高等学校教材

数学方法论与解题研究

（第二版）

张 雄 李得虎 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

数学方法论与解题研究

Shuxue Fangfalun yu Jieti Yanjiu

（第二版）

张　雄　李得虎　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书从数学的创造性思维本质出发,论述了数学发现和数学解题的一般性规律、原理和方法。本书既有理论原理,又有大量的典型例题、例证分析,内容丰富,文笔流畅,富有启发性,可读性较强。

全书分上、下篇,上篇为数学方法论,阐述了观察、联想、尝试、实验、归纳猜测、类比推广、模拟、化归、几何变换等数学发现的基本方法,数学的论证方法,数学与物理方法,数学智力的开发与创新意识的培养等内容;下篇为数学解题研究,着重阐述了数学解题观、数学解题的思维过程、解题策略、解题思想等,着力在"元方法"即追寻解题思路、解题方法上进行研究,在探求解题思路的微观研究和解题理论上有一定的创新。为方便教学,本次修订在每章后面选配了适量的习题。

本书可作为高等师范院校数学系本、专科教材,高等师范数学与应用数学专业自学考试教材,以及中学数学教师继续教育和骨干教师培训的教材,也可供数学教研人员和数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论与解题研究 / 张雄,李得虎编著.--2版.--北京:高等教育出版社,2013.5
ISBN 978-7-04-037211-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①张… ②李… Ⅲ.①数学方法-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O1-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第068038号

策划编辑 张长虹　　责任编辑 杨 波　　封面设计 于 涛　　版式设计 杜微言
插图绘制 黄建英　　责任校对 刘娟娟　　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京宏信印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 23.25
字　　数 420千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2003年8月第1版
　　　　 2013年5月第2版
印　　次 2013年5月第1次印刷
定　　价 36.20元

物 料 号 37211-00

第二版前言

本书第一版问世后，得到了同行的普遍关注，本书被为数众多的院校选作教材，曾荣获教育部表彰的首届全国教师教育课程资源“优秀资源”奖(2004 年)，并进入国家精品课程资源网教材中心，据中国知网统计的引用频次也在不断攀升。在此，首先要对多年来关爱本书的同行、师生和社会各界朋友表示由衷的谢意！

本次修订由张雄教授完成，主要是在第一版的基础上新增加了第一章的第一节和第九章的第六节内容，对部分章节的内容也作了修改完善。同时，在各章内容的后面还选配了适量的习题，以方便师生教学。需要提到的是，陈焕斌、赵云山两位老师参与了部分习题的选配工作，第九章第六节“最简元思想”参考了赵云山老师的相关论文，这里向两位老师表示感谢。

编著者

2013 年 4 月

目　　录

上篇　数学方法论

下篇　数学解题研究

上　篇

数学方法论

第一章　数学方法的源头

任何一门科学都有其方法论基础,如同其他科学技术一样,在数学的产生与发展过程中,理论与方法始终是相生相伴."工欲善其事,必先利其器",数学方法论就是关于数学活动中的"工具"的创造、产生和发展研究的理论性学科,是研究和讨论数学的发展规律,数学思想方法以及数学发现的一般性原理和方法的学问.

§1　数学方法的产生、意义及认识

一、数学方法的产生

在数学的发展历史长河中,数学方法与数学知识始终是紧密相连、不可分割的.英国数学家格莱舍(Glaisher)曾经说过:"任何企图将一门学科和它的历史割裂开来,我确信,没有哪一门学科比数学的损失更大."数学史表明,数学方法的产生和数学理论知识的产生是比翼双飞、共同发展的,有时候方法先于理论,有时候则是理论派生方法,更多情况下则是两者齐头并进.

拿计数法来说,尽管数系的发展极其缓慢,但是,早期人们在实际中用到的数目可能要超出他们的认识范围,解决的办法就是"一一对应".例如,用石子、木棍等方便的实物与羊群"一一对应",采用一一对应的方法完成计数问题.

除了用石子、木棍之类的东西之外,还有三种常见的早期计数方法:手指计数、刻痕计数、结绳计数.手指是人类最早的计数工具,堪称一种"便携式"计算器,成语"屈指可数"即来源于此.刻痕计数即用锐器在竹片、木板、甲骨、石壁上刻画出痕迹作为示意的记号,如果这种记号表示的是数目,那就是最早的数学符号了.结绳计数即在绳子上打结,用所打结的多少来计数.

我们来看古埃及人的乘除法运算.他们发明了一套独特的方法,把一般的乘除法运算通过一系列的倍乘($\times 2$)和加法(或减法)来完成.例如,以 26 为乘数或除数时,要事先对 26 多次倍乘,得到如下表所示一组数:

26 的个数	1	2	4	8	16	32	…
相应的结果	26	52	104	208	416	832	…

$29\times26=(1+4+8+16)\times26=26+104+208+416=754.$

$580\div26=22$,余 8,其思路如下：

$$\begin{aligned}580&=416+164=416+104+60=416+104+52+8\\&=26\times(16+4+2)+8=26\times22+8.\end{aligned}$$

在上述一系列的倍乘和加法(或减法)来完成的乘除运算方法中,我们应该注意到,其中蕴含着一条数学上的定律,即任何自然数都可以用等比数列 1,2,4,8,…,2^n,…中的某些项之和来表示，这也正是每个自然数都可以用二进制的方式表示出来的原因.

再例如,古埃及的代数知识主要是“堆算”,而古埃及人解决堆算问题主要使用的是“试位法”.所谓试位法,即先找一个满足部分条件的适当数代替未知数,代入已知条件中尝试一下,看结果与实际相差多少,然后按比例增加或减少该数使之完全符合条件.例如 $x+\frac{x}{7}=24$,取 $x=7$(因为 x 一定是 7 的倍数)代入方程,算得左边等于 8,它是 24 的$\frac{1}{3}$,故应当给所尝试的数扩大 3 倍,即正确答案应该是 $x=7\times3=21$.

莫斯科纸草书上有一个二次方程的问题:“把面积为 100 的正方形分成两个小正方形,使其中一边是另一边的四分之三”.用现代数学符号表示其试位法的过程是:设两个小正方形的边长分别为 x,y,则可列出方程：

$$\begin{cases}x^2+y^2=100,\\x:y=1:\frac{3}{4}.\end{cases}$$

取 $x'=1,y'=\frac{3}{4}$尝试,则 $x'^2+y'^2=1\frac{9}{16}$.因为 $\sqrt{100}\div\sqrt{1\frac{9}{16}}=10\div\frac{5}{4}=8$,所以 $x=1\times8=8,y=\frac{3}{4}\times8=6$ 即为正确答案.

事实证明,数学方法是体现知识内容的方法,知识内容是提供数学方法的知识内容.常常是方法在概念中找,知识在方法中生.

二、数学方法的意义

人类在认识世界和改造世界的过程中,总是要根据一定的目的为自己确定各式各样的任务.然而,“我们不但要提出任务,而且要解决完成任务的方法问题.我们的任务是过河,但是没有桥或没有船就不能过.不解决桥或船的问题,过河就是一句空话.不解决方法问题,任务也是瞎说一顿.”(《毛泽东选集》第一

卷,第 139 页,北京:人民出版社,1991 年版.)数学方法就相当于这里讲的桥或船的问题.

下面,我们具体用阿基米德(Archimedes)螺线与古典几何作图三大难题来说明数学方法的意义.

众所周知的三大几何作图难题是:倍立方体问题,即求作一立方体,使该立方体的体积为给定立方体的两倍;三等分角问题,即分一个给定的任意角为三个相等的部分;化圆为方问题,即作一个正方形,使其面积等于给定的一个圆的面积.

这三大几何作图难题在提出之后两千多年的数学发展长河中,真的是推波助澜,作用巨大.虽然用直尺和圆规这两种工具能够成功地解决许多其他作图问题,但对这三个问题却不能精确求解,而只能近似求解.对其方法的深入探索给希腊几何学以巨大的影响,并引出大量的发现,例如,圆锥曲线、许多二次和三次曲线以及几种超越曲线(如割圆曲线)的发现,还有后来有关有理域和群论的若干发展.

数学家发现了许多方法解决三大难题,但都不是严格意义上的尺规作图,其中包括阿基米德螺线、蔓叶线、蚌线等一些高次平面曲线解法.其中阿基米德螺线既可以解决化圆为方问题,又能解决三等分角问题,而且方法很简单,一箭双雕.有很多学数学的人,只知道阿基米德螺线,但并不了解阿基米德螺线是阿基米德在公元前 225 年为解决化圆为方问题而发现的,并用螺线成功地解决了化圆为方问题和三等分角问题.

平面上的一条射线绕其端点作匀速转动的同时,沿着该射线做匀速运动的点的轨迹被称为阿基米德螺线.当我们把动点 P 与射线的端点 O 重合时转动射线的位置 OA 取作极坐标系的极轴,转动过的角度 $\angle AOB$ 作为极角 θ,即建立了极坐标系.由于极径 OP 与 $\angle AOP$ 成正比例,所以得到阿基米德螺线的极坐标方程为 $r=a\theta$(a 为比例常数).

如图 1-1 所示,以 O 为圆心,以 a 为半径,作一圆,分别交 OA,OB 于 M,N 两点,则 OP 的长度与两条射线 OA,OB 之间所夹的弧长相等,即 $|OP|=\overset{\frown}{MN}=a\theta$.

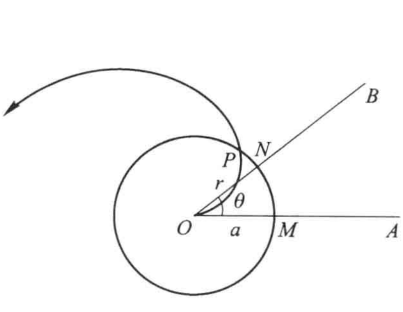

图 1-1

当 $OP\perp OA$ 时,$|OP|=\dfrac{1}{4}\times$圆的周长,又

$$S_{圆}=\pi a^2=\frac{a}{2}\times 2\pi a,$$

$$S_{圆} = \frac{a}{2} \times 4|OP| = 2a|OP|.$$

设所求作正方形的边长为 x，则 $x^2 = S_{圆} = 2a|OP|$.

因此，所求正方形的边长是 $2a$ 与 $|OP|$ 的比例中项，即圆的直径和垂直于 OA 的螺线的向径长之比例中项. 这样就解决了化圆为方问题.

再用阿基米德螺线三等分任意角 $\angle AOB$. 设 OB 交螺线于 P 点，先三等分线段 OP，若分点为 P_1，P_2，再以 O 为圆心，分别以 OP_1 和 OP_2 为半径画圆，两圆分别与螺线相交于 T_1，T_2 两点.

由于 $OT_2 = 2OT_1$，$OP = 3OT_1$，T_1，T_2，P 都是螺线上的点，从而 OT_2 与 OA 之间所夹圆弧等于 OT_1 与 OA 之间所夹圆弧的 2 倍，OB 与 OA 之间所夹圆弧是 OT_1 与 OA 之间所夹圆弧的 3 倍，所以，$\angle AOT_1 = \angle T_1OT_2 = \angle T_2OP$. 即 OT_1，OT_2 三等分 $\angle AOB$.

历史上类似这样的近似解法还有许多. 三大几何作图难题不论是对希腊几何学，还是对整个数学，影响都极为深远. 事实上，希腊数学的头三百年，有三条主要的互不相同的发展路线：第一条路线是被编入欧几里得（Euclid）《原本》的那些材料；第二条路线是有关无穷小、极限以及求和过程的各种概念的发展，这些概念直到现代微积分发明之后，才得到彻底澄清；第三条路线是高等几何，即圆和直线之外的曲线以及球面和平面之外的曲面的几何学发展路线. 高等几何学中的大部分内容起源于对解三大作图难题的研究.

三、数学方法的认识

数学方法是指在数学活动中，从实践上和理论上把握现实，从而达到某种目的的途径、手段和方式的总和. 数学方法为数学问题的求解和数学知识的获取提供了可能，没有数学方法就没有数学的进展. 西方语言中“方法”一词，源于希腊文 μετοδos，从原文词义上看，表示沿着某条道路行进.

数学方法与数学思想既有区别又有联系. 数学思想是在数学研究活动中的根本想法，是对数学对象的本质认识，是对具体的数学知识和方法做更进一步的认识过程中提炼概括形成的一般性观点. 通常认为，在强调数学活动的指导思想时称为数学思想，在强调具体操作过程时则称为数学方法. 思想就是数学家常说的“idea”，方法就是“technique”. 在解决数学问题时，首先应该有“idea”，然后再寻找具体的“technique”. 反之，“technique”体现着“idea”.

数学是一个有机的整体，打个比方，问题是数学的心脏，知识是数学的躯体，方法是数学的行为，思想是数学的灵魂. 数学彰显其生命力的一个必要条件就是内部的数学问题、知识、方法、思想之间的相结合，它们之间是相互影响、相互联

系、和谐发展的辩证统一体. 为解决实践上和理论上提出的各类数学问题,势必创造出各种不同的数学方法,相应的数学知识也就接踵而来. 例如,为寻求高次代数方程求根公式问题,不知多少数学家为之努力,创立了许多的方法和理论,直到伽罗瓦(Galois)创立了"群论",才使这一向人类智慧挑战的难题得到彻底解决. 伽罗瓦群论是近代数学的重大突破,被称为"群论"思想方法,然而却是源于那个代数难题. 为了解决代数方程根的个数问题,运用引进复数的思想方法,从而产生了著名的"代数学基本定理".

数学中解决具有相同性质问题所用的通用方法,我们可称之为通法. 通法是数学思想和数学方法在解决数学问题中的集中体现. 数学的发展史几乎就是数学通法的发展史. 例如,微积分学的创立与发展几乎是数学通法创立与发展的范例. "微元法"、"拉格朗日乘(Lagrange)数法"、"洛必达(L'Hospital)法则"等,不仅是微积分学知识的重要组成部分,也为解决具体的问题提供了强有力的方法. 欧拉(Euler)在解决"七桥问题"的同时给出了欧拉定理,这个定理为解决同类的图论问题提供了有力的方法,同时还为图论的研究和发展指明了方向. 再如泛函分析中的压缩映射定理,其证明方法是迭代法,而这个迭代法在数值分析、动力系统等诸多领域有着广泛的应用. 压缩映射定理也称为不动点定理,在求解诸如代数方程、微分方程、积分方程等各种各样的方程和数理经济学等诸多领域里都有着广泛的应用.

可以看出,数学的通法常常和数学的重要定理联系在一起. 事实上,许多数学定理及其证明都是通法的代表. 数学广泛的应用性实际上就是指其通法的普遍性程度上更高,可以涵盖非常广泛的情形. 这些数学定理不仅是构建数学知识理论的构件,也提供了解决问题的一般思维方法. 数学的通法是数学方法的核心,是现代数学发展的基石.

四、数学方法论

数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等一般法则的一门学问.

如果把数学研究或解决数学问题比作打仗,那么数学基本知识就是"兵力",基本的数学方法就是"兵器",调动数学知识、运用数学方法的数学方法论就是"兵法". 在数学学习过程中,掌握基本概念和定理固然重要,了解这些概念是如何形成的以及获得这些定理的思想方法,有时更重要. 因为思想方法不仅有趣、富有启发性,而且可以引导人们去研究新问题、做出新发现.

§2　数的产生与数进制的创生及分类

人类社会有记载的历史大约有 5 000 年左右,数学的历史可能比 5 000 年更长. 可以说数学是随着人类的产生而产生的,更确切地说数学产生于人类的生产实践,产生于劳动成果的剩余,与此同时,数学方法也就随之产生与发展. 我们提一个既简单而又耐人寻味的问题,来探讨数学方法的产生和发展,那就是:为什么我们现在常用的记数和计数都采用十进制?

记数是一种最基本的数学方法,也是产生最早的数学方法之一,在日常生活、文化和科学技术活动中,还用到其他的进制,比如角进制是六十进制,这是因为$\frac{1}{60}$是$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{10}$,$\frac{1}{12}$,$\frac{1}{15}$,$\frac{1}{30}$等的最大公约分数. 另外还有四进制、八进制、十二进制、十六进制等,特别是计算机中要用到二进制. 那么为什么大都采用十进制呢?

这还得从数的产生谈起,我们知道,“远古时期,饮血茹毛”,类人猿的生活环境和生存条件是非常残酷的,赤手空拳,或最多拿根树枝跟野兽搏斗,但残酷的环境和条件,不但锻炼了人的肢体,更重要的是锻炼了人的大脑,使人们逐渐地聪明起来,石刀、石斧、石箭等工具的产生,使人们的“生产力”大大提高,生存能力大大增强,有了剩余的劳动产品,需要记录下来,这就产生了数.

数的产生也是一种由实践到理论的“映射”或对应. 哲学家罗素(Russll)曾说过:“不知道经过了多少年,人类才发现一对锦鸡与两天同是数字二的例子.”

一个猎物与一个手指对应,两个猎物与两个手指对应,……,十个指头对应完了,就用一根大树枝或大石头“记录”下来,这样就产生了“十进制”. 可见,十进制源于人的双手有 10 个手指头.

除了十进制之外的其他进制都有它的由来和发展历史. 这里,我们把各种进制列一张表(如表 1 - 1),并用一个统一的公式表示一下.

各种进制用一个简单的公式表示为

$$(x)_p = \sum_{i=n}^{m} a_i p^i,$$

其中$(x)_p$表示以 p 为基数(即几进位制中的“几”)的数,a_i 为 $0,1,2,\cdots,p-1$ 中的一个,n,m 为正整数,p 为大于或等于 2 的正整数.

在自然数的十进制中,任意一个自然数可表示为

表 1－1　十进制记数法和其他进制记数法对照表

其他进制 十进制	二	三	四	五	六	七	八	九	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	11	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	100	11	10	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	101	12	11	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	110	20	12	11	10	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	111	21	13	12	11	10	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	1000	22	20	13	12	11	10	8	8	8	8	8	8	8	8
9	1001	100	21	14	13	12	11	10	9	9	9	9	9	9	9
10	1010	101	22	20	14	13	12	11	x（代表10）	x	x	x	x	x	x
11	1011	102	23	21	15	14	13	12	10	y（代表11）	y	y	y	y	y
12	1100	110	30	22	20	15	14	13	11	10	z（代表12）	z	z	z	z
13	1101	111	31	23	21	16	15	14	12	11	10	e（代表13）	e	e	e
14	1110	112	32	24	22	20	16	15	13	12	11	10	f（代表14）	f	f
15	1111	120	33	30	23	21	17	16	14	13	12	11	10	g（代表15）	g
16	10000	121	100	31	24	22	20	17	15	14	13	12	11	10	h（代表16）
17	10001	122	101	32	25	23	21	18	16	15	14	13	12	11	10
18	10010	200	102	33	30	24	22	20	17	16	15	14	13	12	11