文登教育

Wendeng Education

2014

文登教育集团课堂用书

（数学二）

考研数学复习指南

网络增值版

增值服务网址 www.bjwendeng.com

陈文灯 黄先开 主 编

本书使用说明：

- 本书所提供的所有网络增值服务**全部免费**。
- 答疑论坛说明及各复习阶段**免费课件**介绍详见封二、封三。
- 书后附录全套**课后题详解**，答疑论坛**新赠**重点习题**视频讲解**。
- 总结**37个思维定势**，灵活掌握，对提升快速解题能力至关重要！

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

文登教育
Wendeng Education

2014

文登教育集团课堂用书

（数学二）

考研数学复习指南

修订版

（第三次修订）

陈文灯 黄先开 主 编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

2014年考研数学复习指南. 数学. 2 / 陈文灯，黄先开主编. —北京：北京理工大学出版社，2012.12

ISBN 978-7-5640-7084-7

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①陈… ②黄… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第288391号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮 编 / 100081
电 话 /(010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)
网 址 / http://www.bitpress.com.cn
经 销 / 全国各地新华书店
印 刷 / 北京时代华都印刷有限公司
开 本 / 787毫米×1092毫米 1/16
印 张 / 30.75
字 数 / 800千字
版 次 / 2012年12月第1版 2012年12月第1次印刷
定 价 / 53.80元

责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　言

本书从 1995 年出版以来，历经十八年的再版和修订，集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握以及众多考研学子的复习心得、实战体会，已成为广大考研读者的良师诤友，同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编，成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中，本书帮助许许多多考研学子圆了梦想，帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题，编者和一些数学同仁专门开设了“复习指南答疑论坛(www. bjwendeng. com/bbs)”，以更好地和同学们交流互动。从您购书开始一直到考试，文登名师将一直伴随着您！许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息，我们曾数次认真商讨、仔细揣摩，对本书再次做了修订，希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外，在文登教育平台的基础上，我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课，建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南，效果将事半功倍！

此次再版，我们做了以下修订。

(1)“变繁为简，变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结，使考生得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧，并给出了详细的分析，使同学们了解这些方法的由来，让“玄妙”变得顺理成章。例如，连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明，尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的做法，经过我们的分析，原题将变得非常“初等”，非常简单，只要仿效，即可自行解答。

(2)例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应对考试很有用，根据题型特点，能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”，以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3)修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容，修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助，再版力求尽量做到完美。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。

最后回答考生们的问题："如何有效地利用您的书提高复习效果？""考好数学，书要看几遍？"

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看，对基础部分要多下点工夫，做到概念、定理能用自己的语言叙述，习题应全部都做。高数的基础：极限、导数与微分、不定积分；线性代数的基础：矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量；概率论与数理统计的基础：事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、贝努里概型、随机变量及其分布(特别是二维连续型)、随机变量的数字特征[期望 $E(X)$、方差 $D(X)$、协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$，相关系数 ρ_{XY}]。如果是自学，应先仔仔细细地把本书看一遍，然后再详细看二三遍，对重点知识点着重理解、揣摩；如果是参加强化班，最好应该与上课"同步"进行，课后再看一遍即可。

送给考研朋友一首诗：

数学基础树的根，
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺，
功到高分自然成。

陈文灯

2012.11

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

附录　课后习题答案详解

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限和连续

第1节　重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义，如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数（或 $f(x)$ 为奇函数）.

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质：

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数，偶函数的代数和仍为偶函数；

(2) 偶数个奇（或偶）函数之积为偶函数，奇数个奇函数的积为奇函数；

(3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数：$|x|,\cos x, x^{2n}$（n 为正整数），$e^{|x|}, e^{x^2},\cdots$.

常见的奇函数：$\sin x,\tan x,\dfrac{1}{x},x^{2n+1},\arcsin x,\arctan x,\cdots$.

提示 判别给定函数的奇偶性，主要是根据奇偶性的定义，有时也用其运算性质.

注 (1) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇函数或偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(2) $y=\int_0^x f(t)\,dt$，其中 $f(x)$ 为奇函数；

(3) $y=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $a>0,a\neq 1,F(x)$ 为奇函数.

【解】 (1) 令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，有 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$，

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= \ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

(2) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=-u} \int_0^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u)$$

$$=-\int_0^{x}f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t \quad (因为 f(x) 为奇函数)$$

$$=F(x),$$

故 $y=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,则

$$g(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2},$$

$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}=0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数,又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,若存在一个与 x 无关的正数 T,使对于任一 $x\in X$,恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期为$\dfrac{T}{|a|}$;

(2) 若 $f(x),g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数;

(3) 若 $f(x),g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2,(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期:$\sin x,\cos x$,其周期 $T=2\pi$;

$\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|$,其周期 $T=\pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数,主要是根据周期函数的定义,有时也用其运算性质.

【例 1.2】设对一切实数 x,有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,则 $f(x)$ 是周期为______的周期函数.

【解】$$f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\frac{1}{4}-f(x)-f^2(x)-\sqrt{f(x)-f^2(x)}}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x) \quad \left(由题设知 f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right),$$

即 $f(1+x)=f(x)$,故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】设 $f(x)$ 是在$(-\infty,+\infty)$上以 T 为周期的连续函数,

(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 T 为周期的周期函数；

(2) 如果 $\int_a^T f(x)\mathrm{d}x \neq 0$，则函数 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证】 (1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$F(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(x),$$

所以，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k，有

$$G(x)=\int_a^x [f(t)-k+k]\mathrm{d}t=\int_a^x [f(t)-k]\mathrm{d}t+k(x-a).$$

因为 $k(x-a)$ 是线性函数，所以，只需证明当 k 取某一值时，$g(x)=\int_a^x [f(t)-k]\mathrm{d}t$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$g(x+T)=\int_a^{x+T}[f(t)-k]\mathrm{d}t=\int_a^x [f(t)-k]\mathrm{d}t+\int_x^{x+T}[f(t)-k]\mathrm{d}t$$

$$=g(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-kT.$$

取 $k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，有 $g(x+T)=g(x)$，即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果 $\exists M>0$，使得对于一切 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界；若不存在这样的 M，则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注 函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数：	$\vert\sin x\vert\leqslant 1$，	$\vert\cos x\vert\leqslant 1$，	$x\in(-\infty,+\infty)$；
	$\vert\arcsin x\vert\leqslant\frac{\pi}{2}$，	$\vert\arccos x\vert\leqslant\pi$，	$x\in[-1,1]$；
	$\vert\arctan x\vert<\frac{\pi}{2}$，	$\vert\operatorname{arccot} x\vert<\pi$，	$x\in(-\infty,+\infty)$

提示 判别函数的界，一般首先将函数取绝对值，然后用不等式放缩法求解；或借助导数利用求最大(小)值法处理.

【例 1.4】 函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界. (B) 有下界无上界.

(C) 有界，且 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$. (D) 有界且 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$. 【 】

【解】 $|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$ （因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$），

故 $-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$，可知(C)入选.

【例 1.5】 函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上为

(A) 有上界无下界.　　(B) 有下界无上界.

(C) 有界且 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$.　　(D) 有界且 $\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\dfrac{1}{4}$.　　【　】

【解】 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$, $f'(x)=\dfrac{x\dfrac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)$.

因为 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，所以 $f'(x)>0$. 故 $f(x)$“↑”.

因此，$\dfrac{\lg\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\lg 1}{1}$，即 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$，可知，该选(C).

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果对 $\forall x_1,x_2\in X, x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

提示 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知可导，则其单调性的判别用定义；若 $f(x)$ 在区间 X 上可导，则利用导数判别更为简便.

【例 1.6】 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$x_1>0, x_2>0$. 求证：

(1) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$；

(2) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调上升，则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【证】 (1) 设 $x_1>0, x_2>0$，且 $x_1<x_2$. 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}\Rightarrow x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)\Rightarrow f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2);$$

(2) 证明略.

【例 1.7】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，令

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

证明：$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

【分析】 只需证明 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内 $F'(x)>0$ 即可.

【证】因为 $f(x)>0$，所以，当 $x>0$ 时，$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 连续.

又 $$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{xf(x)}{f(x)}=0=F(0),$$

即 $F(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，所以，$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

当 $x>0$ 时，$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$
$$=\frac{f(x)\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}.$$

令 $g(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，有
$$g'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t>0,$$

所以，当 $x>0$ 时，$g(x)$ 单调增加，即有 $g(x)>g(0)=0$. 故当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$. 所以，$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

二、分段函数

如果一个函数在其定义域内，对应于不同的区间段有着不同的表达形式，则该函数称为分段函数.

常见的分段函数：

(1) 符号函数 $$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & 当\ x>0\\ 0, & 当\ x=0,\\ -1, & 当\ x<0\end{cases}$$

(2) y 是 x 的整数部分，记为 $y=[x]$.

(3) 狄利克莱(Dirichlet) 函数
$$y=f(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\ 为有理数时\\ 0, & 当\ x\ 为无理数时\end{cases}.$$

注 一般而言，分段函数不是初等函数.

三、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中任一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为
$$x=\varphi(y),$$
$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

注 (1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合；$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=$

$f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数.

提示 求反函数的步骤：

(1) 把 x 从方程 $y = f(x)$ 中解出；

(2) 把刚才所得到的表达式中的 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数 $f^{-1}(x)$.

【例 1.8】 求 $y = \dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数.

【解】 令 $u = \sqrt{1+4x}$，则 $y = \dfrac{1-u}{1+u}$，

于是 $u = \dfrac{1-y}{1+y}$，即
$$\sqrt{1+4x} = \frac{1-y}{1+y},$$

故
$$x = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2 - 1\right] = -\frac{y}{(1+y)^2},$$

即
$$y = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

【例 1.9】 设 $y = f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$.

【解】 求分段函数的反函数，只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

由 $y = x, -\infty < x < 1 \Rightarrow x = y, \quad -\infty < y < 1$，

于是，反函数为：$y = x, \quad -\infty < x < 1$.

由 $y = x^2, 1 \leqslant x \leqslant 4 \Rightarrow x = \sqrt{y}, 1 \leqslant y \leqslant 16$，

于是，反函数为：$y = \sqrt{x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 16$.

由 $y = 2^x, 4 < x < +\infty, \Rightarrow x = \log_2 y, \quad 16 < y < +\infty$.

于是，反函数为：$y = \log_2 x, \quad 16 < x < +\infty$.

综上所述，$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 16 \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty \end{cases}$.

四、复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $Z_\varphi \subset D_f$，则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

x—— 自变量，u—— 中间变量，y—— 因变量.

将两个或两个以上函数进行复合是本节的难点，以下根据函数的特点分别讲几种复合的方法.

1. 代入法

将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，这种构成复合函数的方法，称为代入法，该法适用于初等函数的复合.

【例 1.10】 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f\cdots f(x))}_{n\text{次}}$，若 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$.