函数构造的理论与应用

谢庭藩文集

谢庭藩 著

浙江出版联合集团
浙江科学技术出版社

函数构造的理论与应用

谢庭藩文集

谢庭藩 著

浙江出版联合集团
浙江科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

函数构造的理论与应用/谢庭藩著. —杭州：浙江科学技术出版社，2012.4
(谢庭藩文集)
ISBN 978-7-5341-3582-8

Ⅰ.①函… Ⅱ.①谢… Ⅲ.①函数构造论—研究
Ⅳ.①O174.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 270237 号

书　　名	**函数构造的理论与应用　谢庭藩文集**			
著　　者	谢庭藩			
出版发行	浙江科学技术出版社 杭州市体育场路 347 号　邮政编码：310006 联系电话：0571-85170300-61712 E-mail：lwj@zkpress.com			
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司			
印　　刷	浙江新华数码印务有限公司			
经　　销	全国各地新华书店			
开　　本	710×1000　　1/16		**印　张**	22
字　　数	480 000		**插　页**	2
版　　次	2012 年 4 月第 1 版　　2012 年 4 月第 1 次印刷			
书　　号	ISBN 978-7-5341-3582-8		**定　价**	198.00 元

责任编辑　张祝娟　刘雯静　陈　岚　　**装帧设计**　孙　菁
责任校对　马　融　　**责任印务**　崔文红

内 容 简 介

本书主要研讨函数本身的构造性质与一些工具对它逼近程度的关系，以及这种关系在其他诸如分形几何，神经网络等方面的应用。

全书共分成六个部分。第一部分研究的是用有限差的积分代替连续性模来给出Fourier级数绝对收敛的条件。它完全解决了如下的问题：假如函数的Fourier级数是大缺其项的，而且函数只在一点具有Lipα性，那么对于其Fourier系数能说些什么，且深化了Leindler的两个问题的研究，给出了Fourier算子范数的一个更深刻的渐近表达式。

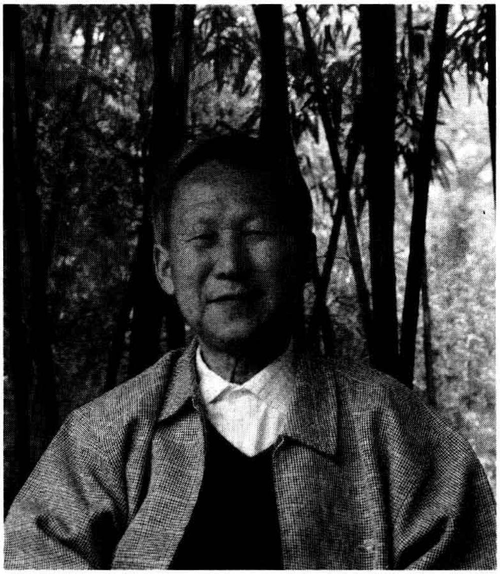
第二部分研究的是Fourier和Vallée Poussin和以及Euler和对函数的逼近。其中单边条件、函数Fourier和逼近的偏差与其导函数Fourier和逼近的偏差之间的关系，以及L尺度下的逼近定理。

第三、四两个部分研究的是多项式、逐段多项式以及插值多项式对函数的逼近，并系统综述了当时国内外在上述几个方面的研究进展，并提出一些值得研究的问题。

第五部分研究的是有特定要求的插值逼近，并发现了一些新的结果。其对Jackson插值算子逼近函数时偏差的下方估计是以前没有过的。

最后一部分是将函数逼近的理论与方法应用于有理逼近，分形函数以及神经网络的构造。对于[−1,1]上的函数$|x|$的有理逼近发展了Newman的工作，给出了具有Box维数为2及Hausdorff维数为2之图像的分形函数类的构造方法，并构造了一类具有插值性质的神经网络，且建立了逼近偏差定理，使人们看到神经网络插值与代数多项式插值的本质差异。

本书涉及资料丰富，可为年轻的研究工作者提供借鉴和参考。



作 者 简 介

谢庭藩，1935 年出生，江西玉山人，教授。1988 年国家人事部授予“中青年有突出贡献科技专家”称号，1991 年开始享受国务院政府特殊津贴。1954 年毕业于浙江师范学院(后来并入杭州大学，最后并入浙江大学)，并留校任教直到 1958 年，其中，1956—1958 年在复旦大学陈建功教授指导下学习函数逼近论与 Fourier 分析。之后，1958—1992 年在杭州大学工作，在这期间，1970—1978 年，在华罗庚教授指导下学习优选法与统筹法，并随他去多个省、市推广应用；1983—1992 年担任杭州大学副校长，并担任决策优化研究所所长。1992 年以后在中国计量学院工作，其中，1992—1996 年担任学院院长，兼任党委副书记、计量与计算科学研究所所长。1996 年以后从事教学和科学研究工作，一直到 2001 年退休，但是，科研工作一直在持续。

曾任中国数学会理事，中国优选法、统筹法及经济数学研究会副理事长，浙江省数学会秘书长，浙江省应用数学研究会理事长，《数学研究与评论》副主编、《Approximation Theory and it's Applications》副主编、《优选与管理科学》副主编，《中国管理科学》编委，中国老教授协会理事。

现任浙江省老教授协会常务副理事长、浙江省管理咨询协会副理事长、浙江省应用数学研究会名誉理事长、中国计量学院计量与计算科学研究所名誉所长、《Analysis in Theory and Applications》编委。

主要研究函数逼近论、Fourier 分析、优化理论、神经网络以及相应的应用。已在国内外发表论文 150 多篇，主要著作有《实函数逼近论》和《优选法的原理与应用》等。完成了多个基金项目及一些实际应用课题，成果显著，多次获得浙江省科技进步奖等奖励，多次列入世界数学家人名录(World Directory of Mathematicians)。1992 年，被 The International Biographical Centre (IBC)授予了 International Order of Merit(“excellentia”)。

自　序

ZIXU

2005 年，我 70 岁了。一些教授提议，将我发表的数学论文选择一部分，出本文集，以供有兴趣的年轻学者参考。这件事酝酿了一些日子，才于 2010 年定下来。

这本文集是从我在 1958—2008 年间发表的论文中筛选出来的，其中有些论文是我和朋友合作的。之所以取名为《函数构造的理论与应用　谢庭藩文集》，是因为这些论文涉及函数本身的构造性质与一些逼近工具对它的逼近程度的关系，以及这种关系在其他诸如分形几何、神经网络等方面的应用。这本文集共分为 6 个部分。由于发表的时间跨度比较大，有些内容或许已有新的发展。但是，它基本上能展示我学习和研究数学的方向和过程。为反映实际情况，有些发表在外文杂志上的论文仍采用原文形式呈现。

我的数学研究工作是从 20 世纪 50 年代后期开始。1956—1958 年，我在复旦大学数学系进修，学习 Fourier 分析与函数逼近论。当时，我国的函数逼近论研究正处于伊始阶段，北京大学、复旦大学等学校的数学系教授们带领年轻人进入了这个领域，在 Fourier 分析的基础上，很快有了成果。在陈建功教授的指导下，我也开始阅读函数逼近论方面的专著和国内外学者所发表的最新论文，逐步进入了对一些问题的深入研究。我在 20 世纪 60 年代前后所发表的几篇论文，都是在陈先生指导下完成的。陈先生对我的指导和提携，我一直铭记在心。

随后，研究工作中断了 10 多年，直到 1977 年才得到恢复。特别是在 1978

年我们开始招收研究生，我和他们一起学习，研究工作的进展随之加快。我的研究方向也从原来的Fourier级数相关方面转入以多项式为逼近工具的研究。1983—1996年期间，我从事学校的行政工作，但是我总是想办法使研究工作得以继续，并在有关插值逼近等方面取得一些新的成果。1997年以来，研究的时间是有了，只是岁月不饶人，常常力不从心。然而，我还是继续开展研究工作。这10多年来，除了原来的研究方向，还涉足有理逼近、分形几何、神经网络以及一些实际应用方面的课题。

说到实际应用，主要是指利用数学方法去解决经济建设和社会发展中的具体问题，在这方面我是很有兴趣的。1970年，我还有幸到北京向华罗庚教授学习优选法与统筹法，并跟随他去一些省、市推广应用，学到了不少解决实际问题的办法，提高了研究能力。在数学方法的具体应用方面，我也取得了一些成果，只是限于篇幅，这些成果都没有纳入这本论文集。

半个世纪的学习和研究，让我深深体会到老师的指导和扶持，朋友的帮助与合作是很重要的。我深切怀念指导和扶持我的老前辈陈建功教授、华罗庚教授、程民德教授、徐瑞云教授，也深切怀念帮助过我的孙永生和沈燮昌教授，

我十分感谢老前辈徐利治教授多年来的热情鼓励，十分感谢杭州大学、中国计量学院的校领导、数学系的领导以及同事们多年来给予我的支持与帮助。

我衷心感谢周信龙教授、孙燮华教授、周颂平教授、谢林森教授、章仁江教授、曹飞龙教授等，他们是我的朋友，也是同行，在多年的合作中，共同学习，一起讨论，对我的帮助很大，我从他们那里也学到了很多东西。

谢庭藩

2011年10月

目　录

MULU

一些特定要求的插值方法

有理逼近及函数图像的结构

Contents

Fourier 级数的几个问题

Some Problems of Fourier Series

科学记录(新辑)
1958,2(12): 491 - 494

Fourier 级数的绝对收敛*

Absolute Convergence of Fourier Series

§1 引 言

设 $f(x)$ 是具有周期 2π 的 L 可积的周期函数,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1.1}$$

是 $f(x)$ 的 Fourier 级数. 对于自然数 l,称

$$\Delta_h^{(l)}f(x)=\sum_{j=0}^{l}(-1)^{l-j}\binom{l}{j}f(x+jh)$$

为 $f(x)$ 的差距 h 的 l 阶有限差. 当 $f(x)$ 是一连续函数时,称

$$\omega_l(\delta,\ f)=\max_{|h|\leqslant\delta}\max_{x}\mid\Delta_h^{(l)}f(x)\mid$$

为 $f(x)$ 的 l 阶连续性模.

С. Б. Стечкин[1] 证明了下面的定理: 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega_l\left(\frac{1}{n},\ f\right)$$

收敛,则级数(1.1) 绝对收敛.

我们首先研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mid a_n\mid^{\beta}+\mid b_n\mid^{\beta})n^{\gamma} \tag{1.2}$$

的收敛性,并且讨论属于 L_p 的函数. 代替 l 阶连续性模,将引进一个新的工具,这就是函数 $f(x)$ 的 l 阶有限差的积分

$$A_n^{(l)}(N,\ f)_p=\left\{N^n\int_0^{2\pi}\mid\Delta_{\frac{\pi}{N^n}}^{(l)}f(x)\mid^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}},$$

---

* 本文全文发表在数学学报,1959,9(12): 199 - 212.

其中 N 是大于 1 的数，$n = 1, 2, 3, \cdots$

В. Г. Челидзе① 证明了这样的定理：如果对于某一大于 1 的整数 N，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(l)}(N, f)_2$$

收敛，则级数(1.1) 绝对收敛.

§2　主要结果

首先，就解决级数(1.2) 的收敛性问题上，有这样的结果：

定理 1　设 $f(x) \in L_p (1 < p \leqslant 2)$，是具有周期 2π 的周期函数，如果对于某一大于 1 的数 N 和自然数 l，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^{(l)}(N, f)_p\}^{\beta} n^{(\gamma+1-\beta)}$$

收敛，其中 $\gamma \geqslant 0,\ 0 < \beta < \dfrac{p}{p-1}$，则级数(1.2) 收敛；

定理 2　设 $f(x)$ 是具有周期 2π 的周期有界变差函数，如果对于某一个自然数 l，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\omega_l(2^{-n}, f)\}^{\frac{\beta}{2}} 2^{n(\gamma+1-\beta)}$$

收敛，其中 $\gamma \geqslant 0,\ 0 < \beta < 2$，则级数(1.2) 收敛.

如取 $\gamma = 0,\ \beta = 1$，我们的定理便包含了 С. Б. Стечкин 及 В. Г. Челидзе 的结果，当 $\gamma = 0,\ \beta \neq 1$ 或 $\gamma \neq 0,\ \beta = 1$ 我们的定理也包含了许多熟知的结果.

其次，我们讨论二重 Fourier 级数的绝对收敛性问题. 众所周知，许多普通 Fourier 级数绝对收敛性定理已被拓广到二重 Fourier 级数上(参见[2-4])，В. Г. Челидзе 也做了一些很好的结果，但往往将函数限制在 L_2 或连续的情况下来讨论，或者在 $L_p (1 < p \leqslant 2)$ 中的满足拓广了的 Lipschitz 条件的函数(参见[5]) 来讨论. 这里，研究级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (|a_{m,n}|^{\beta} + |b_{m,n}|^{\beta} + |c_{m,n}|^{\beta} + |d_{m,n}|^{\beta})(m+1)^{\gamma}(n+1)^{\gamma'} \tag{2.1}$$

的收敛性问题，其中 $a_{m,n},\ b_{m,n},\ c_{m,n},\ d_{m,n}$ 是函数 $f(x, y)$ 的 Fourier 系数. 我们在 $L_p (1 < p \leqslant 2)$ 中讨论，而且采用函数 $f(x, y)$ 的 t(t 是自然数) 阶有限差的积分作为判定级数(2.1) 的收敛性的工具. 这样工作似乎尚未有用来判别二重 Fourier 级数的绝对收敛性.

我们记

$$\Delta_{h,k}^{(t)} f(x, y) = \Delta_{h,k}^{(1)}(\Delta_{h,k}^{(t-1)} f(x, y)),$$

$$\Delta_{h,k}^{(1)} f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

---

① В. Г. Челидзе. Об абсолютной сходимости рядов Фурье(手稿)

称 $\Delta_{h,k}^{(t)}f(x,y)$ 为函数 $f(x,y)$ 的具有差距 h，k 的 t 阶有限差，

$$\omega_t(\delta_1,\delta_2,f)=\max_{|h|\leqslant\delta_1,\ |k|\leqslant\delta_2}\max_{x,y}\left|\Delta_{h,k}^{(t)}f(x,y)\right|$$

是 $f(x,y)$ 的 t 阶连续性模.

设 $f(x,y)\in L_p$，记

$$A_m^{(r)}(M_1',f)_p=\left\{M'^m\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}f\left(x+\frac{j\pi}{M'^m}\cdot y\right)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$B_n^{(s)}(M_1',f)_p=\left\{N'^n\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\binom{s}{j}f\left(x,y+\frac{j\pi}{N'^n}\right)\mathrm{d}x\right|^p\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$C_{m,n}^{(t)}(M,N,f)_p=\left\{M^mN^n\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\Delta\frac{\pi}{M'^m}^{(t)},\frac{\pi}{N^n}f(x,y)\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}},$$

下面的定理 3 和定理 4 拓广了 В. Г. Челидзе[2] 以及 И. Е. Жак—М. Ф. Тиман 的结果[3].

定理 3 设 $f(x,y)$ 是属于 $L_p(1<p\leqslant 2)$ 的关于每一个变数有周期 2π 的函数，如果存在一组大于 1 的数 M'，N'，M，N 及自然数 r，s，t，使级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\{A_m^{(r)}(M',f)_p\}^{\beta}M'^{(m+\gamma-\beta)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{B_n^{(s)}(N',f)_p\}^{\beta}N'^{(n+\gamma'-\beta)},$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\{C_{m,n}^{(t)}(M,N,f)_p\}^{\beta}M^{m(\gamma+1-\beta)}N^{n(\gamma'+1-\beta)}$$

收敛，其中 $\gamma\geqslant 0$，$\gamma'\geqslant 0$，$0<\beta<\dfrac{p}{p-1}$，则级数(2.1)收敛.

置

$$\omega_r^*(\delta,f)=\sup_{|h|\leqslant\delta}\sup_{x}\left|\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}f(x+jh,y)\mathrm{d}y\right|,$$

$$\omega_s^{**}(\delta,f)=\sup_{|k|\leqslant\delta}\sup_{y}\left|\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\binom{s}{j}f(x,y+jk)\mathrm{d}x\right|.$$

И. Е. Жак—М. Ф. Тиман[3] 的定理是下述定理的特例($\beta=1$).

定理 4 设 $f(x,y)$ 是关于每一个变数有周期 2π 的函数，而且在 Hardy 意义下是有界变差的. 如果对于一组自然数 r，s，t 级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\{\omega_r^*(2^{-m},f)\}^{\frac{\beta}{2}}2^{m(\gamma+1-\beta)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\omega_s^{**}(2^{-n},f)\}^{\frac{\beta}{2}}2^{n(\gamma'+1-\beta)},$$

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty}\{\omega_{m,\, n}(2^{-m},\, 2^{-n},\, f)\}^{\frac{\beta}{2}}2^{m(\gamma+1-\beta)}2^{n(\gamma'+1-\beta)}$$

收敛,其中 $\gamma \geqslant 0$, $\gamma' \geqslant 0$, $0 < \beta < 2$,则级数(2.1)收敛.

参 考 文 献

[1] С. Б. Стечкин. Об абсолютности сходитости рядов Фурье, Второе сообщение[J]. *Изв.* АН СССР, Сер. Матем. , 1955(19):221-246.

[2] В. Г. Челидзе. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье[J]. Доклаэы АН СССР, 1946(54).

[3] И. Е. Жак н М. Ф. Тиман. О суммировании двойных рядов[J]. Матм. Сборник, 1954,35(77).

[4] И. Е. Жак. Об обобщении одной теоремы В. Г. Челидзе[J]. Сообшения АН Груз. ССР, Т, 1955,16(2).

[5] A. Zygmund. Trigonometrical Series[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.