



高二  
上

# 思维大革命

总主编 王迈迈

主编 田化澜 裴光亚

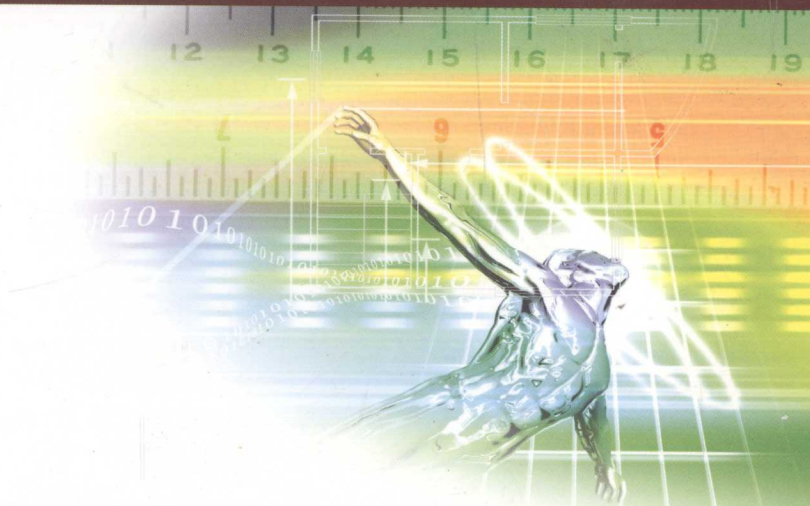
人教版  
高二(上)

# 数学

## 同步课本辅导

超豪华作者阵容 超一流图书品牌

学科主编 裴光亚  
本册主编 徐赤勇



中国致公出版社



E 迈迈图书品牌

顶级大师风云际会 巨星齐聚群星璀璨

让每一位中学生都能聆听中国一流大师的  
讲课和教诲，是本套丛书的真诚希望！

思维决定一切



CS865406

863208



高二  
上

总主编 王迈迈

主编 田化澜 裴光亚

人教版  
高二(上)

数学

同步课本辅导

超豪华作者阵容 超一流图书品牌

学科主编 裴光亚

本册主编 徐赤勇

编者 杨建民 张鸿志 王先东 徐高成  
陆先泽 杨银舟 张 翔

G634.6

096

中国致公出版社

图书在版编目(CIP)数据

思维大革命. 高中数学同步课本辅导/裴光亚主编. —  
北京:中国致公出版社,2005.2  
ISBN 7-80179-380-3

I. 思... II. 裴... III. 数学课—高中—教学参考资料  
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 005999 号

思维大革命

裴光亚 主编  
高永新 副主编

中国致公出版社

高中数学(高二上)同步课本辅导

中国致公出版社出版

新华书店经销

枝江市新华印刷公司印刷

开本 889×1230 1/32 印张 32 字数 620 千字

2006 年 4 月第 2 版 2006 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—10000 册

ISBN 7-80179-380-3

(全 4 册)定价:41.00 元

中国致公出版社

# Foreword 序

**中**华民族的振兴,关键在教育,教育要创新,思维要革命,思维决定一切。

《思维大革命》系列丛书以磅礴的气势尽揽天下名师,从教育创新的制高点,从思维要革命的核心深处,为中学教育引路导航,为莘莘学子授业解惑。

《思维大革命》系列丛书博采众家之长,既引入了全国中语会教改课题专家委员会主任、著名特级教师胡明道老师那风靡华夏的学长式教育理念;体现了全国著名语文特级教师,发表语文教改论文 1200 余篇的荆州市语文教研员余映潮老师的教改思想;融入了全国著名数学特级教师,国务院津贴专家田化澜老师的毕生教学经验;采用了著名中学数学教学专家、国家级骨干教师培训班主任裴光亚老师的最新教学观点;运用了著名中学英语教学专家、全国教育科学“十五”规划重点课题——“初中升学考试标准及实施大纲”项目组学科组长徐启富老师的研究成果;公开了华师一附中著名化学特级教师、国际奥林匹克竞赛金牌得主指导教师尹一冰老师的独特授课秘方;总结了著名中学物理特级教师,曾培养了 40 多名全国中学物理竞赛一、二、三等奖获奖学生的沈文达老师的核心教学思想;展现了大名鼎鼎的黄冈中学著名特级教师王先生、吴校红老师令人折服的授课模式……

《思维大革命》系列丛书是数百名教育专家呕心沥血的劳动成果,是他们闪闪发光的智慧结晶。

帮助每一位中学生朋友学好基础知识,让每一位中学生朋友都能聆听中国一流大师的讲课和教诲,是这套丛书的真诚希望!

欢迎同学们就本套丛书提出宝贵意见。来信请寄:武汉市洪山区楚雄大道 268 号 武汉现代外国语言文学研究所 邮编:430070

电话:027-88027608 88027628 88026460 88034727

同学们还可以通过以下方式和我们交流:

1. 语音聊天室(全天候开放,语音讲课)。
2. BBS 论坛(全天候开放)。
3. 通过答疑专用信箱(support @ wmmenglish. com)和我们联系。

编者

# Preface

## 前言

### ——《思维大革命》系列丛书解读

裴光亚

名师有真传,成功无捷径,  
思则集大成,学如烹小鲜。

影响学习绩效的因素是什么?可能很多,但其核心的东西是思维。也许人们并不这样认为,常说:兴趣是最好的老师。这话是对的,不妨追问一下,兴趣是如何产生的?短期的兴趣可以来自鼓励和功利需要,而长久的兴趣则来自学科本身,来自学科本身的魅力。那么,学科的魅力为什么可以吸引一些人,而不能吸引另一些人呢?这就是思维的作用。只有良好的思维品质,才能感受到学科的美、学科的力量,才能穿透学科的本质、学科的微言大义,才能真正投入其中,悟到学科的真谛,而不致疏于理解,让有用和无用的东西一起充塞大脑。为了发掘思想的潜能,开启学习的悟性,我们有必要进行思维大革命,通过思维大革命来改善我们的学习。

多年来,我们目睹了很多学生,他们勤学苦读,挑灯夜战,却没有获得理想的成绩。为什么一份耕耘没有一份收获?人们一直在提出和思索这个问题。现在,我们终于找到了正确的答案:一些教学方法对思维的认识不够,不懂得思维的作用,更不懂如何作用于思维,以致思维游离于学习活动之外。以田化澜、沈文达、胡明道、蔡明胜、徐启富为代表的专家学者,虽然执掌着不同的领域,却有一个共同的信念,就是要让思维回归到学习活动的中心,贯穿到学习活动的每一个环节,从而真正提高同学们的学习效率。作为一代名师,他们设计教法,创研教学艺术,身体力行,把许许多多学生送进清华北大,让千千万万学生超越自我。他们以自己丰硕的教学实绩和巨大的学术影响,把众多特级教师、国务津贴专家、全国优质课评比中的获奖者以及状元考生、金牌得主的辅导教师聚集在一起,辅以自己毕生的经验,成就了这样一套书——《思维大革命》。

《思维大革命》由同步课本辅导(英语学科为英汉对照与详解)、同步检测与评价和中(高)考全程总复习三个系列构成。

**同步课本辅导**的目的是帮助学生卓有成效地获得相关课程中的基本知识、基本技能和基本方法,解除学习中的疑难与困惑。同步课本辅导按基本单元划分,与课程进度同步,每单元根据内容不同分为:目标点击、课前预热、学中辅导、高考链接、学能测试等。这里,不仅有明确的目标,而且有达标测试;不仅提供学习素材,而且贴合学习进程,不仅阐明知识要点,而且强调学法指导;不仅立足于教什么,而且关注于考什么。在这个系列中,力图创设一种情境,使你的学习过程成为与名师同行的过程。

**同步检测与评价**是同步课本辅导的自然延伸,以满足学生课后练习和期中、期末自我检测的需要。其中的点评,不仅包括规律与方法,还包括技巧与经验;不仅帮你提升对知识的整体认识,而且提醒你那些决定成败的细节。通过阅读这些点评,可以进一步扩展我们的视野。

**全程总复习**系列是为升学考试的需要而设计的,中考各科均为一册(但英语为两册),高考分第一轮和第二轮。总复习着力展示中(高)考的目标、趋势与方向,使你心中有数,主动探究;特别是在帮助你落实应考内容的同时,还注重渗透应考经验,从而实现考试内容、考试策略、考试心理等三位一体的全面发展。

也许,人们不禁会问,三个系列及其每一系列中的环节,不正好与我们学习的基本过程一致吗?是的,这正是我们所坚持的原则,即体现学习的基本规律,体现教学的基本过程,体现学生发展的基本要求,体现课程改革的基本方向。若不如此,又怎么称得上是思维大革命呢?问题就在这里,学习原本是一件自然的事情,发自内心的求知需求,是人类天性中的一部分,却被许多外界压力,不切实际的短期行为,成堆的应考资料扭曲了,以至掩盖了那最基本的事实。正象马克思那既简单又深刻、既平凡又伟大的发现:人们首先必须吃、喝、住、穿,这一基本事实竟被繁茂芜杂的意识形态掩盖了。因此,我们必须反璞归真,还学习以本来面目。这,就是思维大革命!

# 目 录

# CONTENTS



## 第6章

## 不等式

|                        |      |
|------------------------|------|
| 第一单元 不等式的性质 .....      | (1)  |
| 一、目标点击 .....           | (1)  |
| 二、课前预热 .....           | (1)  |
| 三、学中辅导 .....           | (3)  |
| 四、高考链接 .....           | (7)  |
| 五、学能测试 .....           | (9)  |
| 第二单元 算术平均数与几何平均数 ..... | (10) |
| 一、目标点击 .....           | (10) |
| 二、课前预热 .....           | (10) |
| 三、学中辅导 .....           | (11) |
| 四、高考链接 .....           | (17) |
| 五、学能测试 .....           | (19) |
| 第三单元 不等式的证明 .....      | (20) |
| 一、目标点击 .....           | (20) |
| 二、课前预热 .....           | (21) |
| 三、学中辅导 .....           | (21) |
| 四、高考链接 .....           | (31) |
| 五、学能测试 .....           | (33) |
| 第四单元 不等式的解法 .....      | (34) |
| 一、目标点击 .....           | (34) |
| 二、课前预热 .....           | (35) |
| 三、学中辅导 .....           | (36) |
| 四、高考链接 .....           | (38) |
| 五、学能测试 .....           | (39) |
| 第五单元 含绝对值不等式 .....     | (41) |
| 一、目标点击 .....           | (41) |
| 二、课前预热 .....           | (41) |

|                                                                                                        |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 三、学中辅导 .....                                                                                           | (42) |
| 四、高考链接 .....                                                                                           | (43) |
| 五、学能测试 .....                                                                                           | (45) |
| <b>第六单元 不等式的应用</b> .....                                                                               | (46) |
| 一、目标点击 .....                                                                                           | (46) |
| 二、课前预热 .....                                                                                           | (46) |
| 三、学中辅导 .....                                                                                           | (47) |
| 四、高考链接 .....                                                                                           | (49) |
| 五、学能测试 .....                                                                                           | (50) |
|  <b>第 7 章 直线和圆的方程</b> |      |
| <b>第一单元 直线的倾斜角和斜率</b> .....                                                                            | (52) |
| 一、目标点击 .....                                                                                           | (52) |
| 二、课前预热 .....                                                                                           | (52) |
| 三、学中辅导 .....                                                                                           | (53) |
| 四、高考链接 .....                                                                                           | (55) |
| <b>第二单元 直线的方程</b> .....                                                                                | (57) |
| 一、目标点击 .....                                                                                           | (57) |
| 二、课前预热 .....                                                                                           | (58) |
| 三、学中辅导 .....                                                                                           | (59) |
| 四、高考链接 .....                                                                                           | (62) |
| 五、学能测试 .....                                                                                           | (64) |
| <b>第三单元 两条直线位置关系</b> .....                                                                             | (65) |
| 一、目标点击 .....                                                                                           | (65) |
| 二、课前预热 .....                                                                                           | (66) |
| 三、学中辅导 .....                                                                                           | (66) |
| 四、高考链接 .....                                                                                           | (73) |
| 五、学能测试 .....                                                                                           | (75) |
| <b>第四单元 简单的线性规划</b> .....                                                                              | (76) |
| 一、目标点击 .....                                                                                           | (76) |
| 二、课前预热 .....                                                                                           | (76) |
| 三、学中辅导 .....                                                                                           | (78) |
| 四、高考链接 .....                                                                                           | (80) |
| <b>第五单元 曲线与方程</b> .....                                                                                | (82) |
| 一、目标点击 .....                                                                                           | (82) |
| 二、课前预热 .....                                                                                           | (82) |
| 三、学中辅导 .....                                                                                           | (83) |
| 四、高考链接 .....                                                                                           | (86) |
| 五、学能测试 .....                                                                                           | (87) |
| <b>第六单元 圆的方程</b> .....                                                                                 | (89) |
| 一、目标点击 .....                                                                                           | (89) |

|        |      |
|--------|------|
| 二、课前预热 | (89) |
| 三、学中辅导 | (90) |
| 四、高考链接 | (92) |

## 第七单元 直线和圆的位置关系 (95)

|        |       |
|--------|-------|
| 一、目标点击 | (95)  |
| 二、课前预热 | (95)  |
| 三、学中辅导 | (96)  |
| 四、高考链接 | (98)  |
| 五、学能测试 | (100) |



## 第8章 圆锥曲线方程

### 第一单元 椭圆及其标准方程 (102)

|        |       |
|--------|-------|
| 一、目标点击 | (102) |
| 二、课前预热 | (102) |
| 三、学中辅导 | (103) |
| 四、高考链接 | (105) |

### 第二单元 椭圆的简单几何性质 (107)

|        |       |
|--------|-------|
| 一、目标点击 | (107) |
| 二、课前预热 | (108) |
| 三、学中辅导 | (109) |
| 四、高考链接 | (115) |
| 五、学能测试 | (120) |

### 第三单元 双曲线及其标准方程 (121)

|        |       |
|--------|-------|
| 一、目标点击 | (121) |
| 二、课前预热 | (122) |
| 三、学中辅导 | (122) |
| 四、高考链接 | (124) |

### 第四单元 双曲线的简单几何性质 (126)

|        |       |
|--------|-------|
| 一、目标点击 | (126) |
| 二、课前预热 | (127) |
| 三、学中辅导 | (127) |
| 四、高考链接 | (130) |
| 五、学能测试 | (137) |

### 第五单元 抛物线及其标准方程 (138)

|        |       |
|--------|-------|
| 一、目标点击 | (138) |
| 二、课前预热 | (139) |
| 三、学中辅导 | (139) |
| 四、高考链接 | (141) |

### 第六单元 抛物线的简单几何性质 (143)

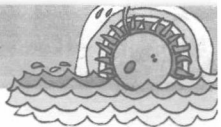
|        |       |
|--------|-------|
| 一、目标点击 | (143) |
| 二、课前预热 | (144) |

|                   |       |
|-------------------|-------|
| 三、学中辅导            | (144) |
| 四、高考链接            | (146) |
| 五、学能测试            | (148) |
| 第七单元 直线与圆锥曲线的位置关系 | (150) |
| 一、目标点击            | (150) |
| 二、课前预热            | (150) |
| 三、学中辅导            | (151) |
| 四、高考链接            | (153) |
| 五、学能测试            | (155) |
| 第八单元 轨迹问题         | (157) |
| 一、目标点击            | (157) |
| 二、课前预热            | (157) |
| 三、学中辅导            | (158) |
| 四、高考链接            | (164) |
| 第九单元 圆锥曲线的综合问题    | (166) |
| 一、目标点击            | (166) |
| 二、课前预热            | (167) |
| 三、学中辅导            | (167) |
| 四、高考链接            | (178) |
| 五、学能测试            | (180) |



## 答案与解题参考

|      |       |
|------|-------|
| 第6章  | (183) |
| 第一单元 | (183) |
| 第二单元 | (185) |
| 第三单元 | (187) |
| 第四单元 | (189) |
| 第五单元 | (190) |
| 第六单元 | (191) |
| 第7章  | (193) |
| 第二单元 | (193) |
| 第三单元 | (194) |
| 第五单元 | (196) |
| 第七单元 | (197) |
| 第8章  | (199) |
| 第二单元 | (199) |
| 第四单元 | (201) |
| 第六单元 | (203) |
| 第七单元 | (205) |
| 第九单元 | (208) |



## 第 6 章

## 不等式

## 6.1

## 不等式的性质

## 一、目标点击

- 1 理解不等式的有关概念.
- 2 了解比较两个实数(代数式)大小的方法.
- 3 理解不等式的性质及性质的证明.
- 4 通过性质的应用,培养逻辑思维能力.

## 二、课前预热

不等式的性质是“不等式”这一章的基本理论与出发点,是证明不等式与解不等式的基础,是不等式变形的依据.

请阅读课文,弄清下列问题:(1)如何比较两个实数(代数式)的大小;(2)不等式有哪些性质?如何证明?

**例 1** 对于实数  $a, b, c$ , 判断下列命题的真假.

- (1) 若  $a > b$ , 则  $ac < bc$   
 (2) 若  $ac^2 > bc^2$ , 则  $a > b$   
 (3) 若  $a < b < 0$ , 则  $a^2 > ab > b^2$   
 (4) 若  $a < b < 0$ , 则  $|a| > |b|$   
 (5) 若  $c > a > b > 0$ , 则  $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$   
 (6) 若  $a > b$ ,  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ , 则  $a > 0, b < 0$ .

**分析** 若要判断上述命题的真假, 依据就是实数集的基本性质及实数运算的符号法则, 还有就是不等式的基本性质, 经过合理的逻辑推理即可判断.

**解析** (1)  $\because c$  的正、负或是否为零未知, 因而判断  $ac$  与  $bc$  的大小缺乏依据, 故该命题是假命题.

(2) 由  $ac^2 > bc^2$  知  $c \neq 0, c^2 > 0, \therefore a > b$   
 故该命题为真命题.

(3) 由  $\begin{cases} a < b \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 > ab$ , 又  $\begin{cases} a < b \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow ab > b^2$ ,

$\therefore a^2 > ab > b^2$ .

故该命题为真命题.

(4) 两个负实数, 数小的离原点远, 故绝对值反而大.  
 故该命题为真命题.

(5)  $a > b > 0 \Rightarrow -a < -b \Rightarrow c-a < c-b$   
 又  $c > a > b > 0 \Rightarrow 0 < c-a < c-b$   
 $\Rightarrow \frac{1}{c-a} > \frac{1}{c-b} > 0 \Rightarrow \frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$

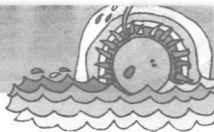
故该命题为真命题.

(6) 由已知条件知:

$a > b \Rightarrow a - b > 0$   
 $\left. \begin{aligned} &\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow \frac{b-a}{ab} > 0 \\ &a > b \end{aligned} \right\} \Rightarrow ab < 0.$

又  $a > b, \therefore a > 0, b < 0$ .

故该命题为真命题.



**点评:**上述判断真假命题的练习可以使我们熟悉不等式的基本性质,更好地掌握性质定理及其推论的条件和结论.若要判断命题是真命题,应说明理由或进行证明,推理过程应紧扣有关定理、性质等;若判断命题是假命题,只需举一反例.

### 三、学中辅导

#### 1. 不等式的性质应用

**例2** 若  $a < b < 0$ , 则下列不等关系中不能成立的是( )

A.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

B.  $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$

C.  $|a| > |b|$

D.  $a^4 > b^4$

**解** 对于 A:  $\because \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0, \therefore$  A 正确; C、D 显然正确; B 错误.

$\therefore$  选 B.

#### 2. 数或式的大小比较

对于任意两个实数  $a, b$ , 有  $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b; a - b = 0 \Leftrightarrow a = b; a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$ . 这是比较两个实数大小的依据, 也是学习不等式的基石. 比较两个实数(或代数式)的大小, 通常用作差法.

作差法的步骤: ① 作差; ② 变形(分解因式, 配方等); ③ 判断差的符号; ④ 结论. 概括为“三步, 一结论”, 其中“判断差的符号”是目的, “变形”是关键. 常采用配方、因式分解、通分、有理化等恒等变形手段.

**例3** 已知  $a > b > c > 0$ , 试比较  $\frac{a-c}{b}$  与  $\frac{b-c}{a}$  的大小.

**分析** 要比较两个实数的大小, 可考虑它们的差是否大于 0, 即本题可考虑作差  $\frac{a-c}{b} - \frac{b-c}{a}$ , 然后进行变形, 再判断符号. 本题的另一种思路是: 直接利用不等式的性质进行比较.

**解析** 解法 1:  $\because a > b > c > 0$ ,

$$\therefore a - b > 0, ab > 0, a + b - c > 0$$

$$\text{则 } \frac{a-c}{b} - \frac{b-c}{a} = \frac{a(a-c) - b(b-c)}{ab}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2) - (ac - bc)}{ab}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b-c)}{ab} > 0$$

$$\therefore \frac{a-c}{b} > \frac{b-c}{a}$$

解法2:由  $a > b > c > 0$ , 可得

$$a - c > b - c > 0, \text{ 且 } \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$$

$$\text{再由定理4的推论1, 得: } \frac{a-c}{b} > \frac{b-c}{a}$$

☞ 点评: 对于较复杂的两个式子的大小比较问题, 通常可采用作差、变形, 然后进行因式分解, 再利用已知条件判断各因式的符号.

**例4** 已知  $a > 0$ , 且  $a \neq 1, m > n > 0$ , 比较  $A = a^m + \frac{1}{a^m}$  和  $B$

$= a^n + \frac{1}{a^n}$  的大小.

**分析** 作差后与零比较大小, 应充分考虑其结构特点, 同时还要考虑用指数函数的性质.

$$\text{解析 } A - B = (a^m + \frac{1}{a^m}) - (a^n + \frac{1}{a^n})$$

$$= (a^m - a^n) + (\frac{1}{a^m} - \frac{1}{a^n})$$

$$= (a^m - a^n) + \frac{a^n - a^m}{a^m \cdot a^n}$$

$$= \frac{(a^m - a^n)(a^{m+n} - 1)}{a^{m+n}}$$

$$\because a > 0, \therefore a^{m+n} > 0.$$

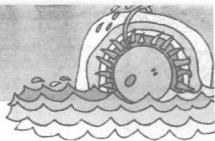
$$\text{① 当 } a > 1 \text{ 时, } \because m > n > 0, \therefore a^m > a^n, a^{m+n} > a^0 = 1.$$

$$\therefore A - B > 0, \text{ 即 } A > B.$$

$$\text{② 当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } \therefore a^m < a^n,$$

$$a^{m+n} < a^0 = 1,$$

$$\therefore \text{ 仍有 } A - B > 0, \text{ 即有 } A > B$$



综上所述,只要  $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ , 都有  $A > B$ .

**点评:** 由于指数函数  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的单调性随  $a$  改变而改变, 故必须分  $a > 1$  及  $0 < a < 1$  两种情况来讨论. 一般来说, 结果会随  $a$  的不同而不同, 但本题的巧合是因为  $(a^m - a^n)$  与  $(a^{m+n} - 1)$  始终同号.

**例5** 已知  $-\frac{1}{2} < a < 0, A = 1 + a^2, B = 1 - a^2, C = \frac{1}{1+a}, D = \frac{1}{1-a}$ . 试将  $A, B, C, D$  按从大到小的顺序排列.

**分析** 要比较大小的几个数都已用  $a$  表示, 题目中又给出了  $a$  的取值范围, 不妨从中取一个值, 看一看相应的  $A, B, C, D$  值的大小, 然后用比较法证明即可.

**解析** 因为  $-\frac{1}{2} < a < 0$ , 不妨取  $a = -\frac{1}{4}$ ,

$$\text{则 } A = \frac{17}{16}, B = \frac{15}{16}, C = \frac{4}{3}, D = \frac{4}{5}$$

由此猜想:  $D < B < A < C$

只需证明  $C - A > 0, A - B > 0, B - D > 0$  即可.

$$\begin{aligned} \therefore B - D &= (1 - a^2) - \frac{1}{1 - a} = \frac{a^3 - a^2 - a}{1 - a} \\ &= \frac{a[(a - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}]}{1 - a} \end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < a < 0, \therefore 1 - a > 0,$$

$$\text{又 } -1 < a - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{4} < (a - \frac{1}{2})^2 < 1,$$

$$\text{故 } (a - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} < 0,$$

$$\therefore \frac{a[(a - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}]}{1 - a} > 0, \therefore B > D.$$

$$A - B = (1 + a^2) - (1 - a^2) = 2a^2 > 0,$$

$$\therefore A > B$$

$$C - A = \frac{1}{1+a} - (1+a^2)$$

$$= \frac{-a(a^2 + a + 1)}{1+a}$$

$$= \frac{-a[(a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]}{1+a}$$

$$\because 1+a > 0, -a > 0, (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

$$\therefore \frac{-a[(a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]}{1+a} > 0, \therefore C > A.$$

综上可得  $A, B, C, D$  四个数的大小顺序是:  $C > A > B > D$ .

 点评:该题是一道开放题. 为了探索一个解题的方向,我们用了赋值法,即给问题中字母以一个或一组特殊的数值(允许范围内的值),使抽象的数学式子具体化,要解决的问题明朗化. 赋值法是解选择题、开放题、应用题等的常用方法.

### 3. 求代数式的范围

**例 6** 已知  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ , 求  $\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}$  的取值范围.

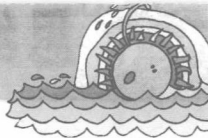
**分析** 这类问题是学习三角函数内容时经常遇到的,由于当时所学内容所限,往往容易出错. 这里我们在已知的基础上,运用不等式的基本性质得出所要的结果.

**解析**  $\because -\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2},$

$$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} < \frac{\beta}{2} \leq \frac{\pi}{4}.$$

上面两式相加得:  $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}.$

$$\therefore -\frac{\pi}{4} < \frac{\beta}{2} \leq \frac{\pi}{4}, \therefore -\frac{\pi}{4} \leq -\frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{4},$$



$$\therefore -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\alpha - \beta}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{又知 } \alpha < \beta, \therefore \frac{\alpha - \beta}{2} < 0.$$

$$\text{故 } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\alpha - \beta}{2} < 0.$$

点评:求含字母的数(式)的取值范围,一是要注意题设中的条件,充分利用条件,否则易出错.本例中如果忽略了  $\alpha < \beta$ ,则  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  的范围就求不出正确的结果.二是变换过程中要注意准确利用不等式的基本性质以及其他与题目有关的性质等.

**例7** 已知  $f(x) = ax^2 + b (a \neq 0)$ , 且  $1 \leq f(0) \leq 2, 2 \leq f(2) \leq 3$ , 试求  $f(3)$  的范围.

解 依题意  $f(0) = b, f(2) = 4a + b, f(3) = 9a + b$ .

$$\therefore f(3) = \frac{9}{4}f(2) - \frac{5}{4}f(0)$$

$$\text{又 } 1 \leq f(0) \leq 2, 2 \leq f(2) \leq 3,$$

$$\therefore \frac{9}{2} \leq \frac{9}{4}f(2) \leq \frac{27}{4}, -\frac{5}{2} \leq -\frac{5}{4}f(0) \leq -\frac{5}{4}.$$

$$\text{从而 } 2 \leq f(3) \leq \frac{11}{2}$$

点评:本题一定要将  $f(0)$  与  $f(2)$  视作整体考虑,将  $f(3)$  用  $f(0)$  和  $f(2)$  线性表示后再求范围.

#### 四、高考链接

高考对这部分内容的要求是“理解”与“掌握”.

**例8** (1)(2004北京·春理) 已知三个不等式:  $ab > 0, bc - ad >$