第一卷

上册（第二版）

高中竞赛数学教程

熊 斌 刘诗雄 主编

全国优秀出版社
武汉大学出版社

第一卷
上册（第二版）

高中竞赛数学教程

■ 主编　熊　斌　刘诗雄

■ 编著　（以姓氏笔画为序）

边红平　冯志刚　刘诗雄

岑爱国　范端喜　姚华鹏

郭希连　董方博　裴光亚

熊　斌

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中竞赛数学教程：第1卷上册/熊斌，刘诗雄主编. —2版. —武汉：武汉大学出版社，2003.1

ISBN 7-307-03643-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①熊… ②刘… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 050963 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：黄添生　　版式设计：支　笛

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)

印刷：武汉大学出版社印刷总厂

开本：787×960　1/16　印张：21.25　字数：355 千字　插页：1

版次：1993 年 3 月第 1 版　　2003 年 1 月第 2 版

2003 年 1 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 7-307-03643-6/G·585　定价：24.00 元

再版前言

本书自初版以来，受到了广大读者的持久欢迎。作为作者，没有比经常收到读者因使用此书而获得数学学习长足进步或参加国内外竞赛获奖后写来感谢信更高兴的事了——能为中国数学基础教育的提高和科学人才的发现培养尽绵薄之力这正是我们的初衷！谨借此书再版之机，向为中国数学教育事业倾情奉献的广大数学教育工作者致以崇高的敬意！

此次再版，我们对原书作了较大修改。其中第一卷修改由熊斌、冯志刚、范端喜完成；第二卷由刘诗雄、郭希连、边红平、岑爱国、姚华鹏完成。诚恳欢迎广大读者指正书中错漏。

编　者

2002 年 12 月

序　言

数学竞赛是当今中国教育界的热点之一。自1986年我国派出整队参加国际奥林匹克数学竞赛以来，连获佳绩，令世人侧目。国人在欢欣之余，不断升温，以至各级领导、各类学校都将它列入议事日程，此种“热”，在世界上也堪称独步。

关于“数学竞赛”在数学教育中的地位和作用，国际上是有争论的。1992年8月，在加拿大魁北克市举行的第七届国际数学教育会议上，就有一场特意设计的辩论会（Crossfire），题目就是数学竞赛。会上，攻之者说“数学竞赛只为少数天才服务，题目怪偏，不反映数学的应用功能，在社会公众中带来不好影响。”辩之者称“数学竞赛是培养学生数学兴趣的重要途径，竞赛题思考性强，有助于创造性能力的培养，天才学生的选拔对整个国家的人才开发有利等等。”辩论没有统一的结论，但是多数人似乎赞成数学竞赛，问题是要组织得好，尽量使多数人受益，数学题目有很多档次，应该在不同水平上组织竞赛，吸引更多的人参加。

我想，这里还是用得到一句名言：“在普及的基础上提高，在提高的指导下普及。”我国的数学竞赛已取得巨大成绩，频夺奖牌之际，今后也许应在普及上多下些功夫，多从教育意义上着眼。

有念及此，恰闻熊斌、刘诗雄等先生编著《高中竞赛数学教程》一书，洋洋近百万字中，有一部分内容安排得和当今的数学教学进度同步，便于一般教师采用，这倒是一个进步。数学竞赛和日常教学相结合，该会更有生命力吧！

作者告诉我，此书非常全，又非常新，几乎囊括了历届的竞赛题及世界各国近几年来的试题，可称数学竞赛的“百科全书”。以我国数学竞赛规模之大，水平之高，出这样一部“全书”，应该是合适的。

二位主要作者都是30岁上下的年轻人，尤令人高兴，我国的数学竞赛专家，早期由华罗庚、苏步青等亲自领导。近10年来则以中国科技大学等高校的一批教授为中坚。现在，欣喜地看到第三梯队也在成长。这是我国数学竞赛事业继续兴旺的标志之一。我想：他们的努力将会是跨世纪

的，应该给予支持。我对数学竞赛可说是外行，但因希望中国数学竞赛继续取得成功，遂乐于作此序，并就教于方家。

张奠宙

1992年10月8日于华东师大

前　言

数学奥林匹克是一项历史悠久的国际性智力竞赛活动。自 1894 年匈牙利揭开现代中学生数学竞赛的序幕始，近百年来，开展数学竞赛的范围由欧洲而北美，而澳洲，而亚洲、非洲，不断扩大。尤为引人注目的是，在有着五千年光辉文明的中华大地，鼓励、支持和参加数学竞赛正在成为一种社会风尚。

悠久的历史，普遍的热情，广泛的参与，促成了数学奥林匹克的形式和内容日臻完善。一门奥林匹克数学（又称竞赛数学）正在发育成熟。奥林匹克数学是数学百花园中的一株奇葩，她把现代的数学内容与趣味性的陈述、独创性的技巧有机地结合起来，充分展示了数学的统一美、简洁美、对称美和奇异美。

作为一次甘冒失败风险的尝试，我们编写了这套《高中竞赛数学教程》。也许她过于早产，过于稚嫩。但我们还是抱着聊胜于无的想法将她献给我们所敬重的数学教育界的前辈、专家学者和年轻的同仁，献给跃跃欲试立志在数学奥林匹克赛场上一抖雄风的广大中学生朋友。

鉴于数学奥林匹克培训在我国已经形成的特点，《高中竞赛数学教程》的编写突出了以下两点：(1) 基础与提高并重，本书采用同一内容分“A”和“B”两部分的编写方法，“A”强调基础，帮助学生从竞赛的角度进一步深化对中学数学内容的认识，掌握中学数学以外的竞赛内容；“B”强调提高，帮助学生掌握奥林匹克数学的一些较难的内容和技巧。(2) 同步与超前结合。“A”内容顺序与中学数学内容同步，但在数学思想方法的渗透和思维能力与技巧的培养方面又有一定的超前性，以便帮助那些出类拔萃的学生更快地提高；“B”则不受教材知识顺序的限制，在突出重点的基础上加强知识和方法的纵横联系，帮助学生从整体上把握奥林匹克数学的内容，提高数学素养和综合解题的能力。

这套《高中竞赛数学教程》由熊斌、刘诗雄共同策划和主编。其中第2,4,5,7,8,9,10,13,14 章由熊斌和冯志刚编写；第 3,6,16,20 章由裴光亚编写；第 15,18,19 章由董方博编写；第 1,11,12,17 章由刘诗雄编写。

正值《高中竞赛数学教程》出版之机，我们向热情为本书题写书名的全国政协副主席、我国数学竞赛创始人之一的著名数学家苏步青老前辈致

以无比的敬意和谢忱；向支持和关心本书写作的数学家、数学教育家张奠宙教授致以崇高的谢意；我们要感谢为数学竞赛作出贡献的所有专家学者和中学数学教师，本书的许多材料来源于他们的智慧和创造。

由于水平所限，书中错漏难免，敬请专家和读者批评指正。作为抛砖引玉，我们热情地期待更多的优秀奥林匹克数学教材问世。

编　者

1992 年 9 月 1 日

符号说明

$\mathbf{N}$	自然数 $0,1,2,\cdots$ 构成的集合
$\mathbf{N}^{+}$	正整数集
$\arg z$	复数 z 的辐角主值
$\tan\alpha$	角 α 的正切函数值
$\cot\alpha$	角 α 的余切函数值
(a,b)	整数 a,b 的最大公约数
$[a,b]$	整数 a,b 的最小公倍数
$a\mid b$	整数 a 能整除 b
$p^{\alpha}\parallel a$	表示 $p^{\alpha}\mid a$，而 $p^{\alpha+1}\nmid a$，这里 p 为质数，$\alpha\in\mathbf{N}^{+}$
$[x]$	不超过实数 x 的最大整数
$\{x\}$	实数 x 的小数部分，即 $\{x\}=x-[x]$
$\binom{n}{m}$	从 n 个元素中选出 m 个元素的组合数
$\delta_m(a)$	a 对模 m 的指数
$\mathbf{Z}[x]$	整系数多项式全体构成的集合
$\deg f$	多项式 $f(x)$ 的次数

目 录

第1章 集 合

对于集合我们并不陌生. 我和你相见在"人"的集合里; 全体正在参加数学竞赛训练的中学生构成一个集合. 在19世纪德国数学家的集合里有一个光辉的名字——康托(George Cantor, 1845～1918), 因为他竖起了集合理论的丰碑而光耀后世. 至今, 集合的理论和方法已渗透到数学的各个领域, 成为数学金字塔最重要的基础之一.

在这里, 我们并不关心系统的集合理论, 情有独钟的只是那些在数学竞赛中时常出现的集合问题, 有些问题是代数问题, 有些问题属于组合内容, 但是作为一种准备, 我们要在此作些简单介绍.

A

§1.1 集合的概念与运算

1. 元素与集合的关系

用描述法表示一个集合, 基于下面的

概括原则 对任意给的一个性质 P, 存在一个集合 S, 它的元素恰好是具有性质 P 的一些对象, 即

$$S=\{x\,|\,P(x)\},$$

其中 $P(x)$ 表示"x 具有性质 P".

由这种描述, 我们知道, 判断一个对象 x 是否为集合 S 的元素, 等价于判断 x 是否具有性质 P.

例1 设 A 是两个整数平方和的集合, 即 $A=\{x\,|\,x=m^2+n^2, m,n\in\mathbf{Z}\}$.

(1) 证明: 若 $s,t\in A$, 则 $st\in A$.

(2) 证明: 若 $s,t\in A$, $t\neq0$, 则 $\frac{s}{t}=p^2+q^2$, 其中 p,q 是有理数.

分析 欲证 $st\in A$，只需说明 st 是两个整数的平方和即可.

证 (1) 由 $s,t\in A$，可设

$$s=m_1^2+n_1^2,\quad t=m_2^2+n_2^2,$$

其中 m_1,n_1,m_2,n_2 均为整数. 于是

$$\begin{aligned}st&=(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)\\&=m_1^2m_2^2+2m_1m_2n_1n_2+n_1^2n_2^2+m_1^2n_2^2-2m_1m_2n_1n_2+m_2^2n_1^2\\&=(m_1m_2+n_1n_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2,\end{aligned}$$

即 st 是两个整数的平方和. 故 $st\in A$.

(2) 由于 $s,t\in A$，由(1)可知，$st\in A$. 于是可令 $st=m^2+n^2$，m,n 是整数. 又 $t\neq0$，因此

$$\frac{s}{t}=\frac{st}{t^2}=\left(\frac{m}{t}\right)^2+\left(\frac{n}{t}\right)^2.$$

而$\frac{m}{t},\frac{n}{t}$均为有理数，故命题得证.

例 2 已知元素$(1,2)\in A\cap B$，其中集合 A,B 分别是

$$A=\{(x,y)\mid ax-y^2+b=0\},\quad B=\{(x,y)\mid x^2-ay-b=0\}.$$

求 a,b 的值.

解 由交集的定义知，$(1,2)\in A$，且$(1,2)\in B$，于是

$$\begin{cases}a-4+b=0,\\1-2a-b=0.\end{cases}$$

解得 $a=-3$，$b=7$.

说明 事实上，集合 A 和集合 B 均为二次函数的图像，$(1,2)$是它们的一个交点.

例 3 设 S 为满足下列条件的有理数集合：

(1) 若 $a\in S$，$b\in S$，则 $a+b\in S$，$ab\in S$；

(2) 对任意一个有理数 r，三个关系 $r\in S$，$-r\in S$，$r=0$ 有且仅有一个成立.

证明：S 是由全体正有理数组成的集合.

证 对任意的 $r\in\mathbf{Q}$，$r\neq0$，由(2)知，$r\in S$ 或 $-r\in S$ 之一成立. 再由(1)，若 $r\in S$，则 $r^2\in S$；若 $-r\in S$，则 $r^2=(-r)(-r)\in S$. 总之，对任意的非零 $r\in\mathbf{Q}$，均有 $r^2\in S$.

取 $r=1$，则 $1=1^2\in S$. 由(1)，$2=1+1\in S$，$3=1+2\in S$，…，可知全体正整数都属于 S.

设 $p,q\in\mathbf{N}^+$，由(1)知 $pq\in S$. 又由前面证明知$\frac{1}{q^2}\in S$，所以$\frac{p}{q}=pq\cdot\frac{1}{q^2}\in S$. 因此，$S$ 含有全体正有理数.

再由(2)知，0及全体负有理数不属于 S. 故 S 是由全体正有理数组成的集合.

2. 两个集合之间的关系

在两个集合之间的关系中，我们感兴趣的是"子集"、"真子集"、"相等"这三种特殊关系. 这些关系是通过元素与集合的关系来揭示的，因而判断两个集合之间的关系通常可从判断元素与这两个集合的关系入手.

例4 设函数 $f(x)=x^2+ax+b\ (a,b\in\mathbf{R})$，集合 $A=\{x\mid x=f(x),\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=f(f(x)),\ x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 证明：$A\subseteq B$.

(2) 当 $A=\{-1,3\}$时，求集合 B.

证 (1) 对任意的 $x_0\in A$，知 $x_0=f(x_0)$，$x_0\in\mathbf{R}$. 于是

$$f(f(x_0))=f(x_0)=x_0.$$

故 $x_0\in B$. 所以 $A\subseteq B$.

(2) 因 $A=\{-1,3\}$，所以

$$\begin{cases}(-1)^2+a\cdot(-1)+b=-1,\\ 3^2+a\cdot 3+b=3.\end{cases}$$

解之得 $a=-1$，$b=-3$. 故 $f(x)=x^2-x-3$. 由 $x=f(f(x))$得

$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-x-3=0.$$

因为 $A\subseteq B$，故 $-1,3$ 是上面方程的两个根，从而因式分解可得

$$(x^2-2x-3)(x^2-3)=0.$$

解得 $x=-1,3,\pm\sqrt{3}$. 所以，$B=\{-1,3,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

例5 设集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,\ m,n,l\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{v\mid v=20p+16q+12r,\ p,q,r\in\mathbf{Z}\}$. 求证：$M=N$.

证 对任意的 $u\in M$，设 $u=12m+8n+4l$，$m,n,l\in\mathbf{Z}$，则

$$u=20n+16l+12(m-n-l),$$

其中 $n,l,m-n-l\in\mathbf{Z}$. 故 $u\in N$. 于是 $M\subseteq N$.

又对任意的 $v\in N$，设 $v=20p+16q+12r$，$p,q,r\in\mathbf{Z}$，则

$$v=12r+8\cdot(2q)+4\cdot(5p),$$

其中 $r,2q,5p\in\mathbf{Z}$，即 $v\in M$. 于是 $N\subseteq M$.

综上所述，$M=N$.

说明 欲证 $A=B$，通常证明 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

例6 已知 S_1,S_2,S_3 为非空整数集合，且对于1,2,3的任意一个排列 i,j,k，若 $x\in S_i$，$y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$.

(1) 证明：S_1,S_2,S_3 三个集合中至少有两个相等.

(2) 这三个集合中是否可能有两个集无公共元素？

证 (1) 由已知，若 $x\in S_i$，$y\in S_j$，则

$$y-x\in S_k,\quad (y-x)-y=-x\in S_i.$$

所以每个集合中均有非负元素.

当三个集合中的元素都为零时，命题显然成立.

否则，设 S_1,S_2,S_3 中的最小正元素为 a，不妨设 $a\in S_1$. 设 b 为 S_2，S_3 中最小的非负元素，不妨设 $b\in S_2$. 则 $b-a\in S_3$.

若 $b>0$，则 $0\leqslant b-a<b$，与 b 的取法矛盾. 所以 $b=0$.

任取 $x\in S_1$，因 $0\in S_2$，故 $x-0=x\in S_3$. 所以 $S_1\subseteq S_3$. 同理 $S_3\subseteq S_1$. 所以 $S_1=S_3$.

(2) 可能. 例如 $S_1=S_2=\{奇数\}$，$S_3=\{偶数\}$显然满足条件，但 S_1 和 S_2与 S_3 都无公共元素.

3. 交集、并集、补集和差集

由交集和并集的定义，不难证明这两种集合运算的交换律和结合律. 利用韦恩图，还可以验证下面的两个结论：

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

摩尔根法则：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 7 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$. 问：

(1) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合？

(2) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有三个元素的集合？

解 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组

$$\text{(i)}\ \begin{cases}ax+y=1,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}\qquad \text{(ii)}\ \begin{cases}x+ay=1,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

的解集. 由(i)解得 $(x,y)=(0,1)$，$\left(\dfrac{2a}{1+a^2},\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$；由(ii)解得

$$(x,y)=(1,0),\ \left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right).$$

(1) 使$(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能：

$$①\ \begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\[2mm] \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1;\end{cases}\qquad ②\ \begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\[2mm] \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0.\end{cases}$$

由①得 $a=0$；由②得 $a=1$. 故当 $a=0$ 或 1 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素.

(2) 使$(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素的情况是

$$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2},$$

解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$. 故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素.

例 8 集合 A,B,C（不必相异）的并集

$$A\cup B\cup C=\{1,2,\cdots,10\}.$$

求满足条件的有序三元组(A,B,C)的个数.

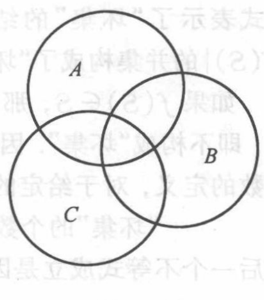

图 1-1

解 由韦恩图知，在求 $A\cup B\cup C$ 时，A，B,C 之间交出 7 个区域，如图1-1所示. 从而 $1,2,\cdots,10$ 中的每一个数都有 7 种选择. 所以，所求的有序三元组的个数为 7^{10}.

说明 这里每个数 $1,2,\cdots,10$ 均有 7 种选择，用到了 A,B,C 不必相异以及(A,B,C)是有序组两个条件.

例 9 设 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 15$，A,B 都是$\{1,2,\cdots,n\}$的真子集，$A\cap B=\varnothing$，且$\{1,2,\cdots,n\}=A\cup B$. 证明：A 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

证 由题设，$\{1,2,\cdots,n\}$的任何元素必属于且只属于它的真子集 A,B 之一. 假设结论不真，则存在如题设的$\{1,2,\cdots,n\}$的真子集 A,B，使得无论是 A 还是 B 中的任何两个不同的数的和都不是完全平方数.

不妨设 $1\in A$，则 $3\notin A$. 否则 $1+3=2^2$，与假设矛盾，所以 $3\in B$. 同样，$6\notin B$，所以 $6\in A$. 这时 $10\notin A$，即 $10\in B$. 因 $n\geqslant 15$，而 15 或者在 A 中，或者在 B 中，但当 $15\in A$ 时，因 $1\in A$，$1+15=4^2$，矛盾；当 $15\in B$ 时，因 $10\in B$，$10+15=5^2$，仍然矛盾. 因此假设不真，即 A 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

为解决某些集合和组合问题的需要，我们引进下面的定义：

定义 由属于集合 A 但不属于集合 B 的全体元素组成的集合叫做集合 A 对 B 的**差集**，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

例 10 设 $M=\{1,2,\cdots,20\}$，对于 M 的任一 9 元子集 S，函数 $f(S)$ 取 1～20 之间的整数值. 求证：不论 f 是怎样的一个函数，总存在 M 的一个 10 元子集 T，使得对所有的 $k\in T$，都有

$$f(T-\{k\})\neq k \quad (T-\{k\}\text{即为 } T \text{ 对}\{k\}\text{的差集}).$$

证 如果一个 10 元子集 T 具有性质：对任何 $k\in T$，均有 $f(T-\{k\})\neq k$，我们就称 T 为“好集”. 不是“好集”的 10 元子集称为“坏集”，也就是说，如果 T 为“坏集”，则在 T 中必有一 k_0，使

$$f(T-\{k_0\})=k_0.$$

若令 $S=T-\{k_0\}$，这是一个9元子集，则一方面 $f(S)=k_0$，另一方面 $T=S\cup\{k_0\}$，即

$$T=S\cup\{f(S)\}.$$

上式表示了"坏集"的结构，它可由某一个9元子集 S 生成，即 S 与 $\{f(S)\}$ 的并集构成了"坏集".

如果 $f(S)\in S$，那么 $S\cup\{f(S)\}$ 是一个9元子集，而不是10元子集，即不构成"坏集"．因此任一9元子集按上式至多能生成一个"坏集"(由函数的定义，对于给定的 S，$f(S)$ 是惟一的)．于是，

"坏集"的个数≤9元子集的个数<10元子集的个数.

最后一个不等式成立是因为，9元子集的个数是 C_{20}^{9}，而10元子集的个数是 $C_{20}^{10}=\frac{11}{10}C_{20}^{9}>C_{20}^{9}$.

由此可知，"好集"是存在的.

习题 1.1

A 组

1. 选择题

(1) 设全集是实数集．若 $A=\{x\mid\sqrt{x-2}\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 10^{x^2-2}=10^x\}$，则 $A\cap\overline{B}$ 是(　　).

(A) $\{2\}$　(B) $\{-1\}$　(C) $\{x\mid x\leqslant 2\}$　(D) $\varnothing$

(2) 若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合是(　　).

(A) $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$　(B) $\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$

(C) $\{a\mid a\leqslant 9\}$　(D) $\varnothing$

(3) 集合 A,B 的并集 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$．当 $A\neq B$ 时，(A,B) 与 (B,A) 视为不同的对，则这样的 (A,B) 对的个数有(　　).

(A) 8　(B) 9　(C) 26　(D) 27

(4) 已知 $M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$．那么，使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是(　　).

(A) $a\geqslant\frac{5}{4}$　(B) $a=\frac{5}{4}$　(C) $a\geqslant 1$　(D) $0<a<1$

2. 填空题

(1) 已知 $M=\{x\mid x=a^2+1,\ a\in\mathbf{N}^+\}$，$N=\{x\mid x=b^2-4b+5,\ b\in\mathbf{N}^+\}$，则 M 与 N 的关系是________.

(2) 设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,\ x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,\ x\in A\}$，且 $C\subseteq B$，则实数 a 的取值集合是________.

(3) 集合 $\{x\mid -1\leqslant\log_{1/x}10<-\frac{1}{2},\ x\in\mathbf{N}^+\}$ 的真子集的个数是________.

(4) 已知 X 是方程 $x^2+px+q=0$ 的实数解集，$A=\{1,3,x\}$，$B=\{1,4,7,10\}$，