经济数学

总主编 赵斯泓

概率论与数理统计

主编／雷 平

副主编／孙 劼 周伟良 宋殿霞

立信会计出版社

LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

经济数学

总主编 赵斯泓

概率论与数理统计

主编／雷 平

副主编／孙 劼 周伟良 宋殿霞

立信会计出版社

LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 雷平主编. —上海：立信会计出版社，2012.8

（经济数学）

ISBN 978-7-5429-3623-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①雷… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 184075 号

策划编辑　蔡莉萍
责任编辑　蔡莉萍
封面设计　周崇文

概率论与数理统计

出版发行	立信会计出版社		
地　　址	上海市中山西路 2230 号	邮政编码	200235
电　　话	(021)64411389	传　　真	(021)64411325
网　　址	www.lixinaph.com	电子邮箱	lxaph@sh163.net
网上书店	www.shlx.net	电　　话	(021)64411071
经　　销	各地新华书店		

印　　刷	常熟市梅李印刷有限公司	
开　　本	787 毫米×960 毫米	1/16
印　　张	25	
字　　数	437 千字	
版　　次	2012 年 8 月第 1 版	
印　　次	2012 年 8 月第 1 次	
印　　数	1—3 000	
书　　号	ISBN 978-7-5429-3623-3/O	
定　　价	39.00 元	

《经济数学》编写组

总主编 赵斯泓(上海立信会计学院)

编　委 (以姓氏笔画为序)

王洁明(上海第二工业大学)
庄海根(上海应用技术学院)
孙　劼(上海应用技术学院)
李晓彬(上海金融学院)
沈春根(上海金融学院)
陈春宝(上海海事大学)
赵斯泓(上海立信会计学院)
钱　锦(上海海关学院)
雷　平(上海对外贸易学院)
车荣强(上海金融学院)
许建强(上海应用技术学院)
孙海云(上海应用技术学院)
杨敏华(上海立信会计学院)
宋殿霞(上海海洋大学)
周伟良(上海立信会计学院)
费伟劲(上海商学院)
徐　洁(上海海事大学)

第三册　《概率论与数理统计》

主　编 雷　平

副主编 孙　劼　周伟良　宋殿霞

前　言

随着我国高等教育的大众化和经济管理类专业的迅速发展，大学经济管理类数学课程的重要性日益凸显。数学课程教学必须按照培养高素质创新型人才的根本目标，适应新形势下大学本科学生的实际状况，立足经管类专业对数学知识能力的基本要求，深入研究教学内容、教学方法、教学手段的改革创新，使经管类数学课程的教学更具针对性和有效性。

《经济数学》是面向普通高校经济管理类专业数学基础课程的系列教材丛书，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三册。该套丛书由上海立信会计学院、上海对外贸易学院、上海金融学院、上海应用技术学院、上海第二工业大学、上海海事大学、上海海洋大学、上海海关学院、上海商学院等多所高校联合编写。教材按照2009年教育部数学与统计教学指导委员会关于“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，衔接硕士研究生“数学三”考试大纲，合理设置教学内容的范围和深度，积极探索将数学建模和数学实验融入课程，注重介绍数学理论在现代经济管理中的应用，为经济管理类专业学生学习专业课程以及进一步深造提供必需的数学基础知识。

《经济数学》系列教材配有同步出版的学习辅导书，对教材的知识结构和每章的知识点进行归纳总结，通过范例分析解题思路，提供教材习题全解，并配备每章的自测题，以帮助学生更好地理解、掌握教材内容和自我检测学习情况。

《经济数学》系列教材丛书由赵斯泓任总主编。第三册《概率论与数理统计》由雷平任主编，孙劼、周伟良、宋殿霞任副主编。参加编写的有：宋殿霞（第一章），赵斯泓（第二、第三章），孙劼（第四章），雷平（第五、第六、第八章），周伟良（第七章），许建强（第九章）。全书由雷平统稿，赵斯泓负责定稿。

《经济数学》的编写和出版得到了上海市教委徐国良同志、立信会计出版社的领

导以及蔡莉萍编辑的大力支持和帮助，在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请广大专家、同行和读者批评指正。

赵斯泓

2012 年 5 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

现实世界中普遍存在着两类不同现象。一类现象具有必然性,即在一定条件下可以确定某种结果必然会出现,这种现象称为确定性现象。例如,在地球上向上抛石子必然会下落;一个标准大气压下纯水加热到100℃必然会沸腾等。另一类现象具有偶然性,即在一定条件下存在着多种可能结果,而事先不能确定哪种结果会出现,这种现象称为随机现象。例如,掷一枚硬币的结果可能正面向上,也可能反面向上;掷一颗骰子的结果可能出现1点,2点,…,6点等。

随机现象在一次试验中的结果具有不确定性,但在大量的重复试验中,其结果将会呈现出某种规律性。例如,重复投掷一枚硬币,当投掷次数充分多时,正面和反面的出现次数会大致相同;重复投掷一颗骰子,随着投掷次数的增加,不同点数出现的比例会逐渐地接近。随机现象在重复试验中所呈现的规律性称为统计规律性,概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的数学分支。从研究内容来说,概率论侧重于应用数学理论和方法,揭示随机现象的统计规律性;数理统计侧重于分析处理统计数据,对随机现象作出估计和推断。

§1.1　随 机 事 件

一、随机试验

随机现象的统计规律性是通过大量重复试验呈现的内在属性。为了研究随机现象的统计规律性,需要在相同条件下进行重复试验。这里所称的试验是一个相当广泛的概念,可以是各种科学实验,也可以是对事物的状态或特征的观察、调查或测试。例如,观察掷一枚硬币出现哪一面向上,观察掷一颗骰子出现的点数,调查某个商场一天的客流量,测试某种电子元件的使用寿命等均为试验。

以上列举的试验具有如下共同特征:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行。

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但事先知道所有的可能结果。

(3) 在试验之前不能确定哪一个结果会出现。

在概率论中，将具有上述三个特征的试验称为随机试验，简称为试验。

二、样本空间

定义 1.1 随机试验的每一个可能结果称为一个样本点，记作 ω；全体样本点组成的集合称为样本空间，记作 Ω。

例 1 观察掷一枚硬币出现哪一面向上，有 2 个样本点，样本空间为

$$\Omega=\{\text{正面},\ \text{反面}\}$$

例 2 观察掷一颗骰子出现的点数，有 6 个样本点，样本空间为

$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

例 3 测试某种电子元件的使用寿命，有不可列个样本点，记元件的使用寿命为 t（小时），则样本空间为

$$\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}=[0,\ \infty)$$

例 4 盒内有编号为 1 到 5 的 5 个白球和编号为 6 到 10 的 5 个黑球，从中任取一球观察。如果观察的是球的颜色，则有两个样本点，样本空间为

$$\Omega_1=\{\text{白色},\ \text{黑色}\}$$

如果观察的是球的编号，则有 10 个样本点，样本空间为

$$\Omega_2=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 10\}$$

此例表明，对于同一个随机试验，根据不同的试验目的，有着不同的样本点和样本空间。

三、随机事件

在随机试验中，通常所关心的往往并不是试验的具体结果，而是试验的结果是否满足某种条件。满足条件的样本点组成样本空间 Ω 的一个子集。例如，在例 2 中，若规定掷出偶数点为中奖，则关心的是掷出的结果是否为偶数，满足中奖条件的样本点组成样本空间 Ω 的子集 $\{2,\ 4,\ 6\}$；又如，在例 3 中，若规定元件的使用寿命大于 1000 小时为合格，则关心的是测试的结果是否大于 1000 小时，满足合格条件的样本点组成样本空间 Ω 的子集 $\{t\mid t>1000\}=(1000,\ +\infty)$。

定义 1.2 在随机试验中，由满足某种条件的样本点组成的样本空间 Ω 的子集称为随机事件，简称为事件，记作 $A,\ B,\ C,\ \cdots\cdots$

随机事件可以用集合形式表示，也可以用带引号的文字形式表示。

每次随机试验必出现一个且仅出现一个样本点，如果所出现的样本点属于某个事件，则称该事件在试验中发生。

关于随机事件概念的几点说明：

(1) 每一个样本点 ω 作为 Ω 的子集，都表示一个事件，称为基本事件。由两个及以上的样本点组成的事件可视作基本事件的复合，称为复合事件。

(2) 样本空间 Ω 作为 Ω 的子集，也表示一个事件。由于 Ω 中包含试验的所有样本点，故每次试验中事件 Ω 都必然发生，称 Ω 为必然事件。

(3) 空集 $\varnothing$ 作为 Ω 的子集，也表示一个事件。由于 $\varnothing$ 中不含试验的任何样本点，故每次试验中事件 $\varnothing$ 都不可能发生，称 $\varnothing$ 为不可能事件。

必然事件和不可能事件都不具有随机性，但为方便起见，通常将其视作两个特殊的随机事件，可以理解为随机事件的两个极端情形。

例 5 观察掷一颗骰子出现的点数，设事件 A, B, C, D 分别为“点数为 6”，“点数小于 6”，“点数不大于 6”，“点数大于 6”，则

事件 $A=\{6\}$ 是基本事件。当且仅当掷出 6 点时，事件 A 发生。

事件 $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 是复合事件。当掷出 1, 2, 3, 4, 5 中的任意一个点数时，事件 B 均发生。

事件 $C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}=\Omega$ 是必然事件。每次掷骰子，事件 C 都必然发生。

事件 $D=\varnothing$ 是不可能事件。每次掷骰子，事件 D 都不可能发生。

四、事件的关系与运算

因为随机事件是样本空间的子集，所以事件的关系与运算等同于集合的关系与运算。应当注意的是：要从事件的角度理解这些关系与运算，并能用这些关系与运算表示各种复杂的事件。

1. 事件的包含

如果事件 A 的样本点都属于事件 B，则称 A 包含于 B，或称 B 包含 A，记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$。

事件包含的意义：事件 A 包含于事件 B 意味着 A 发生时 B 必发生。

2. 事件的相等(等价)

如果事件 A 与事件 B 相互包含，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等或等价，记作 $A=B$。

事件相等的意义：事件 A 与事件 B 相等意味着 A 与 B 所含的样本点相同。

例 6 观察掷一颗骰子出现的点数，设事件 A 为“点数是奇数”，事件 B 为“点数

小于 6”,事件 C 为“点数不大于 5”,则

$$A=\{1,3,5\},B=\{1,2,3,4,5\},C=\{1,2,3,4,5\}$$

故 $A\subset B$, $B=C$。

3. 事件的和(并)

由事件 A 与事件 B 的所有样本点组成的事件,称为 A 与 B 的和事件或并事件,记作 $A\cup B$, 即

$$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A\text{ 或 }\omega\in B\}$$

和事件的意义:和事件 $A\cup B$ 发生意味着 A 与 B 中至少有一个发生。

事件的和可以推广到有限个或可列个事件的情形。类似地,和事件发生当且仅当有限个或可列个事件中至少有一个发生。

有限个或可列个事件 A_1, A_2, …, A_n, … 的和事件,可简记为

$$\bigcup_i A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$$

4. 事件的积(交)

由事件 A 与事件 B 的共有样本点组成的事件,称为 A 与 B 的积事件或交事件,记作 $A\cap B$, 简记为 AB, 即

$$AB=A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A\text{ 且 }\omega\in B\}$$

积事件的意义:积事件 AB 发生意味着 A 与 B 都发生。

事件的积可以推广到有限个或可列个事件的情形。类似地,积事件发生当且仅当有限个或可列个事件都发生。

有限个或可列个事件 A_1, A_2, …, A_n, … 的积事件,可简记为

$$\bigcap_i A_i=A_1A_2\cdots A_n\cdots$$

5. 事件的差

由事件 A 中不属于事件 B 的所有样本点组成的事件,称为 A 与 B 的差事件,记作 $A-B$, 即

$$A-B=\{\omega\mid\omega\in A\text{ 且 }\omega\notin B\}$$

差事件的意义:差事件 $A-B$ 发生意味着 A 发生且 B 不发生。

例 7 观察掷一颗骰子出现的点数,设事件 A 为“点数是偶数”,事件 B 为“点数

小于 5”,则

$$A=\{2, 4, 6\}, B=\{1, 2, 3, 4\}$$

故 $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $AB=\{2, 4\}$, $A-B=\{6\}$。

6. 事件的互斥(互不相容)

如果事件 A 与事件 B 满足 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互斥或互不相容。

事件互斥的意义:事件 A 与事件 B 互斥意味着 A 与 B 不可能同时发生。

7. 事件的互逆(对立)

如果事件 A 与事件 B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A \cup B=\Omega$,则称 A 与 B 互逆或对立,并称 B 为 A 的逆事件或对立事件,记作 $B=\overline{A}$。

显然,事件 A 的逆事件 $\overline{A}$ 由样本空间 Ω 中不属于 A 的所有样本点组成,即

$$\overline{A}=\Omega-A=\{\omega \mid \omega \in \Omega \text{ 且 } \omega \notin A\}$$

事件互逆的意义:互逆事件 A 与 $\overline{A}$ 在每次试验中必有一个且仅有一个发生,即 A 发生则 $\overline{A}$ 不发生,A 不发生则 $\overline{A}$ 发生。

例 8 在投掷一枚骰子的试验中,设事件 A 为“点数等于 3”,事件 B 为“点数大于 4”,事件 C 为“点数小于 5”,则

$$A=\{3\}, B=\{5, 6\}, C=\{1, 2, 3, 4\}$$

故 A 与 B 互斥,B 与 C 互逆。

关于事件的关系与运算,易知有以下结论:

(1) 对于任何事件 A,有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$。

(2) 对于互逆事件 A 与 $\overline{A}$,有 $\overline{\overline{A}}=A$, $A\overline{A}=\varnothing$, $A \cup \overline{A}=\Omega$。

(3) 对于差事件 $A-B$,有 $A-B=A-AB=A\overline{B}$。

事件的关系与运算可用韦恩图直观表示如下(见图 1.1):

根据集合的运算律,可以得到事件的如下运算律:

(1) 交换律:$A \cup B=B \cup A$, $AB=BA$。

(2) 结合律:$A \cup B \cup C=(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$, $ABC=(AB)C=A(BC)$。

(3) 分配律:$A(B \cup C)=AB \cup AC$, $A \cup BC=(A \cup B)(A \cup C)$。

(4) 对偶律:$\overline{A \cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A} \cup \overline{B}$。

上述各运算律均可推广到有限个或可列个事件的情形。

利用事件的关系与运算可以表示各种复杂的事件。应当注意,同一事件可以有

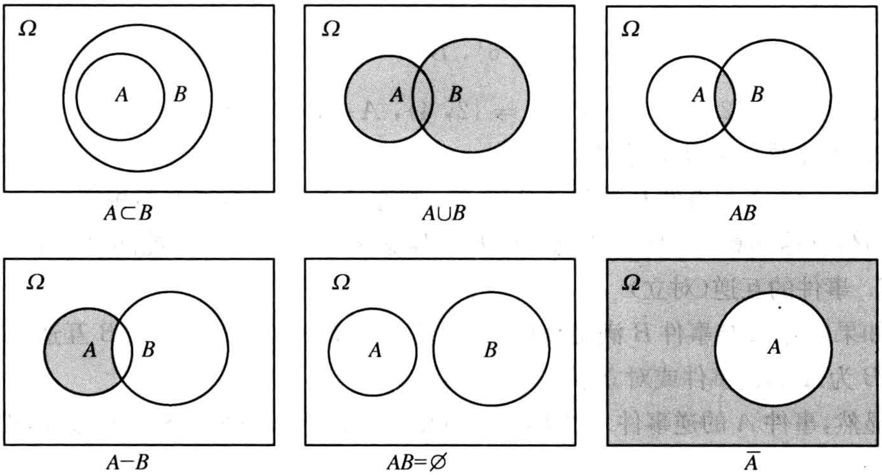

图 1.1　事件的关系与运算

不同的表示法,在实际问题中应根据需要采用合适的表示形式。

例 9　设 A, B, C 为同一随机试验中的事件,则

"A, B, C 都发生"可表示为 ABC。

"A, B, C 都不发生"可表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$。

"A, B, C 中恰好有一个发生"可表示为 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$。

"A, B, C 中至少有一个发生"可表示为 $A \cup B \cup C$。

"A, B, C 中至多有一个发生"可表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$。

"A, B, C 中恰好有两个发生"可表示为 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$。

"A, B, C 中至少有两个发生"可表示为 $AB \cup AC \cup BC$。

"A, B, C 中至多有两个发生"可表示为 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$。

习　题　1-1

1. 将一枚硬币连掷 2 次,设事件 A, B, C 分别为"第一次出现正面","2 次出现同一面","至少有 1 次出现正面"。试写出样本空间 Ω 及事件 A, B, C 的样本点。

2. 袋内有编号 1, 2, 3, 4 的 4 个球,从中任取一球后不放回,再任取一球。设事件 A, B 分别为"第 1 次取到的编号为 1","2 次取到的编号之和为 6 或 8"。

(1) 试写出事件 A, B 的样本点。

(2) 将取球方式改为第一次取球后放回，再第二次取球。试写出事件 A，B 的样本点。

3. 某城市共发行日报、晚报和体育报三种报纸。设事件 A，B，C 分别为“订阅日报”、“订阅晚报”、“订阅体育报”，试用 A，B，C 表示下列事件：

(1) 只订日报。

(2) 只订日报和晚报。

(3) 只订一种报纸。

(4) 恰好订两种报纸。

(5) 至少订一种报纸。

(6) 不订任何报纸。

(7) 至多订一种报纸。

(8) 三种报纸全订。

(9) 三种报纸不全订。

4. 某射手向靶子射击 3 次，设事件 A_i 为“第 i 次射击中靶”$(i=1, 2, 3)$，试说明下列事件的意义：

(1) $A_1A_2A_3$。　(2) $\overline{A_1A_2A_3}$。　(3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$。

(4) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$。　(5) $A_1 - A_2 - A_3$。　(6) $A_1 - A_2A_3$。

5. 设 A，B 为两个事件，试化简下列事件：

(1) $AB \cup \overline{A}B \cup A\overline{B} \cup \overline{A}\overline{B}$。

(2) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})$。

§1.2　随机事件的概率

在对随机现象的研究中，不仅需要知道可能发生哪些事件，更需要知道事件发生的可能性有多大。随机事件在一次试验中是否发生，事先是不能确定的，但事件发生可能性的大小是可以度量的。就好比线段长短的度量是长度，平面图形大小的度量是面积，物体运动快慢的度量是速度……随机事件发生可能性大小的度量，就是概率。

一、概率与频率

随机事件的概率反映事件发生可能性的大小，决定了事件发生的规律。这种规律并不表现在一次试验中事件是否发生，而是表现为大量重复试验中事件发生的统

计规律性。通过观察事件在重复试验中发生的频繁程度，可以对事件的概率有一个直观的了解和估计。

定义 1.3 设在 n 次重复试验中，事件 A 的发生次数为 n_A，则称

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为事件 A 发生的频率。

容易证明，频率具有如下基本性质：

(1) 非负性：对任一事件 A，有 $f_n(A) \geqslant 0$。

(2) 规范性：对必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega) = 1$。

(3) 可加性：对任意有限个或可列个两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$f_n(\bigcup_i A_i) = \sum_i f_n(A_i)$$

事件发生的频率反映事件在重复试验中发生的频繁程度，频率的大小与事件发生可能性的大小密切相关。可以想象，在重复试验中发生频率大的事件，在一次试验中发生的可能性也应该大；反之，频率小的事件发生的可能性也应该小。

实践表明，进行相同次数的重复试验，事件发生的频率未必相同，即频率与具体的试验有关，不能作为事件发生可能性大小的一般度量。但随着试验次数的增加，事件发生的频率会逐渐稳定地在某个数值附近摆动。一般地，试验的次数越多，摆动的幅度越小，故频率又具有稳定性。在大量重复试验的基础上，频率可以作为事件发生可能性大小的近似估计。

例如，掷一枚硬币，事先无法确定会出现正面还是反面，但如果硬币的质地是均匀的，则有理由认为出现正面和反面的可能性各占一半，故在大量重复试验中，出现正面的频率应该接近 0.5。为了验证这一点，历史上曾有不少人做过投掷硬币试验，其中的一些结果如表 1-1 所示。

表 1-1 投掷硬币试验

试验者	投掷硬币次数	出现正面次数	出现正面频率
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998