M_1 和 M_2 是使等式满足的最小正整数。当齿轮 (1) 和 (2) 上对应点再次相遇时, M_1 和 M_2 分别为齿轮 (1) 和 (2) 所必须转过的转数。如果 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ 互质, 那么 $M_1 = N^{(2)}$, $M_2 = N^{(1)}$ 。

因为静态传动误差 $\zeta(x)$ 是周期函数, 具有周期 $N_F \Delta$, 所以它可以用傅里叶级数来表示, 其基波具有周期 $N_F \Delta$ 。类似地, 齿轮 (1) 和 (2) 上的任意分量 $\zeta_r^{(1)}(x)$ 和 $\zeta_r^{(2)}(x)$ 也分别是周期函数, 其周期分别为 $N^{(1)}\Delta$ 和 $N^{(2)}\Delta$ 。从式 (63) 可以直接得出, $\zeta_r^{(1)}(x)$ 和 $\zeta_r^{(2)}(x)$ 的基波分别是 $\zeta(x)$ 的 M_1 和 M_2 次谐波。从式 (63) 还可得知, 如果 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ 互质, 则可能出现在同一频率的 $\zeta_r^{(1)}(x)$ 和 $\zeta_r^{(2)}(x)$ 的唯一谐波分量, 是啮合频率分量, 其周期等于基节 Δ 。然而, 当 W 为常量时, 以上定义的 $\zeta_m(x)$ 包含了静态传动误差中所有周期为 Δ 的分量。因此, 如下面将要证明的 $\zeta_r^{(1)}(x)$ 和 $\zeta_r^{(2)}(x)$ 中不包含以轮齿啮合频率为基频的整数倍谐波分量。所以, 当 $N^{(1)}$ 和 $N^{(2)}$ 互质时, $\zeta_r^{(1)}(x)$ 和 $\zeta_r^{(2)}(x)$

* 如齿形修缘。——译者注