

*DUANLIE GUOCHENGQU
JIEXI LILUN*

断裂过程区 解析理论

段树金 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

013047939

断裂过程区 解析理论

段树金 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn



北航

C1655670

TU528.01
06

内 容 提 要

断裂力学方法应用于混凝土起始于 20 世纪 60 年代,用 FCM 模拟混凝土断裂过程已开展不少的研究,推导基于虚裂纹模型的解析解具有重大理论和实践意义。本书首先介绍裂纹尖端附近有限应力集中和断裂过程区的概念;然后系统阐述断裂过程区理论,主要包括两种计算方法:加权积分法和奇异曲面叠加法,并给出含有直线状裂纹的各向同性板及正交异性板的平面问题、含有直线状裂纹的薄板弯曲问题和含有硬币状裂纹面的三维问题的解析解;最后讨论断裂过程区理论的应用,主要包括试件断裂过程的数值模拟、模型的有限元分析方法和试验研究的一些成果。

本书适合土木工程、水利水电工程、工程力学等专业、力学专业相关科研人员、专业人士、院校师生参考借鉴。

图书在版编目(CIP)数据

断裂过程区解析理论 / 段树金著. -- 北京: 中国水利水电出版社, 2013.5

ISBN 978-7-5170-0887-3

I. ①断… II. ①段… III. ①混凝土—断裂力学
IV. ①TU528.01

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第103914号

书 名	断裂过程区解析理论
作 者	段树金 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (发行部)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京时代澄宇科技有限公司
印 刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规 格	184mm×260mm 16 开本 9 印张 213 千字
版 次	2013 年 5 月第 1 版 2013 年 5 月第 1 次印刷
印 数	0001—1000 册
定 价	28.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前言

断裂力学方法应用于混凝土起始于 20 世纪 60 年代, Kaplan 等首先试图采用应力强度因子和能量释放率作为判断混凝土裂缝是否失稳扩展的参量。但是由于断裂韧度的尺寸效应等问题, 人们对线弹性断裂力学应用于混凝土等非金属材料的适用性和理论性提出了质疑。大量研究表明, 在混凝土裂缝尖端存在一微裂区。微裂区的产生和伴随着主裂缝的亚临界扩展导致了混凝土断裂分析的特殊性和复杂性, 这种微裂区又称之为断裂过程区 (FPZ), 断裂过程区力学模型的表达成为混凝土断裂力学应用的关键问题。已提出的分析模型主要有虚裂纹模型 (FCM)、钝裂缝带模型 (BCBM)、双参数模型和损伤力学模型等。其中, FCM 较为简单又比较符合混凝土断裂的特点, 该模型认为主裂缝尖端应力不是无限大, 断裂过程区用一条理想的虚拟裂纹来代替, 其裂纹面作用分布应力随裂缝宽度增加而减少 (应变软化), 在其他区域仍为线弹性。用 FCM 模拟混凝土断裂过程已开展了不少研究, 但遗憾的是几乎所有这些尝试都是采用 FCM 的概念和有限元等数值方法结合进行的。因此, 推导基于虚裂纹模型的解析解具有重大理论和实践意义。

作者于 1983 年底留学于日本岐阜大学工学部土木工学科, 在中川 (结构工程) 研究室从事工程力学与工程结构方面的研究, 主要是研究断裂过程区问题。1988 年完成了《关于构成裂纹尖端附近有限应力集中函数解的基础研究》的工学博士论文, 形成了断裂过程区理论的基本框架, 并于 1989 年 1 月从名古屋大学获得工学博士学位。这一研究工作一直持续至今, 内容不断充实深入, 先后在 Engineering Fracture Mechanics、土木学会论文集 (日本)、土质工学会论文报告集 (日本)、应用数学和力学、工程力学等国内外重要刊物和会议上发表学术论文数十篇, 其中《SCI》和《EI》等国际著名检索机构收录 20 余篇。论文被多次引用, 获

得学术界高度评价，被称为“Duan and Nakagawa's Model”。

本专著基于本人的博士学位论文和已发表的学术论文。首先介绍裂纹尖端附近有限应力集中和断裂过程区的概念；然后系统阐述断裂过程区理论（即断裂过程区的形成和表达），主要包括两种计算方法：加权积分法和奇异曲面叠加法，并给出含有直线状裂纹的各向同性板及正交异性板的平面问题、含有直线状裂纹的薄板弯曲问题和含有硬币状裂纹面的三维问题的解析解；最后讨论断裂过程区理论的应用，主要包括试件断裂过程的数值模拟、模型的有限元分析方法和试验研究的一些成果。有关界面裂纹的过程区理论将另文论述。

在此谨向中川建治先生、藤井康寿先生及原中川研究室的其他同事，向李云峰、赵新安、魏显峰、彭静美等参与过本项研究工作的同事和研究生，表示衷心的感谢。

书中错误和不足之处，敬请读者批评指正，欢迎参与讨论。

段树金

2013年4月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 断裂力学的由来与研究任务	1
1.2 断裂力学的发展概况	2
1.3 混凝土、岩石等软化材料断裂的研究现状	4
1.4 断裂力学主要研究方向	6
1.5 本书构成	7
第 2 章 弹塑性断裂力学基础	9
2.1 弹性力学基础	9
2.2 线弹性断裂力学	9
2.3 弹塑性断裂力学	16
第 3 章 平面裂纹问题的加权积分法	24
3.1 Westergaard 应力函数解	24
3.2 构成裂纹尖端有限应力集中的加权积分法	25
3.3 I 型问题各种权函数下的应力函数	27
3.4 I 型问题算例	32
3.5 II 型问题各种权函数下的应力函数	33
3.6 II 型问题算例	35
3.7 Dugdale 模型的近似与塑性域构成的算例	36
3.8 裂纹尖端张开位移算例	37
第 4 章 平面问题的 Dugdale 方式及其扩展	38
4.1 Dugdale 带状屈服模型简介	38
4.2 Dugdale 模型扩展	38
4.3 Dugdale 模型扩展算例	40
4.4 裂纹尖端应力集中值有限、斜度无穷大时解的构成	40

第 5 章 平面裂纹问题的奇异曲面叠加法	42
5.1 概述	42
5.2 奇异曲面 I 受拉裂纹的张开位移	42
5.3 奇异曲面 II 受剪裂纹的滑开位移	44
5.4 裂纹分析的奇异曲面叠加法	46
5.5 算例	46
5.6 讨论	50
第 6 章 正交异性板平面裂纹问题的加权积分法	51
6.1 概述	51
6.2 坐标转换	52
6.3 均匀应力下的应力函数	53
6.4 Westergaard 型应力函数	53
6.5 边界条件	54
6.6 加权积分法构成的有限应力集中解	54
6.7 算例及讨论	56
第 7 章 受拉硬币状裂纹面的空间问题	58
7.1 概述	58
7.2 基本解	58
7.3 问题的奇异解	64
7.4 加权积分法构成的有限应力集中解	66
7.5 算例与讨论	68
第 8 章 受剪硬币状裂纹面的空间问题	70
8.1 概述	70
8.2 问题的奇异解	70
8.3 问题的有限应力集中解与算例	74
第 9 章 薄板弯曲问题的奇异曲面叠加法	77
9.1 概述	77
9.2 基本曲面和开口形状	77
9.3 元素裂纹曲面 I, $W_1(x, y; a)$	79
9.4 元素裂纹曲面 II, $W_2(x, y; a)$	81
9.5 解析方法	83
9.6 算例	84
第 10 章 含断裂过程区弹性体的能量分析	87
10.1 概述	87
10.2 平面问题 I 型裂纹的 J 积分	87

10.3	空间问题 I 型硬币状裂纹的 J 积分	89
10.4	讨论	91
第 11 章	双参数模型解析解	92
11.1	概述	92
11.2	数学力学模型及解析解	92
11.3	虚裂纹长度与应力强度因子、张开位移的关系	95
第 12 章	劈裂试件断裂试验与有限元分析	97
12.1	概述	97
12.2	模型试验研究	97
12.3	数值仿真研究	103
第 13 章	混凝土四点弯曲梁断裂过程的数学模型	108
13.1	概述	108
13.2	基本公式	108
13.3	断裂过程区模型	112
13.4	算例	113
13.5	讨论	115
第 14 章	固结黏土断裂过程的数学模型	116
14.1	概述	116
14.2	应力和位移函数	117
14.3	断裂过程模型	119
14.4	讨论与结论	121
附录 1	扁球面坐标系相关公式	123
附录 2	圆柱坐标系相关公式	129
参考文献		130

第 1 章 绪 论

1.1 断裂力学的由来与研究任务

材料的力学性能是进行工程设计、评定材料、研制新材料、新工艺及选用替代材料的重要依据。不过在过去的很长一段时期内,它都是以传统力学理论为基础的^[1]。传统的强度计算理论是长期以来在工程上对构件强度或结构强度进行计算的方法。它以材料力学为基础,假定材料为均匀的各向同性的连续体(避开客观存在的缺陷和裂纹),采用连续介质力学的方法对构件进行整体的受力和变形分析。计算时,只要某一危险点的工作应力不超过允许应力,即

$$\sigma \leq [\sigma] \quad (1.1)$$

就认为构件或结构是安全的。反之,就认为是不安全的。这种强度计算理论已有了 100 多年的历史,它在过去的工程设计和实际运用中发挥了重要的作用。

但是,工程中却发生了一系列的“低应力脆断”事故。如:1938~1942 年间,世界上有 40 座全焊接铁桥未见任何异常现象却突然发生断裂而倒塌;1943~1947 年间美国制造的 5000 艘全焊接“自由轮”竟发生 1000 多起断裂事故,其中 228 艘完全毁坏。据记载,当时对断裂船体的计算表明:船体所受拉应力仅为 70MPa,而所设计钢材的屈服点为 250MPa,抗拉强度为 400~500MPa。尤其引人注目的是 20 世纪 50 年代美国的北极星导弹固体燃料发动机壳,材料为 D₆AC 高强度钢($\sigma_s=1400\text{MPa}$),却在试验发射时发生爆炸事故,其破坏应力不到 σ_s 的一半。这些事故的发生,使人们对传统的力学理论产生了怀疑,为什么材料在工作应力远低于材料的屈服强度时就会发生断裂破坏呢?人们通过观察和研究,发现低应力脆断的主要原因是实际构件中存在着各种各样的缺陷和裂纹,而这些缺陷又是材料加工过程中难以完全避免的。所有低应力脆断事故的发生概率源于这些存在于材料中原有的微小裂纹或缺陷。这一发现提高了人们对原来被忽略的微小裂纹或缺陷的认识,使人们认识到必须对含裂纹物体作进一步的研究,对微小的裂纹作进一步的分析。断裂力学就是在这种情况下产生和发展起来的。

断裂力学,是固体力学的一个重要分支,是研究含裂纹物体强度和裂纹扩展规律的一门学科,又称裂纹力学^[1-23]。

裂纹是引起脆断的主要因素,所以首先应该对裂缝的型式有所了解。在本学科中,所谓裂纹含有更广泛的意义,除了物体中因开裂而产生的裂纹,还包括材料冶炼过程中的夹渣、气孔、加工过程中引起的刀痕、刻槽等。

按裂纹存在的几何特性,可把裂纹分为穿透裂纹、表面裂纹和深埋裂纹。

如果一个裂纹贯穿整个构件厚度,则称为穿透裂纹,也称为贯穿裂纹。有些条件下,虽然裂纹并没有穿透构件厚度,仅在构件的一面出现裂纹,但若其深度已达到构件厚度一

半以上时, 该裂纹也常按穿透裂纹处理。构件中的穿透裂纹常当做理想尖裂纹处理, 即裂纹尖端的曲率半径趋近于零, 这种简化偏于保守, 但在实际应用中比较安全, 所以工程上易于接受。

若裂纹位于构件的表面或裂纹的深度与构件的厚度相比较小, 则称为表面裂纹。在工程中表面裂纹常简化为半椭圆形裂纹。

裂纹处于构件内部, 在表面上看不到开裂的痕迹, 这种裂纹称为深埋裂纹。计算时常简化为椭圆片状或圆片状裂纹。

在断裂力学中, 裂纹常按其受力及裂纹扩展途径分为三种类型, 即 I、II、III 型。

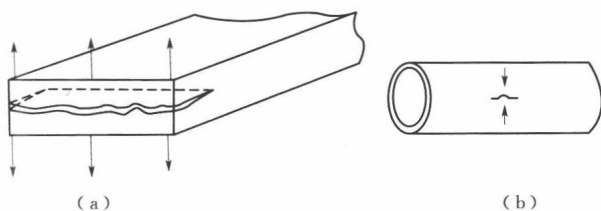


图 1.1 张开型 (I 型) 裂纹

I 型裂纹即为张开型裂纹, 如图 1.1 (a) 所示, 拉应力垂直于裂纹扩展面, 裂纹上下表面沿作用力的方向张开, 裂纹沿裂纹面向前扩展。工程中属于这类裂纹的如板中有一穿透裂纹, 其方向与板所受拉应力方向垂直, 或一压力容器中的纵向裂纹 [图 1.1 (b)] 等。

II 型裂纹即为滑开型裂纹。其特征为裂纹的扩展受切应力控制, 切应力平行作用于裂纹面而且垂直于裂纹线, 裂纹沿裂纹面平行滑开扩展 [图 1.2 (a)]。属于这类裂纹的如齿轮或长键根部沿切线方向的裂纹引起的开裂; 受扭转的薄壁圆管上贯串管壁的环向裂纹在扭转力的作用下引起的开裂 [图 1.2 (b)] 等, 均属于 II 型裂纹。

III 型裂纹即为撕开型裂纹。在平行于裂纹面而与裂纹前沿线方向平行的剪应力的作用下, 裂纹面产生沿裂纹面的撕开扩展 [图 1.3]。

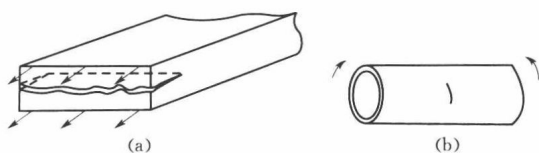


图 1.2 滑开型 (II 型) 裂纹

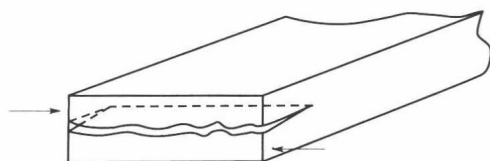


图 1.3 撕开型 (III 型) 裂纹

在这三种裂纹中, 以 I 型裂纹最为常见, 也是最为危险的一种裂纹, 所以在研究裂纹体的断裂问题时, 这种裂纹是研究最多的。

1.2 断裂力学的发展概况

有关断裂问题的研究可以追溯到 20 世纪 20 年代初, Griffith^[1] 首先提出了将强度与裂纹长度定量地联系在一起。Westergaard^[2] 与 1939 年最早给出了平面裂纹问题的解析解, 奠定了裂纹力学的基础。但断裂力学作为一门独立的学科, 应该始于 1948 年。这一年, Irwin 发表了他的第一篇经典文章《Fracture Dynamics》^[3]。此后, 在很长一段时间内, 诸多学者的研究几乎全部集中在线弹性断裂力学上。1957 年, Irwin 又提出表征外力作用下, 弹性物体裂纹尖端附近应力强度的一个参量—应力强度因子^[4], 建立了以应力强度因

子为参量的裂纹扩展准则（亦称 K 准则）。譬如，对含有一中心贯穿直裂纹的无限大平板的 I 型断裂问题，他认为裂纹尖端的应力场强度的普遍表达式为

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1.2)$$

由这一表达式可见，K 值完全确定了裂纹尖端应力场的强弱程度。而裂纹扩展的临界条件为

$$K = K_c \quad (1.3)$$

其中 K_c 为材料的临界应力强度因子或称平面应变断裂韧度，可由试验测定。在此基础上形成了断裂韧性的概念，并建立起测量材料断裂韧性的实测技术。这样一来，作为断裂力学的最初分支——线弹性断裂力学就开始建立起来。在接着的 20 多年里，线弹性断裂力学广泛地渗透到各个工程领域，尤其是处理和解决材料的平面应变断裂问题、对大型构件和脆性材料的断裂分析，并逐步成为结构设计、材料选择与检验的主要依据之一。

由于线弹性断裂力学是建立在弹性理论的基础上的，所以对于工程中大量使用的诸如中、低强度钢等具有较好塑性的材料并不适用，因为这些材料在裂纹发生扩展前，在裂纹尖端附近将出现一个较大的塑性区。此塑性区的尺寸可接近于甚至超过裂纹本身的尺寸，有时甚至可以达到整体屈服。因此对于这种大范围屈服断裂或全面屈服断裂问题，就再也不能采用线弹性断裂力学来进行分析，而必须以弹塑性断裂力学代之。

弹塑性断裂力学不同于线弹性断裂力学，它是以弹性力学和塑性力学为基础，研究物体的裂纹扩展规律和断裂准则，适用于裂纹尖端附近有较大范围塑性区的情况。因此在理论上要困难得多，也更加不成熟。但是在近几十年来，在这方面已开展了大量的研究工作，成为断裂力学研究中最为活跃的一个分支。目前用于弹塑性断裂力学研究的最主要方法有 COD 法和 J 积分法。

(1) 裂纹尖端张开位移 COD。大约在 Irwin 和他的同事们发展塑性修正的应力强度因子以扩大线弹性断裂力学的应用范围的同时，Wells 提出了另一个概念，并希望它也能用于大范围屈服的情况。这个概念运用裂纹张开位移（COD）作为控制裂纹扩展的参数。认为：当裂纹张开位移达到某一临界值 δ_c （认为是材料的固有参数）时，裂纹就开始扩展，断裂判据为

$$\delta = \delta_c \quad (1.4)$$

1960 年，Dugdale^[5] 在其一篇重要的文章《含裂缝钢薄板的屈服》中给出了 δ 的表达式。在该文中，Dugdale 采用了 Muskhelishvili 的分析方法，提出了“窄长条屈服模型”，故又称之为 D—M 模型。COD 判据正是在这些模型基础上建立起来的。

(2) J 积分法。Rice^[7] 在 1968 年提出了一个围绕裂纹尖端的应变能密度的线积分——J 积分，由于它具有守恒性而被用作描述裂纹尖端应力应变场奇异性的参量，它不需要模型假定，当其达到临界值 J_c 时就发生断裂，而且适用于弹性、弹塑性、全塑性等情况。其断裂判据为

$$J = J_c \quad (1.5)$$

J 积分的理论基础比较严密，在线弹性情况下，它与 G 和 K 存在一一对应的关系，故可将其看做是线弹性理论在弹塑性情况下的推广。

1.3 混凝土、岩石等软化材料断裂的研究现状

混凝土是当代应用最广泛的建筑工程材料，它是由粗、细骨料及硬化水泥基体组成的多相材料。从微观上看，其显著的特点是非均质、多相多孔，而且在骨料与胶结体之间存在着微裂隙。因此，与金属材料相比，混凝土结构的断裂更为复杂，在裂缝端部将产生微裂缝区和亚临界扩展长度。由于裂缝尺寸较大，除大体积混凝土外，用线弹性断裂力学分析构件中出现的裂缝是不合适的，况且在裂纹的尖端也不出现应力的奇异性。

另外，就物理状态而言，混凝土微裂缝区与金属的塑性区也完全不同，不但微裂缝区的尺寸较金属材料的塑性区尺寸大几个数量级，而且表现出材料的软化特性。在低碳钢的裂纹尖端，随着外加荷载的增加，裂纹尖端附近的材料将出现屈服而且在该塑性区内应力保持不变。而混凝土材料的断裂不存在屈服区，在载荷的作用下，尖端的材料达到屈服强度后，从微观上来看，有部分材料及部分区域已经丧失了承载能力，形成和扩大了微裂区，但由于骨料的存在，还能传递部分内力，这在宏观上就表现出材料的黏结力的下降。这种由于尖端微裂缝区的出现而削弱了裂缝前缘部分材料传递内力的能力的现象称为材料的软化行为。图 1.4 描述和比较了混凝土与金属材料之间在裂纹尖端附近应力场的差异以及材料的应力—应变关系曲线。

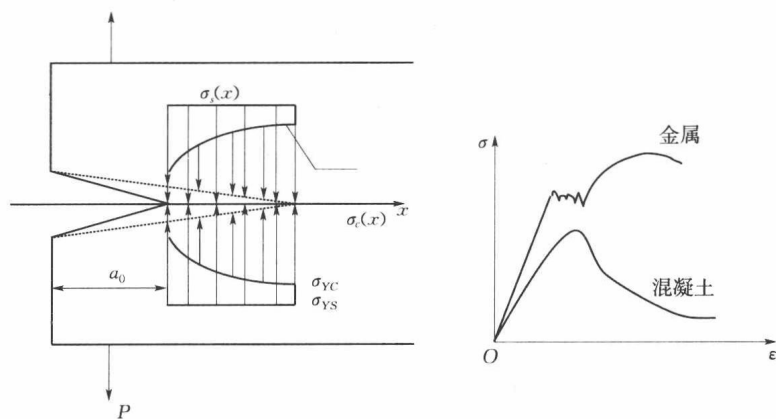


图 1.4 金属与混凝土材料裂纹尖端应力分布、应力—应变关系比较

自 1961 年 Kaplan^[24] 将断裂力学引入混凝土材料以来，有关岩石与混凝土两种材料的断裂力学研究^[25-45] 主要是集中在断裂过程区的研究方面。其中较著名的模型有：①根据混凝土的变形特点，瑞典隆德工学院的 Hillerborg^[26-27] 于 1976 年提出了“虚裂纹模型”（简称 FCM）；②在 Hillerborg 研究的基础上，美国西北大学的 Bazant^[28] 于 1983 年提出了“钝裂缝带模型”（简称 BCBM）；③Jenq 和 Shah^[31] 于 1985 年提出了“双参数模型”（简称 TFPM）。这些模型的共同特点是假设在裂纹的尖端附近存在一断裂过程区（或称为拉应变软化区、微裂纹区、损伤区、伪塑性区、迁移区间、过渡区间等），在此区域内存在着随张开位移的增大而减少的内聚力。

下面较为具体地阐述虚裂纹模型：

混凝土受荷载作用后，裂纹端部产生应力集中，尖端附近将产生许多的微裂缝，且端

部较为密集,宽度也较大,距离端部一定距离后微裂缝逐渐减少并消失。在微裂缝区域内,即软化区内,材料传递内力的能力与微裂区的“宏观”变形之间存在着某种反比关系,即微裂区发展越充分,其所传递的内力越低。当微裂区的扩展宽度达到材料的极限宽度 W_0 时,所传递的内力降为零,并同时出现“宏观”裂缝或称为“真实”裂纹。虚裂纹模型将微裂区简化成为一条能传递内力的“虚裂纹”,如图 1.5 所示,假设:

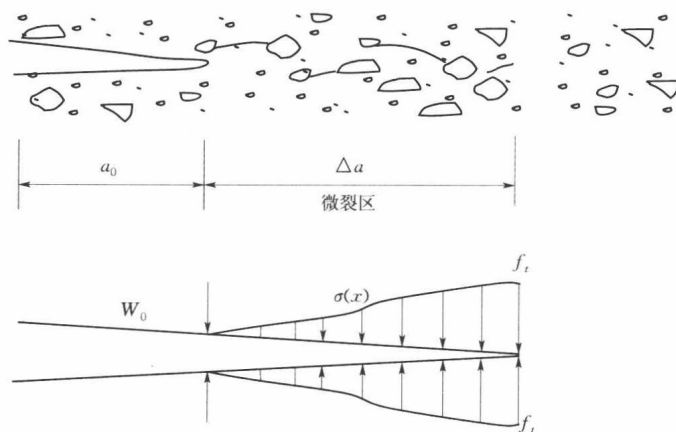


图 1.5 微裂区和 FCM 模型

(1) 当裂纹端部的最大拉应力达到材料的抗拉强度 f_t 时,开始出现微裂纹,并逐渐发展成为微裂区。

(2) 裂纹端部附近的微裂区内的材料性能虽然劣化,但尚能传递部分拉应力。微裂区用一约束裂纹替代,该裂纹传递应力的能力由微裂区的张开宽度 W 确定,即遵循 $\sigma-W$ 规律。由于把微裂区看成是一条虚拟的约束裂纹而非实际裂纹,故称之为虚裂纹模型。

(3) 虚裂纹初始的张开宽度 W 假定为零,并逐渐增大,当达到材料的某一临界值 W_0 时,裂纹完全张开而丧失传递应力的能力,此时虚裂纹转变成真实裂纹,与此同时,新的虚拟裂纹又在前面出现,这就是我们所说的裂纹的亚临界扩展。

(4) 微裂区以外的材料仍处于弹性状态。图 1.6 描述了裂纹端部应力分布以及裂纹扩展过程。其中图 1.6 (a) 表示裂纹扩展端部的应力分布,图 1.6 (b) 表示裂纹扩展后形成新裂纹时端部的应力分布。

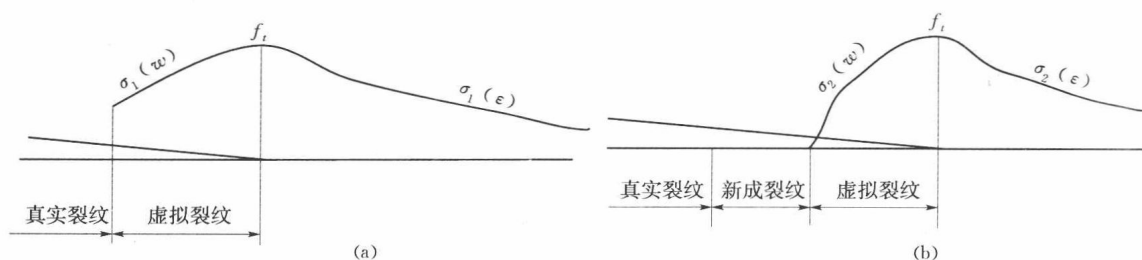


图 1.6 裂纹尖端应力分布及扩展过程示意图

在虚裂纹模型中,断裂能 G_F 和软化曲线是两个最重要的参数。断裂能指的是单位面积微裂区开裂所需吸收的能量。在这里有必要将临界应变能释放率 G_{IC} 与断裂能 G_F 的概念阐述一下,以免引起误解和混淆。临界应变能释放率指的是从裂纹尖端向前扩展一单位

面积时, 整个构件内所耗损的能量。 G_{IC} 一般只限于线弹性材料, 除非能将构件内裂纹扩展所必须的塑性功与所非必需的塑性功加以区分。尽管断裂能 G_F 也是材料扩展一完整单位面积的裂纹所需能量的度量, 但在概念上不同于 G_{IC} 。它指的是固定位置的单位面积的材料完全扩展成真实裂纹时所需的能量耗损。这两个概念只有在线弹性材料的情况下才能等同起来, 此时能量耗散只发生在裂纹尖端的一小部分区域内。数值上, 断裂能等于 σ — W 软化曲线下所围的面积, 如图 1.7 所示。在实际的运用时, 为了数值计算的方便, 一般将试验得来的混凝土软化曲线简化成图 1.8 的直线或折线性。

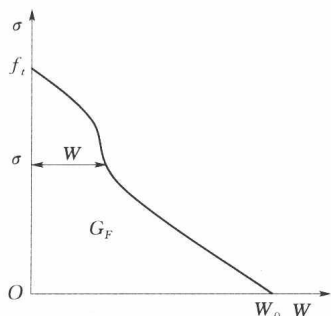


图 1.7 应变软化曲线

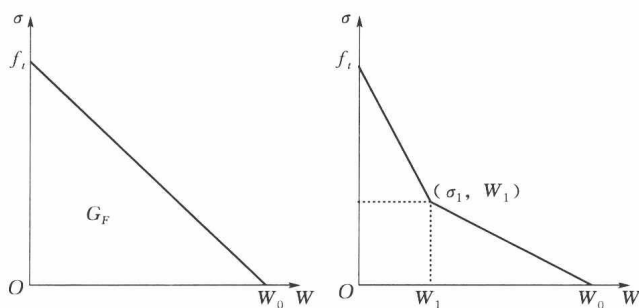


图 1.8 单线性和双线性软化曲线

FCM、BCBM 等模型较好地反映了混凝土等软化材料在裂缝端部微裂区内的应力和变形特点, 目前被国内外学者广泛地用在解决实际工程结构的断裂问题中。在这些文献中, 大多数学者都是利用实验确定拉应变软化曲线和断裂能, 采取数值方法并结合虚裂纹模型来模拟混凝土、岩石等工程材料的断裂过程。

在实际应用时, 由于很难从拉伸试验中直接得到准确的软化曲线, 同时基于数值计算考虑, 通常将软化曲线简化成为线性关系。尽管这在工程应用中对混凝土构件开裂、荷载—位移曲线的求解起到了简化的作用, 但在某种程度上并不能正确反映断裂过程区内应力、位移的分布及其相互之间的关系, 即只能从宏观角度对过程区的影响进行实用意义上的评价, 而不能从数学上对虚裂纹长度及其应力分布进行解析求解。在很长一段时间内, 一般都认为找不到解析解, 这恐怕是由于受到线弹性断裂力学的影响, 认为裂纹尖端的应力函数都只能表示为 $r^{1/2}$ 的整数倍的奇异性所致^[15]。但从 20 世纪 80 年代开始, 段树金、中川建治等提出了有限应力集中的概念, 以弹性理论为基础, 采用加权积分法和奇异曲面叠加法成功地得出了断裂过程区内应力和张开位移并存分布以及弹性区中应力场的解析解, 并应用于多种裂纹问题的分析^[46-85], 后来这一模型在国际上被称之为 “Duan and Nakagawa's Model^[86,87] (段—中川氏模型)”。

1.4 断裂力学主要研究方向

以上所述对金属材料和岩石混凝土类材料断裂力学的研究与应用, 根据材料自身的断裂特性, 出现了不同的走向。这些研究方向可大略归纳如下。

(1) 承认裂纹尖端应力呈无穷大的奇异解研究。这是线弹性断裂力学中最为基础、最重要的研究方向。其中, 含线裂纹各向同性板平面问题的研究最为活跃, 其他如对界面裂

纹问题、正交异性板中的线裂纹问题、空间弹性体中的典型裂纹面问题等，其解析研究的绝大多数都以裂纹尖端无穷大应力集中为目标，或导出精确解，或导出包含奇异项、精度较高的级数解。

(2) Dugdale 方式解的研究。裂纹尖端带状塑性区内应力均匀分布，由此可以确定屈服区的长度（或裂纹尖端张开位移），研究和应用以 I 型裂纹为主。

(3) 避开裂纹尖端附近的不确定性，从能量角度进行宏观考察的 J 积分的研究。J 积分是目前弹塑性断裂力学中最重要的物理参量，它比裂纹尖端张开位移理论上更加严密，物理意义更加明确，推广应用更为便捷，关于这方面的理论研究和试验研究甚多。

(4) 通过实验确定应力强度因子 K 的研究。这一研究方向实质上是假定裂纹尖端应力奇异，通过实验确认其应力集中的比例因子（或幅度），所以也可以将其作为第一个方向的一部分。

(5) 有限元法、边界元法等数值方法在断裂力学中的应用研究。在线弹性范围内，是以第一方向作为基础、把求解应力强度因子 K 作为目标；而在弹塑性范围内，其塑性域尺度一般依据 Dugdale 方式确定。

(6) 与裂纹尖端应力奇异性或 Dugdale 方式完全不同的可以正确描述和把握裂纹亚临界扩展的断裂过程区问题的研究，对于混凝土、土质、岩石等土木工程材料裂纹周边应力分布、裂纹扩展直至破坏的评价具有重要意义。研究方式包括试验、数值和理论（解析）研究。

以上所述方向中过去的解析方法以及著者等的解析方法给出的裂纹尖端附近的变形和应力状态大致如图 1.9 所示。

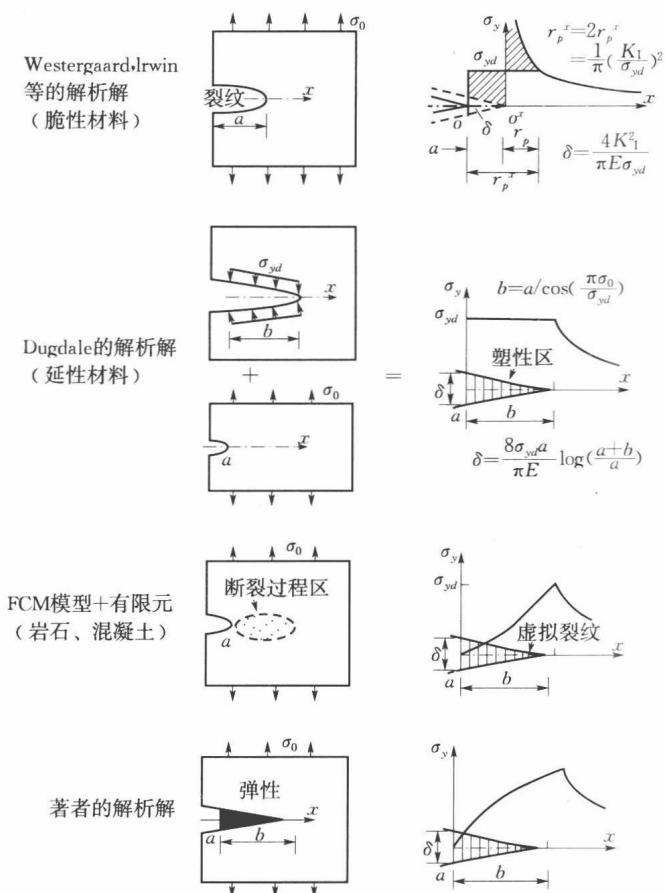


图 1.9 各种断裂模型裂纹尖端附近的变形和应力状态

1.5 本书构成

本书的构成以作者本人博士学位论文以及论文工作期间和以后发表的期刊学术论文的内容为基础，不包括其中的界面断裂问题，主要介绍构成断裂过程区解析理论的两种方法：加权积分法可以给出无限大弹性体含单一裂纹问题的解；奇异曲面叠加法则可以用于有限边界或有多个裂纹问题的分析。这一模型消除了传统应力函数在裂缝尖端存在的应力

奇异现象,可真实模拟断裂过程区既有张开位移又有有限应力集中的断裂特性。具体章节内容分布如下。

第 1 章介绍断裂力学的任务、产生和发展概况,以及混凝土断裂力学的发展状况。

考虑到本书体系的完整性和可读性,第 2 章介绍弹塑性断裂力学的基本理论。

第 3 章至第 10 章是本书的核心部分,介绍构成断裂过程区解的基本方法和解决的基本问题。每章都附有算例,为了解释清楚概念,裂纹和断裂过程区的尺度都取得比较大。

第 3 章介绍加权积分法构成断裂过程区解析理论,并将其应用于各向同性无限大板中心裂纹的 I 型和 II 型问题的求解。

第 4 章是扩展的 Dugdale 方式,应用于各向同性无限大板中心裂纹的 I 型问题。

第 5 章介绍奇异曲面叠加法构成断裂过程区解析方法,并将其应用于各向同性板含有多条裂纹或有限边界 I 型和 II 型问题的求解。

第 6 章用加权积分法求解正交异性无限大板含有一沿任意方向中心裂纹的 I 型和 II 型问题。

第 7 章用加权积分法求解空间无限大弹性体含有一中心硬币状裂纹面的 I 型问题。

第 8 章用加权积分法求解空间无限大弹性体含有一中心硬币状裂纹面的 II 型问题。

第 9 章用奇异曲面叠加法求解含有一条或数条裂纹的薄板弯曲问题。

第 10 章介绍本模型对应的两个能量释放率的定义和计算方法。

第 11 章至第 14 章为应用篇。

第 11 章为由加权积分解、奇异解和 Dugdale 方式所构成双参数模型的解析解。

第 12 章对混凝土劈裂试件进行讨论,介绍试验得到的试件荷载一位移曲线和数值模拟结果,验证本研究数学模型的有效性。

第 13 章利用解析解叠加的方法对混凝土四点弯曲梁的断裂过程进行数值仿真模拟。

第 14 章利用解析解叠加模拟固结黏土受剪破坏的断裂过程,并对本模型与虚裂纹模型的异同进行了讨论。

第 2 章 弹塑性断裂力学基础

2.1 弹性力学基础

人们在开始研究断裂力学时,侧重于高强度、低韧性钢,而这种材料在发生低应力脆断时几乎没有明显的塑性变形发生,因此按线性弹性理论分析,可以很好地解释许多低应力破坏现象。线性弹性理论是断裂力学分析的理论基础,把弹性理论应用在断裂力学分析,大大地促进了断裂力学的发展。

弹性力学平面问题归结为求解一个满足双调和方程 $\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$ 的应力函数 ϕ ,并使其满足弹性体边界上的全部边界条件。确定了应力函数 ϕ 以后,就可利用式 2.1 的关系求出各应力分量(不计体力),再根据平面问题的物理方程和几何方程分别求出应变和位移分量。

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.1)$$

因此问题的关键是找出双调和函数 ϕ 。而在数学中,复变解析函数的实部和虚部都是双调和函数,即

$$\begin{cases} \nabla^2 \nabla^2 \operatorname{Re} Z(z) = 0 \\ \nabla^2 \nabla^2 \operatorname{Im} Z(z) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

另外,对于复变解析函数 $Z(z)$,其导数 $Z'(z)$ 和积分 $\tilde{Z}(z)$ 的实部和虚部也均为调和函数,即

$$\begin{cases} \nabla^2 \operatorname{Re} Z'(z) = 0 & \nabla^2 \operatorname{Re} \tilde{Z}(z) = 0 \\ \nabla^2 \operatorname{Im} Z'(z) = 0 & \nabla^2 \operatorname{Im} \tilde{Z}(z) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

它们与 x, y 的线性组合也是双调和函数。

一般情况下,可以将应力函数构造如下:

- (1) $\phi = x \operatorname{Re} \varphi + y \operatorname{Im} \varphi + \operatorname{Re} g$, 此函数称为 Kolosoff - Muskhelishvili 应力函数。
- (2) $\phi = \operatorname{Re} \tilde{\varphi} + y \operatorname{Im} \tilde{\varphi}$, 此函数称为 Westergaard 应力函数。其中 φ, g 均为复变解析函数。

2.2 线弹性断裂力学

2.2.1 Westergaard 应力函数^[2]

如前所述, Westergaard 应力函数为