



文登教育

Wendeng Education

2014

文登教育集团课堂用书

(数学二)

考研数学 复习指南

网络增值版

增值服务网址 www.bjwendeng.com

陈文灯 黄先开 主 编

本书使用说明:

- ◆ 本书所提供的所有网络增值服务**全部免费**。
- ◆ 答疑论坛说明及各复习阶段**免费课件**介绍详见封二、封三。
- ◆ 书后附录全套**课后题详解**，答疑论坛**新赠**重点习题**视频讲解**。
- ◆ 总结**37个思维定势**，灵活掌握，对提升快速解题能力至关重要！



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



2011.4.3
文登教育

Wendeng Education

2014

文登教育集团课堂用书

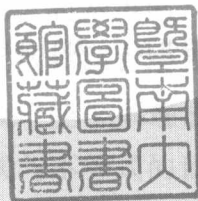
(数学二)

考研数学 复习指南

修订版

(第三次修订)

陈文灯 黄先开 主 编



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

2014 年考研数学复习指南. 数学. 2 / 陈文灯, 黄先开主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2012. 12

ISBN 978 - 7 - 5640 - 7084 - 7

I. ①2… II. ①陈… ②黄… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 288391 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京时代华都印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 30.75

字 数 / 800 千字

版 次 / 2012 年 12 月第 1 版 2012 年 12 月第 1 次印刷

定 价 / 53.80 元



责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题, 本社负责调换

前言

本书从 1995 年出版以来,历经十八年的再版和修订,集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握以及众多考研学子的复习心得、实战体会,已成为广大考研读者的良师诤友,同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编,成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中,本书帮助许许多多考研学子圆了梦想,帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题,编者和一些数学同仁专门开设了“复习指南答疑论坛(www.bjwendeng.com/bbs)”,以更好地和同学们交流互动。从您购书开始一直到考试,文登名师将一直伴随着您!许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息,我们曾数次认真商讨、仔细揣摩,对本书再次做了修订,希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外,在文登教育平台的基础上,我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课,建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南,效果将事半功倍!

此次再版,我们做了以下修订。

(1)“变繁为简,变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结,使考生得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧,并给出了详细的分析,使同学们了解这些方法的由来,让“玄妙”变得顺理成章。例如,连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明,尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的做法,经过我们的分析,原题将变得非常“初等”,非常简单,只要仿效,即可自行解答。

(2)例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应对考试很有用,根据题型特点,能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”,以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3)修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容,修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助,再版力求尽量做到完美。为了精益求精,恳请朋友们拨冗指正。

最后回答考生们的问题:“如何有效地利用您的书提高复习效果?”“考好数学,书要看几遍?”

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看,对基础部分要多下点工夫,做到概念、定理能用自己的语言叙述,习题应全部都做。高数的基础:极限、导数与微分、不定积分;线性代数基础:矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量;概率论与数理统计的基础:事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、贝努里概型、随机变量及其分布(特别是二维连续型)、随机变量的数字特征[期望 $E(X)$ 、方差 $D(X)$ 、协方差 $\text{cov}(X,Y)$,相关系数 ρ_{XY}]。如果是自学,应先仔仔细细地把本书看一遍,然后再详细看二三遍,对重点知识点着重理解、揣摩;如果是参加强化班,最好应该与上课“同步”进行,课后再看一遍即可。

送给考研朋友一首诗:

数学基础树的根,
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺,
功到高分自然成。

陈灯

2012.11

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限和连续 1

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 1

一、函数的基本性质 1

二、分段函数 5

三、反函数 5

四、复合函数 6

五、初等函数 9

六、函数的极限及其连续性 9

七、重要公式和定理 12

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 19

题型一 未定式的定值法 19

题型二 类未定式的计算 23

题型三 数列的极限 24

题型四 极限式中常数的确定(重点)
..... 29

题型五 函数连续或间断点的判定
..... 32

第 3 节 思维定势及综合题解析 34

一、思维定势 34

二、综合题解析 38

习题一 39

第二章 导数与微分 43

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 43

一、导数与微分的定义 43

二、重要定理 45

三、导数与微分的运算法则 45

四、基本公式 45

五、弧微分与曲率 46

六、高阶导数的定义与基本公式 47

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 47

题型一 求复合函数的导数或微分
..... 47

题型二 求参数方程的导数或微分
..... 49

题型三 求隐函数的导数或微分
..... 50

题型四 求幂指函数的导数或微分
..... 50

题型五 求表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分 51

题型六 求分段函数的导数或微分
..... 51

题型七 求高阶导数 52

第 3 节 思维定势及综合题解析 56

一、思维定势 56

二、综合题解析 56

习题二 59

第三章 不定积分 62

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 62

一、不定积分的基本概念 62

二、基本性质 62

三、基本公式 63

四、基本积分法 64

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 77

题型一 有理函数的不定积分 77

题型二 简单无理函数的不定积分 78

题型三 三角有理式的不定积分 79

题型四 含有反三角函数的不定积分
..... 83

题型五 抽象函数的不定积分	83	第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	134
题型六 分段函数的不定积分	84	题型一 闭区间上连续函数命题的证明	134
第 3 节 思维定势及综合题解析	85	题型二 证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	137
一、思维定势	85	题型三 证明某个函数恒等于一个常数的命题	138
二、综合题解析	86	题型四 命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明	139
习题三	88	题型五 欲证结论: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	140
第四章 定积分及反常积分	92	题型六 欲证结论: 在 (a, b) , 内至少存在 $\xi, \eta(\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式	143
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	92	第 3 节 思维定势及综合题解析	144
一、基本性质	92	一、思维定势	144
二、定理和公式	95	二、综合题解析	146
三、定积分的计算法	98	习题五	147
四、反常积分的基本概念	102	第六章 常微分方程	150
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	103	第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	150
题型一 分段函数的定积分	103	一、基本概念	150
题型二 被积函数带有绝对值符号的定积分	105	二、二阶线性微分方程解的结构	150
题型三 被积函数中含有“变限积分”的定积分	106	三、二阶常系数线性微分方程	152
题型四 对称区间上的定积分	108	四、 n 阶常系数线性微分方程	152
题型五 被积函数的分母为两项, 而分子为其中一项的定积分	109	第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	155
题型六 由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的定积分	110	题型一 一阶微分方程的计算	155
题型七 已知一定积分, 求另一一定积分	111	题型二 可降阶的高阶方程的求解	161
题型八 定积分等式的证明	112	题型三 计算二阶线性微分方程	163
题型九 定积分不等式的证明	120	题型四 微分方程的应用	166
题型十 计算反常积分	125	第 3 节 思维定势及综合题解析	169
题型十一 反常积分的判敛	126	一、思维定势	169
第 3 节 思维定势及综合题解析	127	二、综合题解析	169
一、思维定势	127	习题六	171
二、综合题解析	128		
习题四	129		
第五章 微分中值定理	133		
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	133		

第七章 一元微积分的应用	174
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	174
一、函数的单调增减性定理	174
二、函数的极值与最值	175
三、函数凹凸性的判别与函数的拐点	176
四、微元法及其应用	178
第2节 重要题型的解题方法和技巧	180
题型一 求函数的极值	180
题型二 求函数的最值	181
题型三 关于方程根的讨论	182
题型四 函数渐近线的求解	187
题型五 函数作图	188
题型六 求平面图形的面积	189
题型七 求立体的体积	191
题型八 求平面曲线的弧长	192
题型九 求旋转体的侧面积	193
题型十 变力做功、引力、液体的静压力	194
第3节 思维定势与综合题解析	197
一、思维定势	197
二、综合题解析	198
习题七	201
第八章 多元函数微分学	204
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	204
一、二元函数的定义	204
二、二元函数的极限及连续性	205
三、偏导数、全导数及全微分	206
四、基本定理	207
五、多元函数的极值	209
六、条件极值与无条件极值	210
第2节 重要题型的解题方法和技巧	210
题型一 简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的微分法	210
题型二 复合函数微分法	211

题型三 隐函数微分法	214
题型四 求无条件极值	217
题型五 求条件极值	218
题型六 求最值	219
第3节 思维定势及综合题解析	221
一、思维定势	221
二、综合题解析	221
习题八	222
第九章 重积分	224
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	224
一、基本概念	224
二、性质	224
三、公式	226
四、二重积分的解题技巧	227
第2节 重要题型的解题方法和技巧	229
题型一 更换二重积分的积分次序	229
题型二 选择二重积分的积分次序	231
题型三 二重积分坐标系的选择	233
题型四 分段函数的二重积分的计算	234
题型五 二重积分等式的证明	237
题型六 二重积分不等式的证明	239
第3节 思维定势及综合题解析	241
一、思维定势	241
二、综合题解析	242
习题九	243
第十章 函数方程与不等式证明	246
第1节 函数方程	246
一、利用函数表示法与用何字母表示无关的“特性”求解方程	246
二、利用极限求解函数方程	247
三、利用导数的定义求解方程	248
四、利用变上限积分的可导性求解方程	248
五、利用连续函数的可积性及原函数的连	

续性求解	249
六、利用解微分方程的方法求解 $f(x)$	250
第2节 不等式的证明	252
一、引入参数法	252
二、利用微分中值定理	253
三、利用函数的单调增减性(重点) ...	255
四、利用函数的极值与最值	257
五、利用函数图形的凹凸性	258
六、利用泰勒展开式	259
七、杂例	260
习题十	261

第二篇 线性代数

第一章 行列式	264
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	264
一、排列与逆序	264
二、 n 阶行列式的定义	265
三、行列式的基本性质	266
四、行列式按行(列)展开定理	269
五、重要公式与结论	270
第2节 重要题型的解题方法和技巧	271
题型一 抽象行列式的计算	271
题型二 低阶行列式的计算	272
题型三 n 阶行列式的计算	273
第3节 思维定势与综合题解析	279
一、思维定势	279
二、综合题解析	279
习题一	281
第二章 矩阵	284
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	284
一、矩阵的概念	284
二、矩阵的运算	284
三、逆矩阵的概念	287
四、利用伴随矩阵求逆矩阵	287
五、矩阵的初等变换与求逆	288

六、分块矩阵及其求逆	289
七、矩阵的秩及其求法	290
第2节 重要题型的解题方法和技巧	290
题型一 求逆矩阵	290
题型二 求矩阵的高次幂 A^m	292
题型三 有关初等矩阵的命题	294
题型四 解矩阵方程	295
题型五 求矩阵的秩	297
题型六 关于矩阵对称、反对称命题的证 明	298
题型七 关于方阵 A 可逆的证明	298
题型八 与 A 的伴随阵 A^* 有关联的命题 的证明	299
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	300
第3节 思维定势与综合题解析	302
一、思维定势	302
二、综合题解析	304
习题二	304
第三章 向量	310
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	310
一、向量的概念与运算	310
二、向量间的线性关系	310
三、向量组的秩和矩阵的秩	311
四、向量空间	312
五、重要定理与公式	314
六、小结	314
第2节 重要题型的解题方法和技巧	315
题型一 讨论向量组的线性相关性	315
题型二 有关向量组线性相关性命题的证 明	318
题型三 判定一个向量是否可由一组向量 线性表示	324
题型四 有关向量组线性表示命题的证明	326

题型五 求向量组的极大线性无关组	327	四、实对称矩阵及其性质	365
题型六 有关向量组或矩阵秩的计算与证明	329	五、重要公式与结论	365
题型七 与向量空间有关的命题	332	第2节 重要题型的解题方法和技巧	366
第3节 思维定势与综合题解析	334	题型一 求数值矩阵的特征值与特征向量	366
一、思维定势	334	题型二 求抽象矩阵的特征值、特征向量	368
二、综合题解析	335	题型三 特征值、特征向量的逆问题	369
习题三	336	题型四 相似的判定及其逆问题	370
第四章 线性方程组	340	题型五 判断矩阵 A 是否可对角化	372
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	340	题型六 有关特征值与特征向量的证明题	375
一、克莱姆法则	340	第3节 思维定势与综合题解析	377
二、线性方程组的基本概念	340	一、思维定势	377
三、线性方程组解的判定	341	二、综合题解析	377
四、非齐次线性方程组与其导出组的解的关系	342	习题五	383
五、线性方程组解的性质	342	第六章 二次型	386
六、线性方程组解的结构	342	第1节 重要概念、定理和公式的剖析	386
第2节 重要题型的解题方法和技巧	343	一、二次型及其矩阵表示	386
题型一 基本概念题(解的判定、性质、结构)	343	二、化二次型为标准型	386
题型二 含有参数的线性方程组解的讨论	347	三、配方法和正交变换法	387
题型三 讨论两个方程组的公共解	351	四、二次型和矩阵的正定性及其判别法	388
题型四 有关基础解系的证明	353	第2节 重要题型的解题方法和技巧	391
第3节 思维定势与综合题解析	354	题型一 二次型所对应的矩阵及其性质	391
一、思维定势	354	题型二 化二次型为标准形	392
二、综合题解析	355	题型三 已知二次型通过正交变换化为标准形,反求参数	396
习题四	360	题型四 有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明	397
第五章 特征值和特征向量	364	第3节 思维定势与综合题解析	399
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	364	一、思维定势	399
一、矩阵的特征值和特征向量的概念	364	二、综合题解析	400
二、相似矩阵及其性质	364	习题六	401
三、矩阵可相似对角化的充要条件	365		

附录 课后习题答案详解

第一篇 高等数学	403
第一章 函数、极限和连续	403
第二章 导数与微分	407
第三章 不定积分	411
第四章 定积分及反常积分	418
第五章 微分中值定理	422
第六章 常微分方程	424
第七章 一元微积分的应用	430
第八章 多元函数微分学	435

第九章 重积分	438
第十章 函数方程与不等式证明	442
第二篇 线性代数	446
第一章 行列式	446
第二章 矩阵	448
第三章 向量	456
第四章 线性方程组	461
第五章 特征值和特征向量	469
第六章 二次型	477

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限和连续

第1节 重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

- (1) 奇函数的代数和仍为奇函数, 偶函数的代数和仍为偶函数;
- (2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数, 奇数个奇函数的积为奇函数;
- (3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|, \cos x, x^{2n} (n \text{ 为正整数}), e^{|x|}, e^{x^2}, \dots$.

常见的奇函数: $\sin x, \tan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \dots$.

提示 判别给定函数的奇偶性, 主要是根据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质.

注 (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点不对称, 则该函数就不是奇函数或偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性:

$$(1) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) y = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为奇函数};$$

$$(3) y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, F(x) \text{ 为奇函数}.$$

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

$$(2) \text{ 令 } F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u)(-du) \\ &= -\int_0^x f(-t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 为奇函数}) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

故 $y = \int_0^x f(t) dt$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$, 则

$$g(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数, 又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$ 为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于任一 $x \in X$, 恒有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$;

(2) 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数;

(3) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 T_1, T_2 ($T_1 \neq T_2$) 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数, 主要是根据周期函数的定义, 有时也用其运算性质.

【例 1.2】 设对一切实数 x , 有 $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为 _____ 的周期函数.

$$\begin{aligned} \text{【解】} f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \frac{1}{4} - f(x) - f^2(x) - \sqrt{f(x) - f^2(x)}} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\ &= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x) \quad (\text{由题设知 } f(x) \geq \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

即 $f(1+x) = f(x)$, 故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数,

- (1) 如果 $f(x)$ 是奇函数, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 也是以 T 为周期的周期函数;
 (2) 如果 $\int_a^{a+T} f(x) dx \neq 0$, 则函数 $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证】(1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$\begin{aligned} F(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt + \int_T^{x+T} f(t) dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + \int_0^x f(t) dt = F(x), \end{aligned}$$

所以, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k , 有

$$G(x) = \int_a^x [f(t) - k + k] dt = \int_a^x [f(t) - k] dt + k(x - a).$$

因为 $k(x - a)$ 是线性函数, 所以, 只需证明当 k 取某一值时, $g(x) = \int_a^x [f(t) - k] dt$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \int_a^{x+T} [f(t) - k] dt = \int_a^x [f(t) - k] dt + \int_x^{x+T} [f(t) - k] dt \\ &= g(x) + \int_0^T f(t) dt - kT. \end{aligned}$$

取 $k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, 有 $g(x+T) = g(x)$, 即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界; 若不存在这样的 M , 则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

【注】函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数: $ \sin x \leq 1,$	$ \cos x \leq 1,$	$x \in (-\infty, +\infty);$
$ \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$	$ \arccos x \leq \pi,$	$x \in [-1, 1];$
$ \arctan x < \frac{\pi}{2},$	$ \operatorname{arccot} x < \pi,$	$x \in (-\infty, +\infty)$

【提示】判别函数的界, 一般首先将函数取绝对值, 然后用不等式放缩法求解; 或借助导数利用求最大(小)值法处理.

【例 1.4】函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界, 且 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

(D) 有界且 $-2 \leq f(x) \leq 2$.

【 】

【解】 $|f(x)| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$ (因为 $1+x^2 \geq 2|x|$),

故 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, 可知(C)入选.

【例 1.5】函数 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界且 $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$.

(D) 有界且 $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq -\frac{1}{4}$.

【 】

【解】 $f(x) = \frac{\lg x}{x}, f'(x) = \frac{x \frac{1}{x \ln 10} - \lg x}{x^2} = \frac{1}{x^2}(\lg e - \lg x)$.

因为 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ “ $\uparrow$ ”.

因此, $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \lg 1$, 即 $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$, 可知, 该选(C).

4. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

提示 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知可导, 则其单调性的判别用定义; 若 $f(x)$ 在区间 X 上可导, 则利用导数判别更为简便.

【例 1.6】设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, $x_1 > 0, x_2 > 0$. 求证:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

【证】(1) 设 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 且 $x_1 < x_2$. 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow x_1 f(x_2) \leq x_2 f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2) \Rightarrow f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2);$$

(2) 证明略.

【例 1.7】设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 令

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

证明: $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

【分析】只需证明 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内 $F'(x) > 0$ 即可.

【证】因为 $f(x) > 0$, 所以, 当 $x > 0$ 时, $F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 连续.

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf(x)}{f(x)} = 0 = F(0),$$

即 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处右连续, 所以, $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

$$\begin{aligned} \text{当 } x > 0 \text{ 时, } F'(x) &= \frac{xf(x) \int_0^x f(t)dt - f(x) \int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \\ &= \frac{f(x) \left[x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \right]}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}. \end{aligned}$$

令 $g(x) = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$, 有

$$g'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt > 0,$$

所以, 当 $x > 0$ 时, $g(x)$ 单调增加, 即有 $g(x) > g(0) = 0$. 故当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$. 所以, $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

二、分段函数

如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达形式, 则该函数称为分段函数.

常见的分段函数:

$$(1) \text{ 符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

(2) y 是 x 的整数部分, 记为 $y = [x]$.

(3) 狄利克莱(Dirichlet) 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

注 一般而言, 分段函数不是初等函数.

三、反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f , 如果对于 Z_f 中任一 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值, 则称变量 x 为变量 y 的函数, 记为

$$x = \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 习惯上把 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

注 (1) $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图像重合; $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y =$

$f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数.

提示 求反函数的步骤:

(1) 把 x 从方程 $y = f(x)$ 中解出;

(2) 把刚才所得到的表达式中的 x 与 y 对换, 即得所求函数的反函数 $f^{-1}(x)$.

【例 1.8】 求 $y = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}$ 的反函数.

【解】 令 $u = \sqrt{1+4x}$, 则 $y = \frac{1-u}{1+u}$,

$$\text{于是 } u = \frac{1-y}{1+y}, \text{ 即 } \sqrt{1+4x} = \frac{1-y}{1+y},$$

$$\text{故 } x = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1-y}{1+y} \right)^2 - 1 \right] = -\frac{y}{(1+y)^2},$$

$$\text{即 } y = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

【例 1.9】 设 $y = f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$, 求 $f^{-1}(x)$.

【解】 求分段函数的反函数, 只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

$$\text{由 } y = x, -\infty < x < 1 \Rightarrow x = y, -\infty < y < 1,$$

于是, 反函数为: $y = x, -\infty < x < 1$.

$$\text{由 } y = x^2, 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = \sqrt{y}, 1 \leq y \leq 16,$$

于是, 反函数为: $y = \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 16$.

$$\text{由 } y = 2^x, 4 < x < +\infty, \Rightarrow x = \log_2 y, 16 < y < +\infty.$$

于是, 反函数为: $y = \log_2 x, 16 < x < +\infty$.

$$\text{综上所述, } f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16 \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty \end{cases}.$$

四、复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $Z_\varphi \subset D_f$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

x ——自变量, u ——中间变量, y ——因变量.

将两个或两个以上函数进行复合是本节的难点, 以下根据函数的特点分别讲几种复合的方法.

1. 代入法

将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代, 这种构成复合函数的方法, 称为代入法, 该法适用于初等函数的复合.

【例 1.10】 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f \cdots f(x))}_{n \text{ 次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.