主　编●白淑敏
副主编●骆川义 马捷 徐风

经济类院校基础课程本科系列教材

概率论与数理统计教程习题解答

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI JIAOCHENG XITI JIEDA

西南财经大学出版社

经济类院校基础课程本科

概率论与数理统计教程习题解答

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI JIAOCHENG XITI JIEDA

主 编 白淑敏
副主编 骆川义 马捷 徐风

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程习题解答/白淑敏主编．—成都:西南财经大学出版社,2013.6

ISBN 978-7-5504-1054-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①白… Ⅲ.①概率论—高等学校—题解②数理统计—高等学校—题解 Ⅳ.①O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第120622号

概率论与数理统计教程习题解答

主　编:白淑敏

副主编:骆川义　马　捷　徐　风

责任编辑:李　雪

封面设计:杨红鹰

责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	9.5
字　　数	195千字
版　　次	2013年6月第1版
印　　次	2013年6月第1次印刷
印　　数	1—2000册
书　　号	ISBN 978-7-5504-1054-1
定　　价	19.80元

前 言

概率论与数理统计是财经类本科生必修的一门基础数学课程，也是财经类硕士研究生入学考试的一门必考科目。对于数学学习来说，解答习题是其中重要的环节之一，但对于很多初学概率论与数理统计的同学来说，这也恰恰是让他们感到很困难的事情，常常是感觉缺乏思路，难以下手，或者是不知如何表达清楚。为了帮助广大同学熟悉这门课程的解题规范，引导学生们学会思考、分析和表达，应很多读者的要求，我们将教材《概率论与数理统计教程》的课后习题全部评解出版，可供使用这本教材的读者参考，也可供准备报考财经类硕士研究生的考生和自学者使用。

对使用本书的同学，我们要强调的是：千万不能拿到题目就翻阅解答，一定要先对每道习题进行自己的独立思考，尽量争取自己独立完成解题过程。这样，才能在看到好的解答方法时，有大悟的感觉，也才能将之转化为自己的知识和能力。

由于水平所限，书中有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正，我们定将不断改进，并使之逐步完善。

作者

2013 年 4 月

目录

第1章 事件与概率

习题 1.1

1. 试判断下列试验是否为随机试验：

(1)在恒力的作用下一质点作匀加速运动；

(2)在 5 个同样的球(标号 1,2,3,4,5,)中,任意取一个,观察所取球的标号；

(3)在分析天平上称量一小包白糖,并记录称量结果.

解 (1)不是;(2) 是;(3) 是.

2. 写出下列试验的样本空间.

(1)将一枚硬币连掷三次；

(2)观察在时间 $[0,t]$ 内进入某一商店的顾客人数；

(3)将一颗骰子掷若干次,直至掷出的点数之和超过 2 为止；

(4)在单位圆内任取一点,记录它的坐标.

解 (1){(正,正,正),(正,正,反),(正,反,正),(正,反,反),(反,正,正),(反,正,反),(反,反,正),(反,反,反)};(2)$\{0,1,2,\cdots\}$;(3)$\{3,4,5,6,12,13,14,15,16,21,22,23,24,25,26,111,112,113,114,115,116\}$;(4)$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

3. 将一颗骰子连掷两次,观察其掷出的点数. 令 A ="两次掷出的点数相同",B = "点数之和为 10",C = "最小点数为 4". 试分别指出事件 A、B、C 以及 $A\cup B$、ABC、$A-C$、$C-A$、$B\overline{C}$ 各自含有的样本点.

解 $A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$; $B=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$; $C=\{(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)\}$;

$A\cup B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(4,6),(6,4)\}$; $ABC=\Phi$; $A-C=\{(1,1),(2,2),(3,3),(5,5),(6,6)\}$; $C-A=\{(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)\}$; $B-C=\{(4,6),(5,5)\}$.

4. 在一段时间内,某电话交换台接到呼唤的次数可能是 0 次,1 次,2 次,… 记事件 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 表示"接到的呼唤次数小于 k",试用 A_k 间的运算表示下列事件：

(1) 呼唤次数大于 2;

(2) 呼唤次数在 5 到 10 次范围内;

(3) 呼唤次数与 8 的偏差大于 2 .

解 (1)$\bar{A}_3$;(2)$\bar{A}_5A_{11}$;(3)$A_6\cup\bar{A}_{11}$.

5. 试用事件 A、B、C 及其运算关系式表示下列事件:

(1)A 发生而 B 不发生;

(2)A 不发生但 B、C 至少有一个发生;

(3)A、B、C 中只有一个发生;

(4) A、B、C 中至多有一个发生;

(5)A、B、C 中至少有两个发生;

(6)A、B、C 不同时发生 .

解 (1)$A\bar{B}$;(2)$A(B\cup C)$;(3)$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$;(4)$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;

(5)$AB\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup ABC$;(6)$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.

6. 在某大学金融学院的学生中任选一名学生 . 若事件 A 表示被选学生是女生,事件 B 表示该生是大学二年级学生,事件 C 表示该生是运动员 .

(1)叙述 $AB\bar{C}$ 的意义 .

(2)在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3)在什么条件下 $\bar{A}\subset B$ 成立?

解 (1)大二女生且不是运动员;(2)运动员全是大二女生;(3) 男生都是大二的.

7. 化简下列各事件:

(1) $(A-B)\cup A$;

(2)$(A-B)\cup B$;

(3)$(A-B)A$;

(4)$(A-B)B$;

(5)$(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})\cap(\bar{A}\cup A)$.

解 (1) $(A-B)\cup A=A$;(2)$(A-B)\cup B=A\cup B$;(3)$(A-B)A=A-B$;

(4)$(A-B)B=\varnothing$;(5)$(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})\cap(\bar{A}\cup A)=A$

8. 若 $AB=\bar{A}\bar{B}$,证明:A 与 B 互为逆事件.

证明 先证 $AB=\varnothing$,用反证法.

假设 $AB\neq\varnothing$,则有元素 $x\in AB$,从而 $x\in A$ 且 $x\in B$,则 $x\notin A$ 且 $x\notin B$;而因为 $AB=\bar{A}\bar{B}$,于是有 $x\in\bar{A}\bar{B}$,即 $x\in\bar{A}$ 且 $x\in\bar{B}$,矛盾出现,故 $AB=\varnothing$.

下证 $A\cup B=\Omega$.

由 $AB=\bar{A}\bar{B}$，可得 $AB=\overline{A\cup B}=\varnothing$，故有 $A\cup B=\bar{\varnothing}=\Omega$.

因有 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，所以 A 与 B 互为逆事件.

习题 1.2

1. 随机试验"抛一枚硬币三次"与"抛三枚硬币一次"一样吗?

$\Omega_1=\{$(正正正)，(反正正)，(正反正)，(正正反)，(正反反)，(反正反)，(反反正)，(反反反)$\}$此样本空间中的样本点是等可能发生的吗?

$\Omega_2=\{$(三正)，(二正一反)，(二反一正)，(三反)$\}$此样本空间中的样本点是等可能发生的吗?

解 随机试验"抛一枚硬币三次"与"抛三枚硬币一次"一样；

Ω_1 中的样本点是等可能发生的；

Ω_2 中的样本点不是等可能发生的.

2. 在一个足球场上有 23 个人(2×11 个运动员和 1 个主裁判员)，试求出在这 23 人当中至少有两个人的生日是在同一天的概率(会让你吃惊的).

解 设 $A=$"23 人当中至少有两个人的生日是在同一天"，则

$$P(A)=\frac{A_{365}^{23}}{365^{23}}$$

3. 设袋中有 4 只白球和 2 只黑球，现从袋中无放回地依次摸出 2 只球(即第一次取一球不放回袋中，第二次再从剩余的球中取一球，此种抽取方式称为无放回抽样，试求

(1) 取到的两只球都是白球的概率；

(2) 取到的两只球颜色相同的概率；

(3) 取到的两只球至少有一只是白球的概率.

解 记 $A=\{$取到的两只球都是白球$\}$，$B=\{$取到的两只球都是黑球$\}$，

$C=\{$取到的两只球中至少有一只是白球$\}$. $D=\{$取到的两只球颜色相同$\}$.

(1) 把 4 只白球编号为 1,2,3,4；将 2 只黑球编号为 5,6. 则

$$P(A)=\frac{A_4^2}{A_6^2}=\frac{4\times3}{6\times5}=\frac{2}{5}$$

(2) 类似于(1) 可求得

$$P(B)=\frac{2\times1}{6\times5}=\frac{1}{15}$$

由于 $AB=\varnothing$，所求概率为

$$P(D)=P(A)+P(B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$$

(3) 取到的两只球至少有一只是白球的概率为

$$P(B)=\frac{2\times1}{6\times5}=\frac{1}{15}$$

因为 $C=\bar{B}$，所以有

$$P(C)=P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

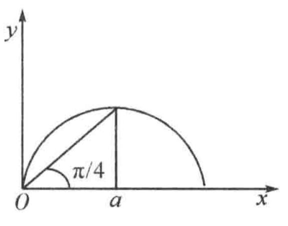
4. 设一个人的生日在星期几是等可能的,求 6 个人的生日都集中在一个星期中的某两天,但不是都在同一天的概率.

解 设 A =“生日集中在一星期中的某两天,但不在同一天”,则

$$P(A)=\frac{C_7^2(2^6-2)}{7^6}=0.011\ 07$$

5. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点,点落在园内任何区域的概率与区域的面积成正比,求原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率.

解 半圆域如图,设 A =“原点与该点连线与 x 轴夹角小于 $\pi/4$”

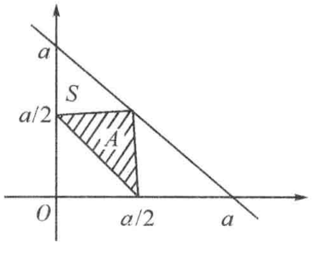


由几何概率的定义

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\text{半圆的面积}}=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

6. 把长为 a 的棒任意折成三段,求它们可以构成三角形的概率.

解 设 A =“三段可构成三角形”,又三段的长分别为 $x,y,a-x-y$,则 $0<x<a,0<y<a,0<x+y<a$,不等式构成平面区域 S.



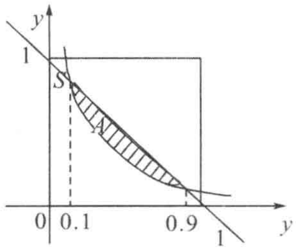
A 发生 $\Leftrightarrow 0<x<\frac{a}{2},\ 0<y<\frac{a}{2},\frac{a}{2}<x+y<a$

不等式确定 S 的子区域 A,所以

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}=\frac{1}{4}$$

7. 随机地取两个正数 x 和 y,这两个数中的每一个都不超过 1,试求 x 与 y 之和不超过 1,积不小于 0.09 的概率.

解 $0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1$,不等式确定平面区域 S.



设 $A=$“$x+y\leqslant 1, xy\geqslant 0.09$”，则

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}=\int_{0.1}^{0.9}\left(1-x-\frac{0.09}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=0.4-0.18\ln 3$$

*8. 随便说出 3 个正数，以这 3 个正数为边长可以围成一个钝角三角形的概率与 π 有关.

(1)求这个概率；

(2)设计一个随机试验，求 π 的近似值.

解 (1) 设这三个正数为 x,y,z，不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$，对于每一个确定的 z，样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x\leqslant y\leqslant z\}$$

事件

$A=\{$由 x,y,z 构成钝角三角形$\}=\{(x,y)\mid 0<x\leqslant y\leqslant z; x+y>z; x^2+y^2<z^2\}$

$$P(A)=\frac{M_A}{M_\Omega}=\frac{\pi z^2/8-z^2/4}{z^2/2}=\frac{\pi-2}{4}$$

因为对于每一个 z，这个概率都为 $\frac{\pi-2}{4}$，因此对于任意的正数 x,y,z，有 $P(A)=\frac{\pi-2}{4}$.

(2)为了估算 π 的值，我们需要通过实验来估计它的概率，这一过程可交由计算机编程来实现，随机产生三个正数 x,y,z，在此题中“$x+y>z; x^2+y^2<z^2$”等价于“$(x+y-z)(x^2+y^2-z^2)<0$”，因此只需检验这一个式子是否成立即可. 若进行了 m 次随机试验，有 n 次满足该式，当 m 足够大时，$P(A)=\frac{\pi-2}{4}\approx f_n(A)=\frac{n}{m}$，即可估计出 π 值.

习题 1.3

1. 设 A,B 为两事件，且设 $P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A\bar{B})$.

解
$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

由

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

所以 $P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(AB)$，于是

$$P(A\bar{B})=0.6-0.3=0.3$$

2. 设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$, 证明:$P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$.

证明
$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$
$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$
$$=1-[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB)]=P(AB)$$

3. $AB=\varnothing$,$P(A)=0.6$, $P(A\cup B)=0.8$,求 B 的逆事件的概率.

解 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)$

得
$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.8-0.6=0.2$$

所以
$$P(\bar{B})=1-0.2=0.8$$

4. $P(A)=0.4$,$P(B)=0.3$,$P(A\cup B)=0.6$, 求 $P(A-B)$.

解 因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$,所以先求 $P(AB)$

由加法公式得
$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$
$$=0.4+0.3-0.6=0.1$$

所以
$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$$

5. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$,求 A,B,C 都不出现的概率.

解 所求为

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A\cup B\cup C)$$
$$=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$
$$=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-0=\frac{7}{12}$$

6. 设 A, B 满足 $P(A)=0.8$, $P(B)=0.7$, 求 $P(AB)$ 的最大(小)值.

解 由
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

得
$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1=0.5$$

即 $P(AB)$的最小值为 0.5. 又因为
$$P(AB)\leqslant P(A),且 P(AB)\leqslant P(B)$$

则 $P(AB)\leqslant\min\{P(A),P(B)\}=\min\{0.8,0.7\}=0.7$,即 $P(AB)$的最大值为 0.7.

7. 设A，B同时发生时，C必然发生，证明$P(C) \geqslant P(A)+P(B)-1$.

证明 由题设，知$AB \subset C$，则有$P(AB) \leqslant P(C)$，从而

$$P(C) \geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)$$
$$\geqslant P(A)+P(B)-1$$

8. 在1 ~2000的整数中随机地取一个数，问取到的整数既不能被6整除，又不能被8整除的概率是多少？

解 设A ="取到的数能被6整除"，B ="取到的数能被8整除"，则所求概率为

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A \cup B})=1-P(A \cup B)=1-\{P(A)+P(B)-P(AB)\}$.

因 $P(A)=\dfrac{333}{2000}$，$P(B)=\dfrac{250}{2000}$，$P(AB)=\dfrac{83}{2000}$，故

$P(\bar{A}\bar{B})=1-\{P(A)+P(B)-P(AB)\}=1-\left(\dfrac{333}{2000}+\dfrac{250}{2000}-\dfrac{83}{2000}\right)=\dfrac{3}{4}$

9. 口袋中有$n-1$个黑球、1个白球，每次从口袋中随机地摸出一球，并换入一只黑球. 求第k次取到黑球的概率.

解 记A为"第k次取到黑球"，则A的对立事件为

"第k次取到白球"，而"第k次取到白球"意味着"第1次……第$k-1$次取到黑球，而第k次取到白球"

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$$

10. 甲掷硬币$n+1$次，乙掷n次，求甲掷出的正面数比乙掷出的正面数多的概率.

解 设x为甲掷出的正面数，y为乙掷出的正面数，则甲和乙指出的反面数分别为$n+1-x$和$n-y$，根据硬币正反面的对称性，有

$$P\{x>y\}=P\{n+1-x>n-y\}$$

即

$$P\{x>y\}=P\{x<y+1\}$$

另一方面，由概率的性质，可得

$$P\{x>y\}=1-P\{x<y+1\}$$

于是得

$$P\{x<y+1\}=1-P\{x<y+1\} \Rightarrow P\{x<y+1\}=\frac{1}{2}$$

故所求概率为

$$P\{x>y\}=\frac{1}{2}$$

习题 1.4

1. 一盒子中装有 4 只产品,其中有 3 只是一等品,1 只是二等品. 从中取产品两次,每次任取一只,作不放回抽样,设事件 A 为“第二次取到的是一等品”,事件 B 为“第一次取到的是一等品”,试求条件概率 $P(A|B)$.

解 将产品编号:1,2,3 号为一等品,4 号为二等品. 以 (i,j) 表示第一次、第二次分别取到第 i 号、第 j 号产品. 试验 E(取产品两次,记录其号码)的样本空间为

$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$,

$B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$,

$AB=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$.

由条件概率公式得,

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{6}{12}}{\frac{9}{12}}=\frac{2}{3}$$

2. 一个家庭中有两个小孩,已知其中有一个是女孩,问这时另一个小孩也是女孩的概率?(假定一个小孩是女孩还是男孩是等可能的)

解 据题意样本空间为 $\Omega=\{$(男,女),(男,男),(女,女),(女,男)$\}$,设

$B=\{$至少有一个是女孩$\}=\{$(男,女),(女,女),(女,男)$\}$,

$A=\{$另一个小孩也是女孩$\}=\{$(女,女)$\}$,显然 $A\subset B$,则 $AB=A$,于是,所求概率为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$$

3. 设某光学仪器厂制造的透镜,第一次落下时打破的概率为 1/2,若第一次落下时未打破,第二次落下时打破的概率为 7/10,若前两次时未打破,第三次落下时打破的概率为 9/10,试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 以 $A_i, i=1,2,3$ 表示事件“透镜第 i 次落下时打破”,以 B 表示事件“透镜三次落下而未打破”. 因为 $B=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$,故有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}31)\\&=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)\\&=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{9}{10})=\frac{3}{200}\end{aligned}$$

4. 一批产品共 100 件,对其进行抽样调查,整批产品看作不合格的规定是:在被检查

的5件产品中至少有一件是废品. 如果在该批产品中有5%是废品,试问该批产品被拒绝接收的概率是多少?

解 设 $A_k, k=1,2,3,4,5$ 表示被检查的第 k 件产品是正品. A 表示该批产品被接收. 则 $A=A_1A_2A_3A_4A_5$,且

$$P(A_1)=\frac{95}{100},P(A_2|A_1)=\frac{94}{99},P(A_3|A_1A_2)=\frac{93}{98},P(A_4|A_1A_2A_3)=\frac{92}{97}$$

$$P(A_5|A_1A_2A_3A_4)=\frac{91}{96}$$

故

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\&=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)P(A_5|A_1A_2A_3A_4)\\&=\frac{95}{100}\times\frac{94}{99}\times\frac{93}{98}\times\frac{92}{97}\times\frac{91}{96}=0.77\end{aligned}$$

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.77=0.23$$

因此,该批产品被拒绝接收的概率是0.23.

5. 1号箱中有2个白球和4个红球,2号箱中有5个白球和3个红球,现随机地从1号箱中取出一球放入2号箱,然后从2号箱随机取出一球,问从2号箱取出的红球的概率是多少?

解 令 A:从1号箱中取出的是红球; B:从2号箱取出的是红球. 则

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},P(\bar{A})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

且 $P(B|A)=\frac{4}{9},P(B|\bar{A})=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. 故由全概率公式,有

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{27}$$

6. 甲、乙、丙三人向同一飞机射击. 设甲、乙、丙射中的概率分别为0.4,0.5,0.7. 又设若只有一人射中,飞机坠落的概率为0.2,若有二人射中,飞机坠落的概率为0.6,若有三人射中,飞机必坠落. 求飞机坠落的概率.

解 记 $A=\{$飞机坠落$\}$,$B_i=\{i$ 个人射中飞机$\}$,$i=1,2,3$,

$B_1=$(甲射中,乙丙未射中)+(乙射中,甲丙未射中)+(丙射中,甲乙未射中),则

$$P(B_1)=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$$

同理

$$P(B_2)=0.6\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.3=0.41$$

$$P(B_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

再由题设

$$P(A|B_1)=0.2, P(A|B_2)=0.6, P(A|B_3)=1.$$

利用全概率公式

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A \mid B_i) = 0.36 \times 0.2 + 0.41 \times 0.6 + 0.14 \times 1 = 0.458$$

7. 播种用的小麦种子混有2%的二等种子,1.5%的三等种子,1%的四等种子,用一等、二等、三等、四等种子长出的麦穗含有50颗麦粒以上的概率为0.5,0.15,0.1,0.05,求

(1)这批所结出的麦穗含有50颗麦粒以上的概率;

(2)由这批所结出的含有50颗麦粒以上麦穗中是一等、二等种子长出的概率.

解 设 $B_k=\{$从这批种子任选一颗种子是 k 等种子$\}$,$k=1,2,3,4$,

$A=\{$从这批种子任选一颗,所结出的麦穗含有50颗麦粒以上$\}$.

则

$$P(B_2)=0.02, P(B_3)=0.015,$$

$$P(B_4)=0.01, P(B_1)=1-0.02-0.015-0.01=0.955,$$

$$P(A|B_1)=0.5, P(A|B_2)=0.15, P(A|B_3)=0.1, P(A|B_4)=0.05$$

由全概率公式

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i) \\ &=0.955\times0.5+0.02\times0.15+0.015\times0.1+0.01\times0.05 \\ &=0.4825 \end{aligned}$$

$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.955\times0.5}{0.4825}=0.9881$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.02\times0.15}{0.4825}=0.006$$

8. 目前艾滋病在世界上比较严重,粗略估计大概每1000人中就有一人得艾滋病. 医院采用一种新的检测法用于检测身体中是否含有艾滋病病毒,这种方法相当精确,但也可能带来两种误诊. 首先,它可能会让某些真有艾滋病的人得到阴性结果,称为假阴性,不过只有0.05的概率发生;其次,它还可能让某些没有艾滋病的人得到阳性结果,称为假阳性,不过只有0.01的概率会发生. 一人的艾滋病检测结果呈阳性,问他得艾滋病的概率有多大?

解 记 $A=$"被检测人带有艾滋病病毒"; $T=$"检测结果呈阳性". 由条件知:

$P(A)=0.001, P(\bar{T}|A)=0.05, P(T|\bar{A})=0.01$,则

$$\begin{aligned} P(A|T) &=\frac{P(AT)}{P(T)}=\frac{P(A)P(T|A)}{P(A)P(T|A)+P(\bar{A})P(T|\bar{A})} \\ &=\frac{0.001\times(1-0.05)}{0.001\times(1-0.05)+(1-0.001)\times0.01}=0.087. \end{aligned}$$

9. 已知某工厂生产的产品的合格率为0.96，而合格品中的一级品率为0.75. 求该厂产品的一级品率.

解 设 A 表示"产品是一级品"，B 表示"产品是合格品"，则有 $A\subset B$，故而 $A=AB$. 依题设，$P(B)=0.96$，$P(A|B)=0.75$. 于是

$$P(A)=P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=0.96\times 0.75=0.72$$

10. 一批零件共有100个，其中10个不合格品. 从中一个一个不返回取出，求第三次才取出不合格品的概率.

解 A_i="第 i 次取出的是不合格品"；$(i=1,2,3)$，则所求为 $P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$ 用乘法公式

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{90}{100}\times\frac{89}{99}\times\frac{10}{98}$$

11. 一座别墅在过去的20年里一共发生过2次被盗，别墅的主人有一条狗，狗平均每周晚上叫3次，在盗贼入侵时狗叫的概率被估计为0.9，问题是：在狗叫的时候发生入侵的概率是多少？

解 我们假设 A 事件为狗在晚上叫，B 为盗贼入侵，则

$$P(A)=\frac{3}{7},P(B)=\frac{2}{20\times 365}=\frac{2}{7300},P(A|B)=0.9$$

按照公式很容易得出结果：

$$P(B|A)=0.9\times\frac{2}{7300}\times\frac{7}{3}=0.000\,58$$

*12. 某厂生产的产品次品率为0.1%，但是没有适当的仪器进行检验，有人声称发明一种仪器可以用来检验，误判的概率仅为5%. 试问厂长能否采用该人所发明的仪器？

解 "5%的误判率"给检验带来怎样的可信度，这是厂长决策的依据，即 弄清"被检验出的正(或次)品中实际正(或次)品率".

设事件 A 表示"客观的次品"，事件 B 表示"经检验判为次品的产品"，由题意知：

$$P(A)=0.001,P(\bar{A})=0.999,\ P(B|A)=0.95,\ P(B|\bar{A})=0.05$$

由贝叶斯公式可计算"被检验出的次品中实际次品率"为：

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{0.001\times 0.95}{0.001\times 0.95+0.999\times 0.05}=0.018\,664$$

同理，"被检验出的正品中实际正品率"为：

$$P(\bar{A}|\bar{B})=0.999\,947$$

对"被认定次品"的产品进行第一次复查，此时 $P(A)=0.0186\,64$，则