国家特色专业建设项目资助

基于几类风险模型的破产理论研究

IYU JILEI FENGXIAN MOXING DE POCHAN LILUN YANJIU

韦 晓/著

经济科学出版社
Economic Science Press

国家特色专业建设项目

教育部留学回国人员科研启动基金共同资助

基于几类风险模型的破产理论研究

韦　晓/著

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

基于几类风险模型的破产理论研究/韦晓著. —北京：经济科学出版社，2013. 1
ISBN 978 - 7 - 5141 - 0642 - 8

Ⅰ. ①基…　Ⅱ. ①韦…　Ⅲ. ①保险公司 - 风险管理 - 研究　Ⅳ. ①F840. 32

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 076583 号

责任编辑：杜　鹏
责任校对：徐领弟　刘　昕
版式设计：代小卫
技术编辑：邱　天

基于几类风险模型的破产理论研究
韦　晓/著
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www. esp. com. cn
电子邮件：esp@ esp. com. cn
北京中科印刷有限公司印装
880 × 1230　32 开　3. 375 印张　100000 字
2013 年 1 月第 1 版　2013 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 5141 - 0642 - 8　定价：15. 00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

本书主要致力于风险理论中两个问题的研究：重尾索赔风险模型的破产概率的渐近、预警区的特征估计。

破产概率是保险精算中的重要课题之一，其为保费厘定、准备金的提留以及再保险计划的制定提供了直接的参考指标，对它的研究从20世纪初Lundberg和Cramér等人的研究开始至今仍非常活跃。对于轻尾索赔额的风险模型，可以得到有限时间破产概率的渐近，也就是著名的Cramér-Lundberg渐近。但是，这一结果是基于索赔额是轻尾的前提下得到的，在非寿险实务尤其是在伴随着巨额索赔的风险中，这一假设往往是不满足的。近年来，人们提出了用重尾随机变量来描述索赔额，对于这种重尾索赔风险模型的有限时间破产概率的研究方兴未艾。1997年Klüpplberg和Mikosch给出了重尾索赔的经典风险模型破产概率的渐近。国内学者苏淳、唐启鹤等也对这一问题进行了研究。同时，随着风险理论的发展，人们提出了一些更切合实际的模型，以便能更好地反映出经济环境的变化情况、更准确地把握保险者的收支情况。本书第二部分将针对这几种新兴重尾索赔的风险模型的情形来讨论有限时间破产概率的渐近问题。首先，从描述索赔总量过程的随机变量和的偏差性质入手，将偏差理论应用于风险模型破产概率的渐近研究中；其次，讨论连续时间的变保费率的扰动风险模型的破产概率的渐近和上下界估计，对于离散时间风险模型，本书中将考虑两类变利率的风险模

型，并比较这两类模型的破产概率的一致渐近；最后，对于随机利率的风险模型，将研究轻尾索赔额下的破产概率的上下界以及重尾索赔额下的破产概率的渐近估计。

当保险公司的盈余出现负值时，我们把它称为破产，但这并不意味着保险公司面临真正破产，只是保险公司可能面临暂时的财务危机。这时保险者除了关心财务出现危机的可能性大小即破产概率之外，还会更关心保险公司要经过多长时间才能扭亏为盈，我们把扭亏为盈的时间称为预警区。因此，对预警区问题的研究也是同样重要的。1993 年 Reis 得到预警区的矩母函数，进而得到预警区的均值和方差等矩；1996 年 Reis 和 Dickson 又得到了预警区的分布函数。他们对于预警区问题的研究都只考虑了经典风险模型。本书中将讨论索赔次数相关的风险模型。索赔次数相关的风险模型综合考虑了同一次事故中的两个险种同时收到理赔的情况，在保险实务中，汽车综合险里这种情况是比较常见的。同一次车祸事故中，可能人身健康和汽车财产遭受的损失是相关但又不完全相同的，符合索赔相关的风险模型。因此，研究索赔相关的风险模型是非常有意义的。由于利率是影响保险公司盈利的一个重要因素，本书中将考虑带利率的风险模型的预警区问题，并首次提出了利用盈余过程的马氏性来得到预警区矩母函数的方法，通过比较模型退化为经典风险模型下的结果和 1993 年 Reis 的结果，发现本书中的方法与鞅方法得到的结果完全一致，但比鞅方法有更广的适用范围。

本书内容主要由三大部分构成。

第一部分是全书的一个简介和引言，主要介绍本书的写作背景和全书的知识结构，以及一些必备的准备知识。这一部分内容大部分是在已有研究成果基础上整理总结形成的，而后两部分主要介绍笔者在读博士阶段的研究成果。

在第二部分中，先回顾近年来人们得到的关于有限时间破产概

率的结果，然后在以往对重尾索赔额的复合 Poisson 模型研究的基础上，将其结果推广到重尾索赔额的变保费率复合 Poisson 扰动风险模型。同时，还研究了离散时间带利率风险模型，将常利率重尾索赔额的结果推广到变利率重尾索赔额的情形，并且考虑保险公司在年前和年末收保费的两种不同情况。最后，考虑利率为随机变量的更一般的情形，并给出重尾索赔额情形的有限时间破产概率的渐近结果，而且将这一结果推广到用两列随机变量表示的更一般的重尾索赔额风险模型中去。实际上，研究结果表明，很多重尾索赔额的风险模型的有限时间的渐近结果是完全不同于轻尾索赔额情形的。

在第三部分中，先回顾 Gerber、Reis 等人处理经典风险模型的预警区矩问题的方法：先造关于盈余过程的一个合适的鞅，从而得到盈余首达某水平的时刻（即首达时）的矩母函数，然后再有盈余过程的平稳增量性利用首达时刻的矩母函数和破产时的赤字分布来得到预警区的矩母函数和预警区的矩。然后将此方法应用于处理索赔次数相关的风险模型的预警区矩问题。注意到索赔相关的风险模型的盈余过程同样具有平稳增量性，上述的鞅方法也适用于这种模型。但是，Gerber、Reis 等人处理经典风险模型的预警区矩问题的方法也有一定的局限性，该方法只能应用于盈余过程具备鞅性的风险模型，对于考虑了利率因素的风险模型，在经典方法不能处理时，本书中提出了新的解决方法来获得该模型的预警区的特征表达式，而且应用这种新的方法于其他的风险模型，在简单风险模型下得到的结果和经典方法吻合。

需要指出的是，本书是由中央财经大学保险学院“国家特色专业建设项目”资助出版的，同时也是笔者在法国国家信息与自动化研究院从事博士后研究回国之后由国家教育部留学回国人员科研启动基金支持的阶段性研究成果。

本书的出版首先要感谢中央财经大学保险学院院长郝演苏教授，没有他的大力支持和鼓励，本书是不可能与读者见面的。同时，我也深深感谢我的博士导师武汉大学数学与统计学院概率统计系主任胡亦钧教授，正是在他的悉心指导下，我才开始进入保险风险模型的研究领域，并对该领域相关问题的研究产生了浓厚的兴趣。

虽已尽本人能力，力求本书观点推导的准确，但书中或仍难免出现谬误，欢迎各位读者批评指正。

韦　晓

2012年11月于北京

目　　录

第一部分　背景和预备知识

第二部分　重尾索赔风险模型的破产概率

第三部分　风险模型的预警区问题

第一部分

背景和预备知识

第一章 研究背景及主要内容

§1.1 研究意义

用数学模型从动态的角度来描述保险人资产负债比，建立关于保费收入、投资收入、索赔支出、费用开销等可能影响保险人现金流的因素的风险模型，能反映出保险人财务的总体变化趋势以及保险人长期面临的风险，从而为保险人长期的财务安排、偿付能力的评估及风险管理提供一定的理论指导。特别当保险人的盈余出现了负值，这时可以形象但有点夸张地说，保险人发生了破产，虽然这并不意味着保险人的真正倒闭，但是，在风险模型中对这种破产事件的研究无疑是非常有意义的，破产事件发生的概率是保险人考虑财务预警系统以及对保险监管部门设计某些监管指标系统等问题的重要参考指标。

近期发展起来的关于推广风险模型的研究延续和拓宽了经典破产理论。关于经典风险模型（复合泊松模型）破产概率的研究始于 20 世纪初的瑞典，从 20 世纪初 Lundberg 和 Cramér 的研究开始至今已有将近一个世纪的历史，其理论方法和结果仍被应用，成为一个古老而又有活力的课题。在漫长的研究历史中形成的丰富研究成果，为保险业的发展提供了理论基础和技术支持。随着时间的推移和经济的发展，经济环境越来越复杂，投资收益在保险人财务中的重要性也日益突出，仅仅考虑常保费率收入和索赔支出的经典风险模型已不能满足保险人对风险模型精确度的要求，在经典风险模型中引入利率因子（在此，投资收益被看做一种利率收益，本书中将沿用利率的说法）、变保费率因子、环境扰动因素或其他因素的推广风险模型也就应运而生。尽管引入了更多其他因素后，风险模型变得更加复杂，在技术上的处理更加困难，但是其更能反映市场的真实情况，因此，这些推广风险模型是经典风险模型的一种改进，关于这些风险模型的破产概率的研究，既在理论上推广了破产理论技术，又在实践中具有更广阔的应用空间。

重尾索赔的风险模型作为破产理论新兴的一个分支，丰富和完善了经典

破产理论。经典风险模型一般用轻尾随机变量描述索赔额，在破产概率的研究中往往就把索赔额为较大值的情况给忽略了，但是，在对非寿险索赔的观察中，人们发现“占总索赔次数 20% 的那些损失事件导致的损失额之和达到了全部损失事件损失总额的 80%，甚至比 80% 更多”，正是这些出现频率较低但索赔额很高的极端情况恰恰最有可能导致保险人的破产。重尾随机变量很好地描述了索赔额的极端性质，在重尾风险模型下获得的破产概率更能突出极端索赔对保险人的影响。

除了关于破产概率的研究，破产理论还包括了关于预警区问题的研究。预警区描述了盈余小于零发生所谓“破产”之后到保险人扭亏为盈的这段时间的财务变化情况，这将有助于保险人调整财务安排以应对这种并非真正意义上破产的暂时的财务危机，并为保险人在所谓“破产”之后的经营决策提供参考指标。关于经典风险模型的预警区问题的研究也同样可以像破产概率的研究一样延续拓宽到更多的推广风险模型中来。在各种风险模型下，为在所谓“破产”之后保险人的财务安排和经营决策提供理论指导。

综上所述，本书希望通过几种推广风险模型的破产概率和预警区问题的研究来对经典破产理论的一些问题进行补充和丰富，以使破产理论在实务中发挥更大的作用。

§1.2 国内外研究现状综述

关于经典风险模型破产概率的研究始于 1926 年 Lundberg 和 1930 年 Cramér 的工作，他们得到了关于破产概率的著名的 Cramér-Lundberg 渐近、Lundberg 不等式以及破产概率的微积分方程等结果。随后一些学者将他们的方法应用于一些推广风险模型，如 Wei 和 Wu (2004) 考虑变保费率 Cox 风险模型的破产概率的 Lundberg 不等式，Cai (2004) 得到关于带利率风险模型的破产概率的微积分方程等，使得经典破产理论得到了推广和延续。

然而关于破产概率的 Cramér-Lundberg 渐近、Lundberg 不等式是在轻尾

索赔的情况下得到的，在重尾索赔情况下，由于索赔额的矩母函数不存在，使得 Lundberg 和 Cramér 的经典方法不能适用于重尾索赔风险模型。关于重尾索赔风险模型的破产概率，人们借助于概率极限理论中的精细大偏差得到了突破。Nagaev(1969)、Heyde(1967,1968) 和 Nagaev(1973,1979) 等人首先形成了关于随机变量的部分和的精细大偏差理论。Klüppelberg（1997）进一步研究了随机变量的随机和的精细大偏差，Su 等人（2001）的研究释放了 Klüppelberg（1997）研究中苛刻的假设条件也得到了随机变量的随机和的精细大偏差，Tang 等人（2001）讨论了关于复合更新风险模型的精细大偏差结果。本书将在第二部分通过精细大偏差理论来得到一些推广的重尾索赔风险模型的破产概率的相关结果。

关于本书中相关的推广风险模型，在很多文献中都有研究。1970 年 Gerber 在经典风险模型上添加了布朗运动，首次在风险模型中引入了市场对保险人资产的扰动项，此后，很多学者都针对该模型进行了广泛的研究，如 Dufresne 和 Gerber (1991), Schlegel (1998),Wang 和 Wu (2000), Schmidli (2001) 和 Tsai (2001) 等。关于扰动模型的较详细的论述，可参见 Rolski et al. (1999)；关于带利率的风险模型，Sundt 和 Teugels（1995）研究了该模型的破产概率的上界估计，其工作被视为带利率风险模型研究的经典方法，其后 Yang(1999) 通过鞅方法推导了 Lundberg 指数上界和非指数上界，Yang 和 Zhang（2001a, b）分别给出了该模型的破产函数的微积分方程和破产概率的 Cramér-Lundberg 型渐近；关于离散时间风险模型，Jiang 和 Tang（2003）研究了带常数利率的离散时间风险模型，并得到了该模型破产概率的渐近。

关于预警区问题的研究历史并不像破产概率的那样悠久，因此，相关的结果也不像破产概率的那样丰富。1993 年 Reis 得到了经典风险模型下的预警区的矩母函数，Reis 和 Dickson（1996）进一步得到经典风险模型下预警区的分布函数。由于这些研究预警区的方法依赖于经典风险模型的鞅性，因此，很难应用于其他不具有鞅性的推广风险模型。本书中首次提出了不依赖于风险模型鞅性的研究方法，以在一些推广风险模型如带利率风险模型下研究其预警区问题。

§1.3 主要内容

本书主要在一些推广风险模型下讨论破产理论中两个问题即重尾索赔风险模型的破产概率的渐近和预警区的特征估计。

在本书第二部分我们主要讨论重尾索赔风险模型的破产概率的渐近。首先，我们回顾重尾随机变量的相关概念和一些经典的精细大偏差结果；其次，在负相协的重尾索赔风险模型下讨论其盈余过程的精细中偏差及其在估计破产概率上的应用；再次，我们在重尾索赔的变保费率扰动风险模型中，通过其盈余过程的精细大偏差得到其破产概率的渐近；最后，我们主要考虑离散时间带利率的风险模型，在常数列利率风险模型中讨论了其破产概率的渐近式，而在以随机变量列描述利率的风险模型中分别讨论了重尾索赔下的破产概率渐近和轻尾索赔下的破产概率的上界。

本书的第三部分是两种风险模型的预警区问题的研究。首先，考虑盈余过程含有两类索赔次数相关的风险模型，并将 Reis(1993) 的鞅方法推广到该模型，推导出单个预警区以及总预警区的矩母函数，从而得到预警区的数字特性；其次，针对不具备鞅性的带利率风险模型，首次提出了充分利用风险模型的马氏性的方法，得到预警区的矩母函数，并将所得结果在退化为经典风险模型的情形与 Reis(1993) 的结果作比较，通过研究表明这两种方法得到的结果一致，但是不依赖于风险模型鞅性的方法适用范围更广。

第二章　风险模型破产理论

§2.1　风险模型的简介

本书中所说的连续时间的风险模型在保险精算中被称为长期聚合风险模型，是一种从动态角度来描述保险人资产负债情况的数学模型，是用所谓的盈余过程来表示保险公司的资产减去负债的差额。假设 $A(t)$ 表示保险人在 t 时刻的资产，$D(t)$ 表示保险人在 t 时刻的负债，则保险人在 t 时刻所拥有的资产（即盈余，Surplus process）表示为：

$$U(t) = A(t) - D(t), \quad t > 0 \tag{2.1}$$

$t = 0$ 时刻的盈余被称为初始盈余或初始资本（即初始准备金，Initial reserve)，用常数 u 表示，即:

$$u := U(0)$$

在经典风险模型中，人们在资产来源中主要考虑保费收入，并将保费收入看做是随时间而线性增长的，而在支出部分中仅考虑索赔支出，用 $S(t)$ 表示从 0 到 t 时刻的总索赔，$N(t)$ 表示从 0 到 t 时刻的总索赔次数，随机变量列 $\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$ 表示每次索赔的额度，因此，经典风险模型的盈余过程表示为：

$$U(t) = u + ct - S(t) \tag{2.2}$$

我们将在此经典风险模型的基础上添加其他因子表示其他影响保险人收支的因素从而得到推广的风险模型，这些推广模型我们将在以后的章节中逐一介绍。

离散时间风险模型实际上是将连续时间模型的盈余过程变成离散时间，即将式 (2.2) 改写为：

$$U(n) = u + cn - S(n), n \in \mathbb{N}$$

从而可用递推的形式表示为：

$$U(n) = U(n-1) + X(n) \tag{2.3}$$

其中，$X(n) := c - [S(n) - S(n-1)]$ 为第 n 个时期内的净保费收入。本书在第 6 章、第 7 章中将在此离散时间风险模型的基础上引入利率因素，考虑带利率的离散时间风险模型。

§2.2 破产概率

破产概率是衡量保险者运营稳健性的一个重要指标。保险人在时间 $t = 0$ 时的资本为 u, 由于保险公司收取保费，其资金随时间递增，但每当有一个索赔发生时，保险人的资金过程就会突降。如果某一时刻由于大额的索赔导致该保险人的资金为负值时，我们便说破产发生了。破产概率的计算是精算学的一个经典问题，而对于具有重尾索赔的风险模型破产概率的研究更是当今精算学的一个热门课题。在本节中我们将讨论重尾索赔风险模型的破产概率问题。

从应用概率论的角度分别给出连续时间和离散时间风险模型的破产时间、有限时间破产概率（即破产发生在时刻 t 或 N 之前）和最终破产概率的数学定义。

对于盈余过程为 $U(t)$ 的连续时间风险模型，定义破产时间为：

$$T(u) := \inf\{t > 0; U(t) < 0\} \tag{2.4}$$

有限时间破产概率为：

$$\psi(u,t) := \mathbb{P}(T(u) < t | U(0) = u) \tag{2.5}$$

最终破产概率为：

$$\psi(u) := \mathbb{P}(T(u) < \infty | U(0) = u) \tag{2.6}$$