高中複習叢書

代數學

金品 桂叔超編

商務印書館發行

高中復習叢書

代數學

金品 桂叔超編

商務印書館發行

中華民國二十四年四月初版
中華民國二十四年六月再版

三七八六上 周

(52576)

高中複習叢書 代數學 一冊

每冊定價大洋叁角伍分
外埠酌加運費匯費

編著者 金品 桂叔超

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)

高中復習叢書編輯大意

一、本叢書係根據最近教育部頒佈之高級中學課程標準，及本館高中復興教科書分科編輯而成。

二、本叢書編著綱要，表解與圖解並用，務使讀者對於每一科的基本知識，有具體的了解。

三、本叢書搜集近年來全國各省市高中會考試題，按題作答，分析清楚，更可幫助讀者對升學會考作相當的準備。

四、本叢書除參考各教科書編纂外，更於東西文參考書中搜求新穎的解題方法，故益完備。

五、本叢書爲供讀者需要，匆促出版，內容或有忽略脫漏之處，如蒙讀者來函更正，尤所歡迎。

代 數 學

目 次

代 數 學

第 一 章

因 數 分 解

1. 分解的方法:

(*a*) 單項因數　各項如有單項公共因數, 就把牠提出來記在括弧外面;再把牠除各項所得的商,記在括弧裏面.

(*b*) 分羣因數　把全式分爲若干羣, 就各羣中提出單項因數以後, 如還有公共的多項因數時, 就把這多項因數提出來.

(*c*) 完全平方式　如三項式是一個完全平方式; 就照公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, 寫出牠的因數.

(*d*) 兩平方的差　如一式是兩項平方的差, 就照公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, 分解成兩式的和及差.

(*e*) 視察法　三項式 $x^2 + px + q$ 的因數, 往往可視察而得.祇要求出適合 $p = a + b$, $q = ab$, 兩式的 a, b, 就得因

數 $x+a$ 及 $x+b$.

(*f*) 一般二次三項式　用 a 來乘除 ax^2+bx+c, 得 $\dfrac{(ax)^2+b(ax)+ac}{a}$;再把 ax 當做一個文字,照 (*e*) 法來分解.

(*g*) 配方法　二項式,或三項式,遇有不能照前法分解時;那末增減末項或中項,化成兩平方的差,再照 (*d*) 法來分解.

(*h*) 兩立方的和或差　如一式是兩立方的和或差,或可化成這種形式時,就照公式 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ 來分解.

例 1. 分解 x^2-4y^2+x-2y 之因數 (雲南,二十三年)

[解] 用 (*b*) 法, x^2-4y^2+x-2y

$$=(x^2-4y^2)+(x-2y)$$

用 (*d*) 法, $=(x-2y)(x+2y)+(x-2y)$

$$=(x-2y)(x+2y+1)$$

例 2. 析下之各式為因子: (江蘇,一屆補考)

(i) $8a^3b^3c^3-1$　(ii) $4(2x+y)^2-(x+y)^2$

(iii) $a^2-b^2-c^2-2bc$　(iv) $x^2y^2+7xyz-60z^2$

[解] (i) 用 (*h*) 法, $8a^3b^3c^3-1=(2abc)^3-1^3$

$$=(2abc-1)(4a^2b^2c^2+2abc+1)$$

(ii)　用 (d) 法, $(2x+y)^2-(x+y)^2$

$$=[2(2x+y)]^2-(x+y)^2$$

$$=[2(2x+y)-(x+y)]$$

$$[2(2x+y)+(x+y)]$$

$$=(3x+y)(5x+3y)$$

(iii)　用 (d) 法, $a^2-b^2-c^2-2bc$

$$=a^2-(b^2+2bc+c^2)$$

$$=a^2-(b+c)^2$$

$$=(a-b-c)(a+b+c)$$

(iv)　用 (e) 法, $x^2y^2+7xyz-60z^2$

$$=(xy+12z)(xy-5z)$$

例 3.　分解下式之因數: $6x^2-19x+15$　(廣州)

[解]　用 (f) 法, $6x^2-19x+15=\dfrac{(6x)^2-19(6x)+90}{6}$

$$=\frac{(6x-10)(6x-9)}{6}$$

$$=(3x-5)(2x-3)$$

例 4.　試分解下列五式之因數:　(上海,一屆)

$x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ x^3+y^3,\ x^3-y^3,\ x^3y-3x^2y^2-18xy^3.$

[解]　$x^2+y^2=x^2-(-y^2)=x^2-(iy)^2=(x-iy)(x+iy).$

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^3y-3x^2y^2-18xy^3=xy(x^2-3xy-18y^2)$$

$$=xy(x-6y)(x+3y)$$

例 5. 劈下列各式之生數: (女子師範學院)

(i) $3a^3+a-6a^2b-2b$ (ii) $(2x+3y)^2-(x-4y)^2$

(iii) $a^4+a^2b^2+b^4$

[解] (i) $3a^3+a-6a^2b-2b$

用 (b) 法, $=(3a^3-6a^2b)+(a-2b)$

$=3a^2(a-2b)+(a-2b)$

$=(a-2b)(3a^2+1)$

(ii) $(2x+3y)^2-(x-4y)^2$

用 (d) 法, $=(2x+3y-x+4y)(2x+3y+x-4y)$

$=(x+7y)(3x-y)$

(iii) $a^4+a^2b^2+b^4$

用 (g) 法, $=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

2. 綜合除法 用 $x-a$, 除含 x 的多項式時; 可用綜

合除法.牠的規則是:

挨次列被除式各項的係數,有缺項時,便把 0 來補足.改變除式第二項的正負號,寫在右邊.被除式第一項的係數就是商的第一項係數,應寫在橫線下面.用牠乘 ⌊除式⌉ 的第二項,加上被除式的第二項;加出的和,便是商的第二項.再用商的第二項,乘 ⌊除式⌉ 的第二項,加上被除式的第三項.挨次這樣做下去,直到最後一項,所得的和就是剩餘.在牠前面的各數,就是商裏面各項的係數.(參考 4 節下例題)

3. 剩餘定理　用 $x-a$ 除多項式所得的剩餘,等於用 a 代入這多項式而得的值.

例.　應用剩餘定理,求 a 與 b 之值.若 x^3+ax^2+2x+b 能為 $(x-1)(x+4)$ 除盡之.(上海,二屆)

[解]　用 $x=1$ 代入,得

$$1+a+2+b=0 \text{ 或 } a+b=-3$$

用 $x=-4$ 代入,得

$$-64+16a-8+b=0 \text{ 或 } 16a+b=72$$

解上面二方程式,得 $a=5,\ b=-8$.

4. 因數定理　如用 a 替代多項式裏的 x 時,這多項

式的值,恰巧等於 0; 那末 $x-a$ 就是牠的一個因數.

例. 析 $x^4-9x^2+4x+12$ 爲因式. (江蘇,一屆)

[解] 假定 $x=-3$, 那末

$$\text{原式}=(-3)^4-9(-3)^2+4(-3)+12=0;$$

所以 $x+3$ 是一個因數.

利用綜合除法,得

$$\begin{array}{r|l} 1+0-9+4+12 & -3 \\ -3+9+0-12 & \\ \hline 1-3+0+4+0 & \end{array}$$

$$\therefore\quad x^4-9x^2+4x+12=(x+3)(x^3-3x^2+4)$$

假定 $x=2$, 那末

$$x^3-3x^2+4=2^3-3\times2^2+4=0;$$

所以 $x-2$ 是一個因數.

利用綜合除法,得

$$\begin{array}{r|l} 1-3+0+4 & 2 \\ +2-2-4 & \\ \hline 1-1-2+0 & \end{array}$$

$$\therefore\quad x^3-3x^2+4=(x-2)(x^2-x-2)$$

$$=(x-2)(x+1)(x-2)$$

$$\therefore\quad x^4-9x^2+4x+12=(x+3)(x+1)(x-2)^2$$

5. $x^n\pm a^n$ 的因數分解

定理： 假使 n 是一個任意正整數,那末

$x-a$ 一定能除盡 x^n-a^n;

$x-a$ 決定不能除盡 x^n+a^n;

n 是奇數,那末 $x+a$ 一定能除盡 x^n+a^n;

n 是偶數,那末 $x+a$ 一定能除盡 x^n-a^n.

從上面的定理,可知:

(1) n 是奇質數時,照公式

$x^n\pm a^n=(x\pm a)(x^n\mp ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\mp\cdots+a^{n-1})$ 分解.

(2) $n=2m$, 即 n 爲偶數時,先照下面兩個公式分解:

$$x^n-a^n=(x^m)^2-(a^m)^2=(x^m+a^m)(x^m-a^m)$$

又 $x^n-a^n=(x^2)^m-(a^2)^m$

$$=(x^2-a^2)(x^{m-2}+a^2x^{m-4}+a^4x^{m-6}+\cdots+a^{m-2})$$

(3) $n=pq$, 即 n 爲複數時,先照下面兩公式分解:

$$x^n-a^n=(x^p)^q-(a^p)^q$$

$$=(x^p-a^p)\left[x^{p(q-1)}+a^px^{p(q-2)}+\cdots+a^{p(q-1)}\right]$$

又 $x^n-a^n=(x^q)^p-(a^q)^p$

$$=(x^q-a^q)\left[x^{q(p-1)}+a^qx^{q(p-2)}+\cdots+a^{q(p-1)}\right]$$

6. 因數分解的着手方針

(i) 先尋出公共單項因數,或設法分羣;而求得公共

因數.

(ii) 檢驗多項式的形狀,究竟屬於下面的那一種;再決定分解的方法.

(1) $a^2 \pm 2ab + b^2$, (2) $a^2 - b^2$,

(3) $x^2 + px + q$, (4) $ax^2 + bx + c$,

(5) $a^4 + ka^2b^2 + b^4$, (6) $a^3 \pm b^3$,

(7) $a^n \pm b^n$.

(iii) 把所得的多項因數,再繼續用 (ii) 分解下去,直到原式分解成質因數的積.

(iv) 如上面所講的方法,一個都不能分解;那末把因數定理來試一試.

第 二 章

對稱式及交代式

1. 對稱式及交代式 把對稱式中任意兩個文字交換,原式的形狀不變.把交代式中任意兩個文字交換,祇變原式的符號,而不變牠的值.

a, b, c 三文字的同次對稱公式是:

一次 $L(a+b+c)$,

二次 $L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)$,

三次 $L(a^3+b^3+c^3)+M\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+Nabc.$

---

2. 基本定理:

(1) 對稱式的積也是對稱式.

(2) 二個交代式的積,是對稱式.

(3) 對稱式和交代式的積,是交代式.

(4) 許多文字的交代式，一定拿每二個文字的差做因數.

3. 對稱式及交代式的因數分解 利用上面的定理及因數定理，可以分解對稱式及交代式的因數. 舉例如下：

例. 析 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 的因數.

［解］ 因爲原式是三個文字的交代式；從定理(4)知道，$b-c$, $c-a$, $a-b$ 是牠的因數.

或照下面的方法去做：

用 $a=b$ 代入原式，原式就等於零；所以從因數定理知道，$a-b$ 是一個因數. 同樣，可知 $c-a$, $a-b$ 也是牠的因數.

但是原式是四次的同次交代式，從定理(3)知道，還有一個一次同次對稱因數. 所以

原式 $=L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

比較兩邊 a^3b 的係數得，$L=-1$.

L 的值，也可用數字代入法來求得：

用 $a=0$, $b=1$, $c=2$ 代入原式，那末

$$0+1^3\times 2+2^3(-1)=L(1-2)(2-0)(0-1)(0+1+2)$$

$$6L=-6 \quad \therefore \quad L=-1$$

$$\therefore \quad a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

4. 對稱式及交代式的一次因數　三個文字的對稱式,或交代式,如果有一次因數,那末一次因數的形狀,有下面幾種:

(1)　$a, b,$ 及 c

(2)　$a-b, b-c,$ 及 $c-a$

(3)　$a+b, b+c,$ 及 $c+a$

(4)　$a+b-c, b+c-a,$ 及 $c+a-b$

(5)　$a+b+c$

這裏所講的,在分解對稱式及交代式的因數時很有幫助,大家應當注意.