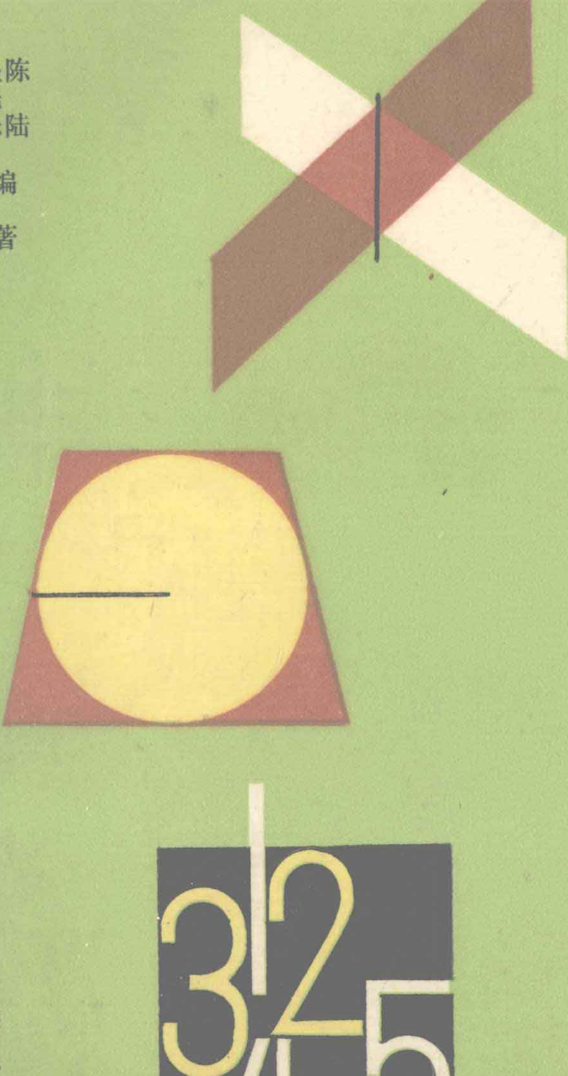
新题型 新思路

高中数学

陈陆 关民乐 编著

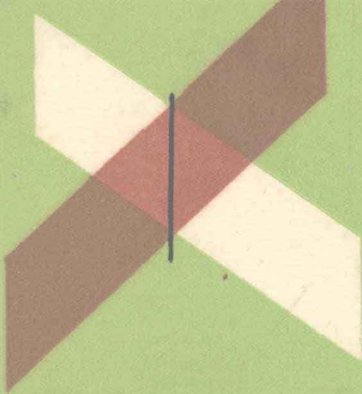


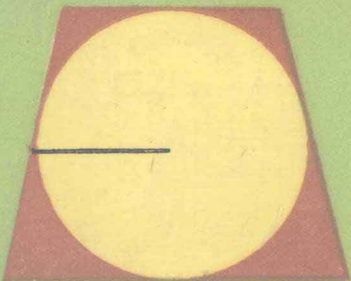
海洋出版社

新题型 新思路

高中数学

陈陆
关民乐 编著





海洋出版社

责任编辑：王铸之

封面设计：宝克孝

ISBN 7-5027-2691-8/G·769 定价 8.20 元

1. 元素的确定性：任何一个元素都能被确切地判断是集合中的元素或不是集合中的元素，二者必居其一，且只居其一；

2. 元素的互异性：对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的．这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的元素，相同的元素归入任何一个集合时，只能算作集合中的一个元素．因此集合中的元素不能重复出现．

3. 元素的无序性：用列举法表示的集合中的元素与顺序无关．

（四） 集合与集合的关系

一些给定的集合，它们之间可以有种种关系，不过，最重要的要算“包含”与“相等”的关系．

1. 子集：对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集．记作

$$A\subseteq B \quad \text{或} B\supseteq A,$$

读作“A包含于B”或“B包含A”．

子集的性质：

（1）对于任何一个集合是它本身的子集．

（2）空集ϕ是任何一个集合的子集，也是它本身的子集，即$\phi\subseteq\phi$．

（3）一个集合有n个元素，那么这个集合包含有2^n个子集．

（4）对于两个集合A与B，如果$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，那么这两个集合相等，记作$A=B$．

这就是说，集合A中的任何一个元素都是集合B中的元素；反之，集合B中的任何一个元素都是集合A的元素，因

而这两个集合所包含的元素完全一样，两个集合就是同一个集合.

（5）对于集合A、B、C，如果$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么$A\subseteq C$.

真子集：如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集．记作$A\subset B$或$B\supset A$.

说明：

（1）特定字母和符号的意义

N：表示自然数集（即全体自然组成的集合），自然数集也是正整数集.

Z：表示整数集（全体整数组成的集合），形如$2n$（$n\in Z$）的整数叫做偶数，全体偶数叫做偶数集；形如$2n+1$（$n\in Z$）的整数叫做奇数，全体奇数称为奇数集．且N是Z的子集.

Q：表示有理数集（全体有理数组成的集合）．N、Z都是Q的子集，根据需要有时还用Q^+表示正有理数集，Q^-表示负有理数集.

R：表示实数集（全体实数组成的集合）．N、Z、Q都是R的子集．实数集与数轴上的点集间建立了一一对应，这两个集合具有类比关系．根据需要有时还用R^+表示正实数集，R^-表示负实数集.

C：表示复数集（全体复数组成的集合）．N、Z、Q、R都是C的子集.

除上述字母具有特定意义外，还有些具有特定意义的符号．例如

$\in$：表示元素与集合的从属关系，如$2\in N$.

$\subseteq$：表示集合间的包含关系．例如，若对任何一个$x\in A$，都有$x\in B$，则有$A\subseteq B$.

$=$：等集符号，表示它两端的两个集合的元素彼此相同，例如$\{2n+1, n\in Z\}=\{4k\pm 1, k\in Z\}$.

ϕ：表示空集.

$\cap$：表示集合与集合之间取交的运算关系．如$\{a, b, c\}\cap\{b, c, d\}=\{b, c\}$

$\cup$：表示集合与集合之间取并的运算关系．如$\{a, b, c\}\cup\{b, c, d\}=\{a, b, c, d\}$.

$-$：表示在全集给定的条件下，对横线下面的集合取补的运算．如设$I=R$，$A=\{x \mid 3x^2-5x-2<0\}$则 $\bar{A}=$

$$\{x \mid 3x^2-5x-2\geqslant 0\}=\{x \mid x\leqslant -\frac{1}{3}\text{或}x\geqslant 2\}.$$

今后在学习过程中还会出现新的各种特定意义的字母和符号，为此，必须识别这些字母和符号，并加深理解，准确使用.

（2）正确理解元素与集合的关系：对于给定的集合，它和元素之间的关系是整体和个别关系．即集合包含它每一个元素，每一个元素也都包含在集合中，所以元素和集合的关系是从属关系．而集合与集合的关系是包含或相等的关系.

2. 交集：由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A、B的交集，记作$A\cap B$，即 $A\cap B=\{x \mid x\in A\text{且}x\in B\}$，见图1-1-1.

交集的性质：

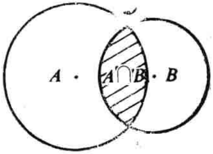


图1-1-1

（1）$A\cap A=A$;

（2）$A\cap\phi=\phi$;

（3）$A\cap B=B\cap A$（交换律）

3. 并集：由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做集合A与集合B的并集，记作$A\cup B$，见图1-1-2，即

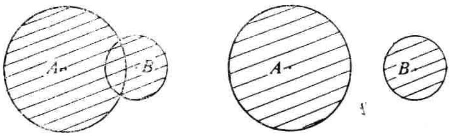


图1-1-2

$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$

并集的性质：

（1）$A\cup A=A$;

（2）$A\cup\phi=A$;

（3）$A\cup B=B\cup A$（交换律）.

4. 全集与补集

（1）全集：在研究集合与集合之间的关系时，这些集合都是某一给定的集合的子集，这个给定的集合叫做全集，用符号I表示．而全集含有所要研究的各个集合的全部元素．

（2）补集：已知全集为I，集合$A\subseteq I$，在I中有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集. 记作$\bar{A}$，即

$$\bar{A}=\{x \mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}.$$

图1-1-3中的大圆内表示全体I，小圆内表示集合A，阴影部分表示集合A在集合I中的补集$\bar{A}$.

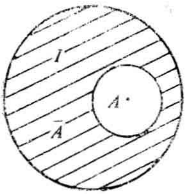


图1-1-3

补集的性质：

①$\bar{\bar{A}}=A$；

②$A\cap\bar{A}=\phi$；

③$A\cup\bar{A}=\phi$；

④$\bar{\phi}=I$；

⑤$\bar{I}=\phi$.

例1 设$I=\{x \mid x\in N，\text{且} x\leqslant 10\}$，$A=\{1，2，4，5，9\}$，$B=\{4，6，7，8，10\}$，$C=\{3，5，7\}$.

求：$A\cap B$，$A\cup B$，$\bar{A}\cap\bar{B}$，$(A\cap B)\cap C$，$(\overline{A\cup B})\cup\bar{C}$.

解：$I=\{x \mid x\in N，\text{且} x\leqslant 10\}=\{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10\}$.

$\therefore \bar{A}=\{3，6，7，8，10\}$，$\bar{B}=\{1，2，3，5，9\}$

$\therefore\ A\cap B=\{4\}$，

$A\cup B=\{1，2，4，5，6，7，8，9，10\}$，

$\bar{A}\cap\bar{B}=\{3\}$，

$(A\cap B)\cap C=\phi$,

$(\overline{A\cup B})\cup\overline{C}=\{3\}\cup\{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

说明：在求集合的交集、并集和补集时，所得的结果要注意元素不重复、不要增加、不要遗漏.

例2. 设集合 $A=\{|a+1|, 3, 5\}$，$B=\{2a+1, a^2+2a, a^2+2a-1\}$，当$A\cap B=\{2, 3\}$时，求$A\cup B$.

〔分析〕 由集合A和集合B的公有元素组成的集合称为集合A和B的交集，由题设知$A\cap B=\{2, 3\}$，即集合A和B都包含有2和3的元素，于是得下列解法.

解：$\because A=\{|a+1|, 3, 5\}$，又$A\cap B=\{2, 3\}$，

$\therefore |a+1|=2$ $\therefore a+1=\pm 2$ $\therefore a=1$或$a=-3$.

当$a=1$时，集合B的元素有$a^2+2a=3$，$2a+1=3$，$a^2+2a-1=2$，那么$a^2+2a=2a+1$，根据集合中元素的互异性， $\therefore a\neq 1$.

当$a=-3$时，那么集合$B=\{-5, 2, 3\}$，

$\therefore A\cup B=\{2, 3, 5\}\cup\{-5, 2, 3\}=\{-5, 2, 3, 5\}$.

例3 已知$A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$ $C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，且$A\cap B\neq\phi$，$A\cap C=\phi$，求a的值.

〔分析〕 $\because A\cap B\neq\phi$，即要求两个集合A和B必有公有元素，而$A\cap C=\phi$即在集合A和C中没有公有元素，于是得解法.

解：$\because B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2, 3\}$,

$C=\{x \mid x^2+2x-8=0\}=\{-4, 2\}$.

由于$A\cap B\neq\phi$，$A=\{x \mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，

当$x=2$时，则$4-2a+a^2-19=0$，解之$a=5$或$a=-3$；

当$x=3$时，则$9-3a+a^2-19=0$，解之得$a=5$或$a=-2$.

要使$A\cap B\neq\phi$，则$a=5$，$a=-2$，$a=-3$.

但$A\cap C=\phi$，且$C=\{-4, 2\}$，

当$a=5$时，则$A=\{2, 3\}$，此时$A\cap C=\{2\}$，

$\therefore\ a\neq 5$；

当$a=-3$时，则$A=\{2, -5\}$，此时$A\cap C=\{2\}$，

$\therefore\ a\neq -3$.

由此可知，要使$A\cap B\neq\phi$且$A\cap C=\phi$，所求$a=-2$.

例4 若$I=R$、$A=\{x \mid (\frac{1}{2})^{(x+2)(x-3)}>1\}$，$B=\{x \mid \log_3(x-a)<2\}$，问当$a$取什么值时，下列各式分别成立.

（1）$A\subset B$；（2）$A\cap B\neq\phi$；

（3）$A\cap B=\phi$；（4）$\overline{A}\cup B=\overline{A}$.

解：$\because A=\{x \mid (\frac{1}{2})^{(x+2)(x-3)}>1\}=\{x \mid -2<x<3\}$.

$B=\{x \mid \log_3(x-a)<2\}=\{x \mid a<x<9+a\}$.

（1）要使$A\subset B$，必须$a\leqslant -2<x<3\leqslant 9+a$，

$\therefore\quad -6\leqslant a\leqslant -2.$

（2）要使$A\cap B\neq\phi$，必须$a<3$且$9+a>-2$，

$\therefore\quad -11<a<3.$

（3）要使$A\cap B=\phi$，必须$a\geqslant 3$或者$9+a\leqslant -2$，

$\therefore\quad a\leqslant -11$或者$a\geqslant 3.$

（4）要使$\overline{A}\cup B=\overline{A}$，即要$B\subseteq\overline{A}$，$\therefore A\cap B=\phi$. 由（3）可知，$a\leqslant -11$或者$a\geqslant 3$.

例5 设集合$A=\{x\mid x=2n+1,\ n\in z\}$，集合$B=\{x\mid x=4m\pm 1,\ m\in z\}$，求证：$A=B$.

〔分析〕 要证明两个集合$A=B$，只要证明$A\subseteq B$且$B\subseteq A$就可以了.

证明：设$x\in A$，由$x=2n+1$，$n\in z$，

当n是偶数时，令$n=2k$（$k\in z$），则$x=4k+1\in B$；

当n是奇数时，令$n=2k+1$，则有

$$x=2(2k+1)+1=4(k+1)-1\in B,$$

$$\therefore A\subseteq B.$$

设$x\in B$，由$x=4m\pm 1$，对于任何整数m，$4m$是偶数，从而$4m\pm 1$是奇数，$\therefore x\in A$.

综合以上得 $A=B$.

二、映射与函数

（一） 映射概念

1. 映射：设A、B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素与之对应，这样的对应叫做从集合A到集合B的映射，记作$f:A\to B$.

A中的元素叫做该映射的原象，B中与之相对应的元素叫象．

关于映射的定义说明下列几点：

（1）集合A中的任何一个元素都无例外地要有B中的元素与之相对应．即A中的任何一个元素都要有象．

（2）要求集合A中的元素的象是唯一的．

（3）集合A中的不同元素可以在集合B中有相同的一个象，即它们的对应可以是“一对一”也可以是“多对一”，但不能“一对多”．

（4）并不要求集合B中的所有元素都有原象．

映射$f:A\to B$，如果进一步还具有下列两个特性

①原象不同，象也不同；

②集合B中任何一个元素都是集合A中某元素的象．

具有上述两个特性的映射叫一一映射．

2． 一一映射：设A、B是两个集合，$f:A\to B$是从集合A到集合B的映射，在这个映射的作用下，对于集合A中的不同元素，在集合B中有不同的象，而且B中每一个元素都有原象，那么这个映射叫做A到B上的一一映射．

那么这个映射$f:A\to B$就确定了另一个映射$f^{-1}:B\to A$，它的对应法则是“寻找映射$f:A\to B$这个过程中的原象”．我们把这后一个映射叫做映射$f:A\to B$的逆映射．

3． 逆映射：设$f:A\to B$是集合A到集合B上的一一映射，如果对于B中的每一个元素b，使b在A中的原象a和它对应，这样所得的映射叫做映射$f:A\to B$的逆映射，记作$f^{-1}:B\to A$．

应该注意：$f:A\to B$与$f^{-1}:B\to A$互为逆映射．逆映射不

能脱离原来的映射而单独存在，而且又有一一映射，我们才谈它的逆映射.

例如：$A=[-1, 0]$，$B=[0, 1]$，由A到B的对应法则f使得A中任一元素x与B中的元素$y=\sqrt{1-x^2}$对应，这个映射是由$A\to B$的一一映射．它的逆映射是由B到A对应法则为f^{-1}的映射，f^{-1}使得B中任一元素y与A中的元素$x=-\sqrt{1-y^2}$相对应.

（二）函数的概念

1．函数：是数学研究的重要对象，从映射的概念可以知道，函数是数集间的映射．设集合A、B都是非空的数集合，那么任意一个映射$f: A\to B$就确定了一个函数关系，A叫定义域．如果映射$f: A\to B$使得B中的每一个元素都在A中有原象，那么集合B称为函数的值域．否则B就不能称为函数的值域.

函数是由定义域、值域以及由定义到值域上的对应法则三部分构成的一类特殊的映射.

习惯上，定义域中的元素用x表示，值域的元素用y表示，这样由映射$f: A\to B$形成的函数记为

$$y=f(x), \quad x\in A.$$

函数是中学数学的重要内容之一，函数知识在初等数学和高等数学中有很强的衔接性．在学习中应充分重视．必须明确下列几点：

（1）x在定义域A内一个确定的值a时，函数的对应值记作$f(a)$．其次要说明，$f(a)$的涵义与$f(x)$不同，$f(a)$表示自变量$x=a$时所得的函数值，它是一个常量；而

$f(x)$是x的函数，在通常的情况下，它是一个变量.

（2）在同时研究两个或多个函数时，要用不同的符号来表示，除用$f(x)$表示外还常用$F(x)$、$G(x)$、$H(x)$等符号来表示函数. 这些函数的自变量相同都是x，而函数的对应法则或者说函数的结构形式为不同的函数式.

而$f(x)$与$f(t)$表示自变量不同而函数的对应法则或结构形式相同的两个函数，一般这两个函数的定义域相同.

2. 反函数：反函数是一个十分重要的概念，如果给定一个函数$y=f(x)$，$x\in A$是由定义域A到值域B的一一映射，那么它就有逆映射，由逆映射所确定的函数，就是所给函数的反函数. 后一个函数的定义域是B，值域是A. 如果仍然把定义域中的元素用x表示，值域中的元素用y表示. 那么反函数记作$y=f^{-1}(x)$ $x\in B$.

下面明确几点

（1）函数$y=f^{-1}(x)$，$x\in B$与函数$y=f(x)$，$x\in A$互为反函数. 反函数不能脱离原来的函数而单独存在. 所以，对于任意一个函数来说，不一定有反函数，如果有反函数，那么它们就互为反函数.

（2）一对互为反函数的定义域、值域互换，这就是说，反函数的定义域与值域正好是原函数的值域与定义域.

（3）互为反函数的两个图象关于直线$y=x$对称.

（4）求给定函数$y=f(x)$的反函数时，一般需要三个步骤：

①反解：即解关于x的方程$y=f(x)$，达到用y表示x

的目的；

②交换：把上一步得到的用y表示x的关系式中的x、y对调，即把y改写成x，把x改写成y；

③求出并注明反函数的定义域.

例 求下列函数的反函数，并求反函数的定义域和值域.

（1）$y=x^2+1$（$x\geqslant0$）；

（2）$y=-\sqrt{-2x+2}$；

（3）$y=\dfrac{x-2}{2x-1}$（$x\in R$且$x\neq\dfrac{1}{2}$）.

解：（1）由$y=x^2+1$，$x\geqslant0$的值域是$y\in[1,+\infty)$，反函数的定义域是$[1,+\infty)$，值域$[0,+\infty)$

由$y=x^2+1$，$\because x\geqslant0\therefore x=\sqrt{y-1}$.

交换x，y就得到$y=\sqrt{x-1}$.

所求的反函数为$y=\sqrt{x-1}$，它的定义域为$[1,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$.

（2）由$y=-\sqrt{-2x+2}$，定义域$(-\infty,1]$，值域$(-\infty,0]$，反函数的定义域$(-\infty,0]$，值域$(-\infty,1]$.

$$由y=-\sqrt{-2x+2}，得x=-\frac{1}{2}y^2+1.$$

交换x，y就得到$y=-\dfrac{1}{2}x^2+1$.

所求的反函数为$y=-\frac{1}{2}x^2+1$，它的定义域$(-\infty, 0]$，值域为$(-\infty, 1]$.

(3) 由$y=\frac{x-2}{2x-1}$，得$x=\frac{y-2}{2y-1}$

交换x，y就得到$y=\frac{x-2}{2x-1}$.

所求的反函数为$y=\frac{x-2}{2x-1}$，它的定义域是$x\neq\frac{1}{2}$，值域为$y\neq\frac{1}{2}$.

说明：从上面例题可知，一个函数$y=f(x)$的定义域、值域分别是它的反函数$y=f^{-1}(x)$的值域、定义域；另外互为反函数的两个函数如果有解析式一般是不同的，但是也有少数例外，如例题中的(3)函数$y=\frac{x-2}{2x-1}$的反函数仍是$y=\frac{x-2}{2x-1}$.

(三) 函数的解析式及其求法

函数关系有三种表示法：解析法、列表法和图象法. 图象法是借助于图形给出函数对应规律的方法. 它的优点是醒目直观，能把函数的变化状态直观地表达出来. 列表法是将一系列自变数的值与其相对应的函数值写出来表示两个变量间的函数对应规律的方法. 它的优点是对应规律明确，易于对表中所列的自变量的值查出其对应的函数值. 解析法也叫

公式法，是用含有两个变量和各种数学运算的等式来表示两个变量间的函数对应规律的方法．它的优点是简单明确地表达了自变量和函数之间的相依关系，便于进行理论分析和计算，在研究函数时，三种方法常结合来使用．

由已知条件求函数$f(x)$的解析式，是函数这部分教材的一个基本的问题，它不仅能深化函数概念，还常常联系着一些重要的解题方法和技巧，下面是求函数$f(x)$的常用方法．

1．代换法：代换法也称变量替换或设辅助元素法．它的基本思想是将函数中的自变量x适当地代换以别的自变量（在代换时应注意力求使函数的定义域不发生变化），得到一个新的函数方程．然后对新变量求出结果，再代回求出关于原变量的结果．

例 已知$f\left(\frac{3}{x}-1\right)=\log_a(2x+1)$，求$f(x)$．

分析 如果我们把$\frac{3}{x}-1$看作t，那么左边就是一个关于t的函数$f(t)$，只要我们对函数方程$\frac{3}{x}-1=t$中的x用t来表示，将右边化为t的表达式，问题即可得到解决．

解：设$\frac{3}{x}-1=t$，则$x=\frac{3}{t+1}$．

那么 $f(t)=\log_a\left[2\left(\frac{3}{t+1}\right)+1\right]$