公共基础课教材

主 编◎张治俊

新编 高等数学

XINBIAN GAODENG SHUXUE

下

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -ctgx + C$$

$$\int \sec x \cdot tgx dx = \sec x + C$$

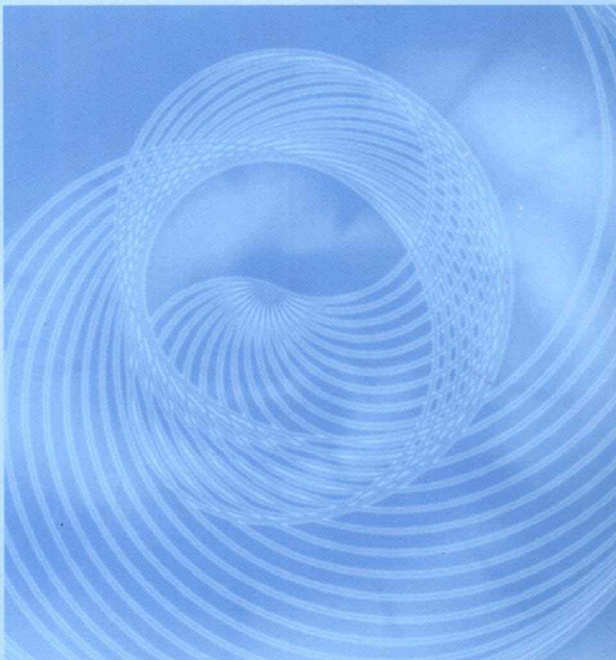
$$\int \csc x \cdot ctgx dx = -\csc x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int shx dx = chx + C$$

$$\int chx dx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

新编高等数学（下）

主　编　张治俊　甘肃畜牧职业学院
杨厚平　湖南科技工业职业技术学院
蒋百华　辽宁工程职业学院
耿玉霞　沈阳师范大学职业技术学院
副主编　王拥军　大连工业大学职业技术学院
李志平　海南软件职业技术学院
邵立凤　大连工业大学职业技术学院
冯金顺　南阳理工学院教育学院
编　委　郭海防　西安工业大学北方信息工程学院
宋家乐　许昌学院
江　华　湖南科技工业职业技术学院

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

本教材根据教育部制定的相关文件，本着简明、基础、实用的原则，综合现阶段学生的学习特点及其他相关因素精心编写而成，适用于高等院校理工及经管类各专业的学生。本教材包括：函数与极限、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分与定积分应用、多元函数微分学、二重积分、微分方程、无穷级数、矩阵及其应用、概率统计基础。每节附有精心编制的课堂练习与作业题，每章有综合复习题，并附有参考答案，供师生参考。

通过本教材的学习，可以使学生掌握微积分、线性代数的基础知识、运算方法及应用，为学生学习后继课程和解决实际问题提供必不可少的数学基础知识及常用数学方法，培养运用所学知识分析解决问题的能力及创新意识和自学能力，进而实现发展学生智力，提升就业能力，完善人格修养的教育培养目标。

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学：全 2 册 / 张治俊编著. —北京：北京邮电大学出版社，2012.6

ISBN 978—7—5635—3055—7

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 092525 号

书　　名：新编高等数学(下)
作　　者：张治俊
责任编辑：毋燕燕
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010—62282185　传真：010—62283578
E—mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市平谷县早立印刷厂
开　　本：787mm×1 092mm　1/16
印　　张：12.625
字　　数：254 千字
印　　数：1—3 000 册
版　　次：2012 年 6 月第 1 版　2012 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978—7—5635—3055—7　　　　定　价：25.80

前言

高等数学是高等院校各专业必修的一门重要基础课程，对培养大学生的思维品质、创造能力、科学精神以及利用数学知识分析解决实际问题的能力，具有极其重要的作用。

本教材根据教育部制定的相关文件，本着简明、基础、实用的原则，综合现阶段学生的学习特点及其他相关因素精心编写而成，适用于高等院校理工及经管类各专业的学生。在编写中力求做到以下几点。

1. 以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，坚持以应用为目的，以“必需、够用”为度的原则，以提高学生的综合能力为指导思想，以培养高素质的技能型人才为根本任务。

2. 适当选材，由浅入深，循序渐进。不过于追求数学体系的逻辑性及理论的完整性，突出基本概念和定理的几何背景和实际应用背景的介绍；强调基本概念的理解，而不注重概念的抽象性；强调基本理论的实际应用，而不强调理论的证明技巧；强调基本计算方法的运用，而不追求运算的技巧。

3. 在每节开始部分引入知名数学家的格言警句，每章后有与本部分知识相关的数学家传记或数学史阅读材料，并恰当引入高等数学在现代科技领域中的应用。以丰富的数学史料为载体，贴近生活的数学应用为触角，结合相关案例的引入，尝试在高职数学课程中进行数学文化思想的渗透。

4. 叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性，便于自学；注重用语确切，行文严谨。有利于学生严谨的学习态度、良好的学习习惯、一定的数学修养的形成。

5. 具有精心制作的配套多媒体课件，方便老师上课及学生学习使用。

本教材包括：函数与极限、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分与定积分应用、多元函数微分学、二重积分、微分方程、无穷级数、矩阵及其应用和概率统计基础。每节附有精心编制的课堂练习与作业题，每章有综合复习题，并附有参考答案，供师生参考使用。

通过本教材的学习，可以使学生掌握微积分、线性代数和概率统计的基础知识、运算方法及应用。为学生学习后继课程和解决实际问题提供必不可少的数学基础知识及常用数学方法，培养运用所学知识分析解决问题的能力及创新意识和自学能力，进而实现发展学生智力，提升就业能力，完善人格修养的高职高专教育培养目标。

由于水平所限，时间也比较仓促，本书难免有不足错误之处，敬请读者斧正。

编　者

目　录

第6章　多元函数微分学

在自然科学和经济管理的许多问题中,往往会涉及到多方面的因素,反映在数学上就是一个函数往往依赖于多个自变量,这就需要研究多元函数.多元函数微分学也是一元函数微分学的推广和发展. 本章为多元函数微分学, 但着重讨论的是二元函数的微分学,因为只要把一元函数微分学推广到二元函数微分学,单和多的差异就已经显露出来了,就能进一步推广到多元函数微分学.

§6－1　多元函数及其极限

一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步．

——卡尔·海因里希·马克思

一、生活中的数学问题——如果姑妈请你吃饭

如果姑妈请你吃饭，但在一大桌子菜中，你只对以下四样感兴趣，且每样每吃一口，效用不断递减．如下表所示：

效用 顺序 菜名	第一口	第二口	第三口	第四口	第五口	第六口	第七口	第八口	第九口	第十口
龙虾	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
牛排	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
煎蛋	8	7	6	5	4	3	2	1	0	－1
泡菜	7	6	5	4	3	2	1	0	－1	－2

假如你不知“礼义廉耻”，只求自己效用最大，应当怎么吃呢？

若你的胃口很大，能够“一扫而光”，可得总效用 160．但是如果你不吃效用为负的那三口，总效用便会增加到 164．

若你的胃口不好，但能吃十口．如果全吃最喜欢的龙虾，吃十口的总效用是 55．但是，如果你按照每口的效用大小排序依次吃十口，则龙虾只吃四口，牛排吃三口，煎蛋吃两口，泡菜吃一口．当每样菜的效用都大于等于 7 时，总效用将最大，达到 80．

这个结论来自多元函数微分学的拉格朗日乘数法．

犹如一顿饭吃得如何往往取决于多样菜及其吃法一样，经济变量往往取决于多种因素，属于多元函数，要研究这种多元函数的变化规律及最优问题，就得学习多元函数微分学及其应用．

二、空间直角坐标系简介

过空间中的一个定点 O，作三条互相垂直的数轴 OX，OY，OZ，如图 6-1-1 所示．规定 O 为原点，并按下述方法规定三条数轴的方向：将右手伸直，拇指向上的方向为 OZ 轴的正向，其余四指的指向为 OX 轴的正向，四指弯曲 $90°$ 后的指向为 OY 轴的正向，这样建立

的空间直角坐标系称为右手系. 三条数轴分别称为 X 轴(横轴)、Y 轴(纵轴)、Z 轴(立轴). 三条坐标轴中的任意两条确定的平面称为坐标平面. X 轴和 Y 轴所确定的坐标面叫 XOY 坐标面. Y 轴和 Z 轴所确定的坐标面叫 YOZ 坐标面. Z 轴和 X 轴所确定的坐标面叫 ZOX 坐标面. 三个坐标面将直角坐标系空间分成八个部分, 每一部分叫空间直角坐标系的一个卦限. 如图 6-1-2 所示.

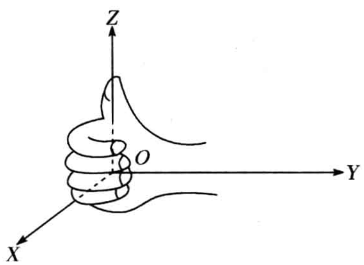


图 6-1-1

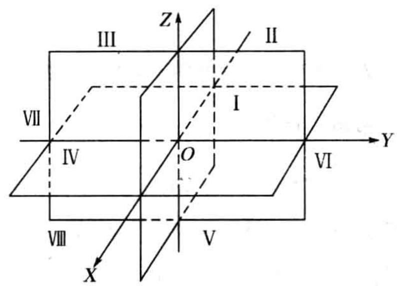


图 6-1-2

设 M 为空间直角坐标系内的一个已知点. 过 M 点分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂面. 垂足分别为 P,Q,R. P,Q,R 三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x,y,z, 则 M 点与有序数组 (x,y,z) 一一对应. 我们称有序数组 (x,y,z) 为 M 点的坐标. 其中, x 叫 M 点的横坐标, y 叫 M 点的纵坐标, z 叫 M 点的竖坐标. 点 M 的坐标则记作 $M(x,y,z)$, 如图 6-1-3 所示.

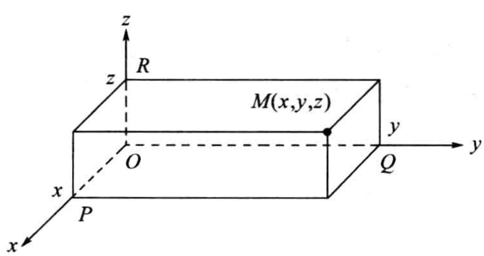


图 6-1-3

不难看出, 坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$, x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$, y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$, z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两个已知点. 可以证明这两点间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地, 空间任意一点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点的距离公式为:

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

三、邻域和区域

从平面解析几何的知识可以知道, 任意一个有序实数对 (x,y) 都对应着坐标平面上

的一个点 p；反之，坐标平面上的任意一个点 p，都对应着一个有序实数对 (x,y)，即所有的有序实数对 (x,y) 与坐标平面上的所有点一一对应，因此，一般对于有序实数对与坐标平面上的点不加区别，把有序实数对组成的集合也称为是"平面点集".

定义 6.1 以点 $p(a,b)$ 为圆心，以任意 $\delta>0$ 为半径的圆内的所有点 (x,y) 构成的集合，即

$$\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2\}$$

称为点 $p(a,b)$ 的 δ 邻域，记作 $U(p,\delta)$，或简记作 $U(p)$. $U(p,\delta)$ 中去掉点 p 称为点 p 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{o}{U}(p,\delta)$ 或 $\overset{o}{U}(p)$，即

$$\overset{o}{U}(p,\delta)=U(p,\delta)-p(a,b)=\{(x,y)\mid 0<(x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2\}.$$

定义 6.2 整个坐标平面或坐标平面上由几条曲线所围成的部分称为一个平面区域，简称区域，区域通常用大写字母 D、E 等表示. 围成平面区域的曲线称为区域的边界，包含边界的区域称为闭区域，不包含边界的区域称为开区域. 一个闭区域内任意两点间距离的最大值称为该区域的直径.

区域可以分为有界区域和无界区域. 一个区域 D 如果能包含在一个以原点为圆心的圆内，则区域 D 称为有界区域，否则称为无界区域.

四、多元函数及其基本概念

在许多实际问题中，常常会遇到多个变量之间的依赖关系.

如长为 x，宽为 y 的矩形，其面积 A 为

$$A=xy.$$

又如长方体的长、宽、高分别为 x,y,z 时，其体积 V 为

$$V=xyz.$$

定义 6.3 设某个变化过程中有 3 个变量 x,y,z，如果对于变量 x,y，在其变化范围 D 内所取的每一对数值 (x,y)，变量 z 按照某个对应法则 f，都有唯一确定的数值与之对应，则称 z 是 x,y 的二元函数，记作

$$z=f(x,y),$$

式中，x,y 称为自变量，z 称为因变量. 自变量 x,y 的变化范围 D 称为函数 $z=f(x,y)$ 的定义域. 与点 $p_0(x_0,y_0)$ 对应的 z 值，称为函数在点 p_0 处的函数值，记作 $f(p_0)$ 或 $f(x_0,y_0)$，即 $z=f(p_0)=f(x_0,y_0)$. 数集 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 的值域.

一般地，二元函数的定义域为使其表达式有意义的点的集合，且当二元函数描述实际问题时，其定义域还应使实际问题有意义.

类似地，还可以定义三元及三元以上的函数. 二元及二元以上的函数统称为多元

函数.

例 1 求二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域.

解 由 $1-x^2-y^2\geqslant 0$ 得 $x^2+y^2\leqslant 1$,则二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,如图 6-1-4 中的阴影部分(包含圆周)所示.

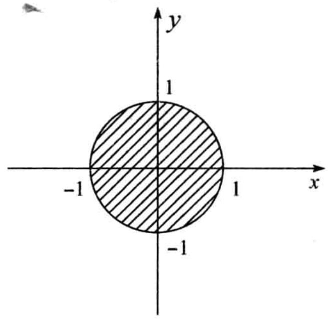


图 6-1-4

五、二元函数的极限

与一元函数类似,对于二元函数也可以讨论其变化趋势,下面给出二元函数的极限的定义.

定义 6.4 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 的某个去心邻域 $\overset{o}{U}(p_0)$ 内有定义,如果点 $P(x,y)$ 沿任意路径趋近于点 $p_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 总趋近于一个确定的常数 A,那么就称常数 A 为二元函数 $f(x,y)$ 当 $p(x,y)\to p_0(x_0,y_0)$ 时的极限,记作

$$\lim_{p\to p_0}f(x,y)=A,$$

或

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A,$$

也可以写成

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

注意 (1) 二元函数在点 $p_0(x_0,y_0)$ 是否有定义,不影响它在点 $p_0(x_0,y_0)$ 的极限.

(2) 因为平面上点 $p(x,y)$ 到点 $p_0(x_0,y_0)$ 有无数条路径,根据定义,当点 $p(x,y)$ 沿任意一条路径无限趋近于点 $p_0(x_0,y_0)$ 时,极限都存在且等于同一个值 A,才能说二元函数的极限存在.如果当点 $p(x,y)$ 沿不同的路径趋向于点 $p_0(x_0,y_0)$ 时,函数值趋向于不同的数值,则函数极限必不存在.

(3) 二元函数极限也有类似于一元函数极限的运算法则和性质.

例 2 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin xy}{xy^2}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\sin xy}{xy^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \frac{1}{y}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{1}{y}$

$= 1 \times 1 = 1.$

例 3 讨论极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$是否存在.

解 当动点 $p(x,y)$ 沿着直线 $y = kx$ 趋近于点 $O(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

当 k 取不同值时,上式的值也不同,因此极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

六、二元函数的连续性

定义 6.5 设二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域$U(p_0)$内有定义,如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处连续,否则,称函数 $z = f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处不连续,也称间断.

如果二元函数 $z = f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都连续,则称函数 $z = f(x,y)$ 在区域 D 连续,也称函数 $z = f(x,y)$ 为区域 D 内的连续函数,连续的二元函数的图形是一张连续的曲面.

可以证明:

(1) 二元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)及复合仍为连续函数.

(2) 二元初等函数在其定义域区域内必连续,这样,初等函数 $f(x,y)$ 在其定义域内点(x_0,y_0)处总有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

例 4 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x-3y}{x^2+y^2}$.

解 由于函数 $f(x,y)=\dfrac{x-3y}{x^2+y^2}$ 是初等函数，而点(1,2) 位于其定义域内，于是

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{x-3y}{x^2+y^2}=\frac{1-3\times 2}{1^2+2^2}=-1.$$

七、有界闭区域上二元连续函数的性质

有界闭区域上的二元连续函数有着一些良好的性质，它表现在下面的定理中，定理的证明要用到较深的数学知识，故从略.

定理6.1(有界性) 如果函数 $f(x,y)$ 为有界闭区域 D 上的连续函数，则它在 D 上必有界，即存在常数 $M>0$，使得对于 $\forall\, p(x,y)\in D$，均有

$$|f(x,y)|<M.$$

定理6.2(最值性) 如果函数 $f(x,y)$ 为有界闭区域 D 上的连续函数，则它在 D 上必有最大值 M 和最小值 m，即必有 $p_1(x_1,y_1),p_2(x_2,y_2)\in D$，$f(x_1,y_1)=m$，$f(x_2,y_2)=M$，对于 $\forall\, p(x,y)\in D$，均有

$$m=f(x_1,y_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_2,y_2)=M.$$

定理6.3(介值性) 如果函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，且 m 和 M 分别是函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值和最大值，C 是 m 与 M 之间的任意常数($m\leqslant C\leqslant M$)，则有 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$f(\xi,\eta)=C.$$

课堂练习与作业

1. 求二元函数 $z=\ln(x-y)$ 的定义域.

2. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

3. 讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y}{x+y^2}$ 是否存在.

4. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$.

§6－2　偏导数

数学——科学不可动摇的基石，促进人类事业进步的丰富源泉.

——巴罗

一元函数的导数是研究一元函数性质的极为重要的工具，同样，研究多元函数的性质也需要用到类似于一元函数导数这样的概念，而多元函数的自变量不止一个，情况比较复杂，在讨论多元函数时可以先把它看成是关于其中某个自变量的函数（而其余自变量暂时看作常数）求导，这就是本节要介绍的偏导数.

一、偏导数的概念

定义 6.6　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(p_0)$ 内有定义，当 y 固定在 y_0 不变，而 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时，相应的函数有增量（通常称为关于自变量 x 的偏增量），即

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的偏导数，记作

$$z'_x(x_0,y_0),f'_x(x_0,y_0),\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

类似地，如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处对 y 的偏导数，记作

$$z'_y(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点处对 x 或 y 的偏导数都存在，那么这个偏导数是变量 x,y 的函数，称为函数 $z=f(x,y)$ 对 x 或 y 的偏导函数，记作

$$z_x,f_x,z'_x,f'_x,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},$$

或

$$z_y, f_y, z'_y, f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

在不引起混淆的情况下，常将偏导函数简称为偏导数，易知

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_x(x, y)\Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = f'_y(x, y)\Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}.$$

二元函数偏导数的概念，可以推广到一般的多元函数.

由偏导数的定义可知，求多元函数对某个自变量的偏导数，只需要把它看成这个自变量的函数，而把其余的自变量都当作常数，然后用一元函数的求导法则对这个自变量求导即可.

例1 求函数 $z = x^2 + y^2 + 2x^2y^2$ 的偏导数.

解 $z'_x = (x^2 + y^2 + 2x^2y^2)'_x = 2x + 4xy^2$，

$z'_y = (x^2 + y^2 + 2x^2y^2)'_y = 2y + 4x^2y.$

例2 求函数 $z = \arctan\dfrac{y}{x}$ 的偏导数.

解 $$z'_x = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(\frac{y}{x})'_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot(-\frac{y}{x^2}) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$z'_y = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(\frac{y}{x})'_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

例3 已知二元函数 $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$，求 $f'_x(1,2), f'_y(1,2)$.

解 $$f'_x(x,y) = \frac{(x+y)-x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2},$$

$$f'_y(x,y) = x\cdot\left[-\frac{(x+y)'_y}{(x+y)^2}\right] = -\frac{x}{(x+y)^2},$$

于是，

$$f'_x(1,2) = \frac{2}{(1+2)^2} = \frac{2}{9},$$

$$f'_y(1,2) = -\frac{1}{(1+2)^2} = -\frac{1}{9}.$$

二、高阶偏导数

定义6.7 设函数 $z = f(x,y)$ 在区域 D 内有偏导数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$，它们都是 x，

y 的函数，如果它们对 x,y 的偏导数也存在，则称其为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，记为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x,y).$$

式中，z''_{xy} 和 z''_{yx} 称为 $z=f(x,y)$ 的混合偏导数，一般情况下，它们并不相等，但当它们在区域 D 内都连续时，一定相等.

类似地，可以定义三阶和更高阶的偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数. z'_x, z'_y 也称函数 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导数.

例 4　求 $z=2x^2+y^3-x^3y^2$ 的二阶偏导数.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=4x-3x^2y^2, \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-2x^3y;$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4-6xy^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6x^2y,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-6x^2y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y-2x^3.$

例 5　设 $z=x^2ye^y$，求 $z''_{xx}(1,0)$ 和 $z''_{xy}(1,0)$.

解　$z'_x=2xye^y, z''_{xx}=2ye^y, z''_{xy}=2x(e^y+ye^y)=2x(1+y)e^y,$

所以　$z''_{xx}(1,0)=0, z''_{xy}(1,0)=2\times 1\times(1+0)\times e^0=2.$

课堂练习与作业

1. 求函数 $z=x^3+3x^2y-y^3$ 的一阶偏导数.

2. 求函数 $z=e^{xy}+\frac{x}{y}$ 的一阶偏导数.

3. 已知二元函数 $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$，求 $f'_y(1,3)$.

4. 求函数 $z=x^3y-2xy^4$ 的二阶偏导数.

5. 已知二元函数 $z=\ln(2e^x-e^y)$，求 $z''_{xx}(0,0)$.

§6－3　全微分

精巧的论证常常不是一蹴而就的，而是人们长期切磋积累的成果，我也是慢慢学来的，而且还要继续不断地学习.

——阿贝尔

一、多元函数的全增量和全微分

先看一个实例.

例1　已知一个矩形的边长分别为 x 和 y，当边长 x,y 分别取得增量 $\Delta x,\Delta y$ 时，求面积的增量.

解　矩形的面积为 $A=xy$，$\Delta A=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y$.

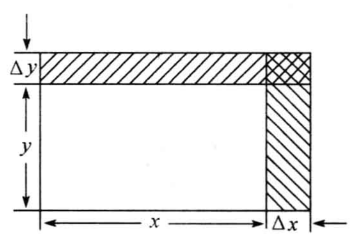


图6-3-1

上式右边是由两部分组成的：第一部分是 $y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y$，它是关于 Δx 和 Δy 的线性函数，即图6-3-1中带单斜线的两个矩形面积之和；第二部分是 $\Delta x\cdot\Delta y$，当 $\Delta x\to0,\Delta y\to0$ 时，它是比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小量(由于 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}>0$，可以认为它是直角边长度为 $|\Delta x|$ 与 $|\Delta y|$ 的直角三角形的斜边长度)，从而必有

$$\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|=\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}<1,$$

即比值 $\frac{\Delta x}{\rho}$ 为有界变量，当 $\rho\to0$ 时，有 $\Delta x\to0$ 且 $\Delta y\to0$，根据无穷小量的性质，有极限

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta x}{\rho}\cdot\Delta y=0,$$

故无穷小量 $\Delta x\cdot\Delta y$ 是比无穷小量 ρ 高阶的无穷小量，因此，当 ρ 很小时，可以用第一部分 $y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y$ 作为 ΔA 的近似值，即有